Materials Physics and Mechanics 24 (2015) 119-128 Received: August 27, 2015

ДВУХФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ПРИ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В.Д. Сарычев, С.А. Невский*, В.Е. Громов

Сибирский государственный индустриальный университет,

ул. Кирова 42, г. Новокузнецк, 654007, Россия

*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

Аннотация. На основе представлений о пластически деформируемом материале как о двухфазной гетерогенной среде построена фильтрационная модель пластической деформации. В основу этой модели положены законы сохранения импульса и массы для каждой компоненты, уравнения состояния и граничные условия. Первая компонента среды является упругой, она отвечает за структурные превращения, а вторая компонента пластическая, она не связана со структурными превращениями. Получено фильтрационное соотношение между фазами. Проведен поиск решения в виде бегущей волны. В результате расчетов получено решение в виде «ударного перехода» и найдена предельная скорость его распространения. Для бегущих волн получено дисперсионное уравнение. Найдена критическая длина волны, при которой наступает неустойчивость.

1. Введение

Создание моделей пластической деформации является актуальной задачей, решение которой позволяет прогнозировать поведение материалов при различных внешних воздействиях [1]. В настоящее время для описания пластической деформации применяют два подхода. В первом подходе в качестве основных уравнений выступают уравнения баланса скалярных плотностей дефектов типа «реакция – диффузия» [2–5]. Функции источников зависят от типа дефектов и характера взаимодействия между ними. Этот подход требует введения достаточно большого числа переменных, так как в пластической деформации могут участвовать одновременно несколько типов дефектов [6], что усложняет решение задачи. С помощью этого подхода объяснено возникновение полос Людерса-Чернова [3, 4]. Дальнейшее развитие данных моделей шло по пути усложнения функций источников [6] и включения в уравнения коэффициентов перекрестной диффузии [7]. Второй подход предлагает введение параметров порядка, которые определяются типом решаемой задачи [8–10]. С помощью этого подхода решен аналогичный спектр задач [9,10]. В большинстве случаев аналитически решить эти задачи не удается, поэтому необходимо прибегнуть к численным методам, но для их применения необходимо знать константы, которые входят в функции источников. Для их нахождения прибегают к экспериментальным данным или теории, учитывающей конкретный механизм взаимодействия дефектов, например, термически активированное преодоление дислокацией стопоров [11]. Кроме двух вышеуказанных подходов для описания больших пластических деформаций применяется полевая теория дефектов [12]. С помощью этой теории изучено распространение плоских волн через слой вязкоупругих и упруго-вязкопластических

В [28–30] сделано обобщение теории двухкомпонентных смесей на случай геометрической и физической нелинейности.

Настоящая работа является развитием работ [31, 32] где была предложена фильтрационная модель пластичности и рассмотрено одноосное растяжение материала. В результате было получено аналитическое решение в виде «ударного перехода». Размер этого перехода составляет порядка 10 мкм что совпадает с экспериментом.

2. Постановка задачи

Запишем законы сохранения импульса и массы для первой и второй фаз

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div\rho_1\vec{u}_1 = I_{21}, \tag{1}$$

$$\rho_1\frac{d_1\vec{u}_1}{dt} = div\tilde{\sigma}_1 + \vec{p}_{21} + I_{21}\vec{u}_1, \qquad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_1\nabla \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + div\rho_2\vec{u}_2 = I_{12}, \tag{3}$$

$$\rho_2\frac{d_2\vec{u}_2}{dt} = div\tilde{\sigma}_2 + \vec{p}_{12} + I_{12}\vec{u}_2, \qquad \frac{d_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_2\nabla, \tag{4}$$

где $\rho_1 = \alpha\rho_e$, $\rho_2 = (1-\alpha)\rho_e$, $\tilde{\sigma}_1 = \alpha\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}_2 = (1-\alpha)\tilde{\sigma}$, ρ_e и ρ_s – истинные плотности фаз, $\tilde{\sigma}$ − напряжение во всей смеси, $\vec{p}_{21} = -\vec{p}_{12}$, $I_{21} = -I_{12}$ – интенсивности обмена массой и импульса между фазами, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ − скорости первой и второй фаз. Интенсивность обмена импульсом между фазами представим, как $\vec{p}_{21} = \vec{R}_{21} + I_{21}\vec{u}_{21}$, где $\vec{R}_{21}$ − межфазная сила, связанная с силами трения и сцепления фаз, $I_{21}\vec{u}_{21}$ − с фазовыми превращениями. Считаем, что фазы взаимодействуют по силовой схеме Х.А. Рахматулина [33], тогда $\vec{R}_{21} = -p\nabla\alpha + \varphi(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$. С учетом вышеуказанных фактов система (1) – (4) примет вид:

$$\frac{d_1\rho_1}{dt} + \rho_1 div\vec{u}_1 = I_{21}, \tag{5}$$

$$\rho_1\frac{d_1\vec{u}_1}{dt} = \alpha div\tilde{\sigma} + \varphi(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - I_{12}(\vec{u}_{21} - \vec{u}_1), \tag{6}$$

$$\frac{d_2\rho_2}{dt} + \rho_2 div\vec{u}_2 = I_{12}, \tag{7}$$

$$\rho_2\frac{d_2\vec{u}_2}{dt} = (1-\alpha)div\tilde{\sigma} - \varphi(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) + I_{12}(\vec{u}_{21} - \vec{u}_2), \tag{8}$$

где $\vec{u}_{21} = \vec{u}_1 - \chi_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = u_2 + \chi_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$, $\tilde{\sigma} = -P$. Систему (5) – (8) необходимо замкнуть на уравнение состояния. Так как вторая фаза есть материал, вовлеченный в пластическую деформацию, то будем считать ее несжимаемой. В этом случае ρ_s = const и $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = 0$, тогда $\vec{u}_{21} = \vec{u}_2$ Уравнение состояния первой фазы в [31, 32] записывалось как $\rho_e = AP$, где А – константа. В нашей работе будем применять произвольное уравнение состояния:

$$P = P(\rho_e). \tag{9}$$

из них по отдельности, а только от некоторой их комбинации. Если искать решение в виде $f(\omega t - k_x x - k_y x)$, то такой переменной является $\xi = k_x x + k_y y$. После соответствующих преобразований уравнения (12) – (15) имеют вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = (1-\alpha)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right),$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial \xi} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{(1-\alpha)\rho_s}\frac{\partial P}{\partial \xi},$$

$$u_1 = u_2 - \frac{\alpha}{\varphi} k^2 \frac{\partial P}{\partial \xi}.$$

где $u_1 = k_x u_{1x} + k_y u_{1y}$, $u_2 = k_x u_{2x} + k_y u_{2y}$. Они имеют смысл скоростей деформации первой и второй фазы соответственно. Поиск решения (20) в форме $f(\eta)$, где $\eta = \xi - u_{(0)} t$ приводит

$$((1-\alpha)(u_2 - u_{(0)}))' = 0,$$

$$-\rho_s u_2'((1-\alpha)(u_2 - u_{(0)})) = k^2 P'$$

$$-u_{(0)}\rho_1' + (\rho_1 u_1)' = 0, \tag{21}$$

$$u_1 = u_2 - \frac{\alpha}{\varphi} k^2 P'$$

Первые интегралы (21) имеют вид:

$$((1-\alpha)(u_2 - u_{(0)})) = \tilde{N}_1,$$

$$-C_1 \rho_s u_2 + C_2 = k^2 P, \tag{22}$$

$$\rho_1(u_1 - u_{(0)}) = C_3.$$

Решение (22) с учетом четвертого уравнения (21) и формулы (16) приводит к дифференциальному уравнению относительно скорости деформации второй фазы:

$$\frac{du_2}{d\eta} = \frac{K}{\rho_s}\frac{(u_2 - u_{(1)})(u_2 - u_{(2)})}{(u_2 - (u_{(0)} + C_1))}, \tag{23}$$

где $u_{(1)}, u_{(2)}$ – скорости деформации на границах очага локализации. При выводе (23) предполагалось, что уравнение состояния первой фазы имеет такой же вид, как и в [31, 32]. Интеграл (23) имеет вид:

$$\frac{\rho_s}{K}\left(\left(\frac{u_{(2)} - u_{(0)} - C_1}{u_{(1)} - u_{(2)}}\right)\ln(u_2 - u_{(2)}) - \left(\frac{u_{(1)} - u_{(0)} - C_1}{u_{(1)} - u_{(2)}}\right)\ln(u_2 - u_{(1)})\right) = \eta + C_4. \tag{24}$$

Таким образом, следует заключить, что, как и в одномерном случае, так и в двумерном фильтрационная модель допускает решение в виде «ударного перехода».

$$\Omega_{1,2} = 0,$$

$$\Omega_{3,4} = \frac{i\alpha_0 A_1 k^2}{2(\alpha_0 - 1)\rho_s K} \pm \frac{\sqrt{\left(4A_1\rho_0(1-\alpha_0)K^2 - A_1^2\alpha_0^4 k^2\right)}k}{2\rho_s\alpha_0(\alpha_0 - 1)K}. \quad (31)$$

Найдем критическое значение волнового числа и длины волны, при котором наступает неустойчивость стационарного состояния относительно малых возмущений. Для этого должно быть выполнено условие $Im(\Omega) > 0$, что достигается при отрицательном дискриминанте уравнения (31). Это возможно при

$$k > \frac{2K}{A_1\alpha_0^2}\left(A_1\rho_0(1-\alpha_0)\right)^{1/2}, \quad (32)$$

тогда критическая длина волны будет иметь вид:

$$\lambda_* = \frac{2\pi}{k_*} = \frac{\pi A_1\alpha_0^2}{K}\left(\frac{1}{A_1\rho_0(1-\alpha_0)}\right)^{1/2}. \quad (33)$$

При значении $\lambda < \lambda_*$ малые возмущения возрастают. Это означает, что представленная модель может описать самопроизвольный распад полос сдвига на фрагменты. Размеры фрагментов пропорциональны длине волны.

Оценим критическую длину волны на примере рельсовой стали. Коэффициент K в (33) определим, исходя из следующих соображений. Из (15), (16) следует, что размерность K составляет $с^{-1}$. Как уже говорилось выше, эта постоянная зависит от динамической вязкости первой фазы η_1. Тогда согласно [15] данный коэффициент имеет вид:

$$K = K_\mu \frac{\eta_1}{a^2}, \quad (34)$$

где a^2 – площадь соприкосновения блоков Коэффициент $K_\mu = 1/\rho_0$. В итоге получим

$$K = \frac{\eta_1}{\rho_0 a^2}. \quad (35)$$

С другой стороны, из определения динамической вязкости акустическими методами [35] получим:

$$K = \frac{A_1\rho_0}{\eta_1}. \quad (36)$$

Подстановка (36) в (33) приводит к следующему

$$\lambda_* = \frac{\pi\alpha_0^2\eta_1}{\rho_0}\left(\frac{1}{A_1\rho_0(1-\alpha_0)}\right)^{1/2}. \quad (37)$$

При $\alpha_0 = 0.1$, $\rho_0 = 7800$ кг/м^3, $\eta_1 = 10^5$ Па·с, $A_1 = 10^7$ м^2 /с^2 значение $\lambda_* \approx 1{,}41$ мкм. Размеры «белого слоя» и области локализации деформации, обнаруженные в [36, 37], имеют такой же порядок.

4. Выводы

1. Разработана двумерная двухфазная фильтрационная модель большой пластической деформации. Ее суть заключается в том, что взаимодействие материала,

[27] И.Г. Филиппов // *Прикладная механика* **7** (1971) 92.
[28] T.R. Tiersten, M.A. Jahanmir // *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **68** (1977) 153.
[29] M. Jahanmir, T.F. Tiersten // *International Journal of Solids and Structures* **14** (1978) 227.
[30] Я.Я. Рущицкий // *Прикладная механика* **29** (1993) 23.
[31] В.Д. Сарычев, В.А. Петрунин // *Известия вузов. Черная металлургия* **2** (1993) 29.
[32] V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, E.V. Cheremushkina, V.E. Gromov, E.C. Aifantis // *Journal of Mechanical Behavior of Materials* **23** (2014) 177.
[33] Х.А. Рахматулин // *Прикладная математика и механика* **20** (1956) 184.
[34] Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике* (Наука, Москва, 1968).
[35] В.А. Красильников, *Введение в акустику* (МГУ, Москва, 1992).
[36] W. Lojkowski, M. Djahanbakhsh, G. Bürkle, S. Gierlotka, W. Zielinski, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering: A* **303** (2001)197.
[37] S.Y. Tarasov, V.E. Rubtsov // *Physics of Solid State* **53** (2011) 358.

BIPHASE FILTRATIONAL MODEL OF FLOW MATERIALS AT SUPERPLASTIC DEFORMATION

V.D. Sarychev, S.A. Nevskii*, V.E. Gromov

Siberian State Industrial University, Kirov Street 42, Novokuznetsk, 654007, Russia

*e-mail: nevskiy.sergei@yandex.ru

Abstract. Considering plastically deformed material as a two-phase heterogeneous medium, the filtration model of plastic deformation has been proposed. The laws of momentum and mass conservation for each component, the equations of state, and boundary conditions are used for the model. The first component of the medium is treated as an elastic one, which is responsible for the structural transformations, and the second component is a plastic one, which is not associated with structural transformations. The filtration ratio between the phases has been found. The search for solutions in the form of a traveling wave has been performed. As a result of calculations, the solution in the form of "shock transition" and the speed limit of its propagation have been found. For traveling waves, the dispersion equation and the critical wavelength, at which instability takes place, have been determined.

Acknowledgements
The investigation was supported by the grant of Russian Scientific Foundation (No. project 15-12-00010).

References

[1] *Mathematical modeling from dislocation interactions to macroscopic deformation*, ed. by V.A. Starenchenko (Tomsk State Building and Architecture University, Tomsk, 2015).
[2] G.A. Malygin // *Physics-Uspekhi* **54** (2011) 1091.
[3] S.P. Kiselev // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **47** (2006) 857.

[4] J. Pontes, D. Walgraef, E.C. Aifantis // *International Journal of Plasticity* **22** (2006) 1486.
[5] G.F. Sarafanov, Y.G. Shondin // *Physics of the Solid State* **54** (2012) 2277.
[6] L.E. Popov, M.I. Slobodskoi, S.N. Kolupaeva // *Russian Physics Journal* **49** (2006) 57.
[7] D. Walgraef, E.C. Aifantis // *International Journal of Engineering Science* **59** (2012) 140.
[8] A.V. Butenko, P.P. Kaminskii, Yu.A. Khon // *Physical Mesomechanics* **7** (2004) 153
[9] P.P. Kaminskii, Yu.A. Khon, A.V. Butenko // *Physical Mesomechanics* **9** (2006) 25
[10] P.P. Kaminskii, Yu.A. Khon // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **51** (2009) 161.
[11] *Mathematical modeling of plastic deformation*, ed. by L.E. Popov (Tomsk University, Tomsk, 1990).
[12] V.E. Panin, Yu.V. Grinyaev, A.V. Panin // *Physical Mesomechanics* **10** (2007) 5
[13] N.V. Chertova, Yu.V. Grinyaev // *Physical Mesomechanics* **16** (2007) 34
[14] V.V. Kibitkin, A.I. Solodushkin, V.S. Pleshanov, N.V. Chertova // *Physical Mesomechanics* **17** (2014) 141.
[15] R.I. Nigmatulin. *Dynamics of Multiphase Media,* Vol.1. (Hemisphere, N.Y., 1990).
[16] S.P. Kiselev, G.A. Ruev, A.P. Trunev, V.M. Fomin, *Shock-wave processes in two-phase and two-component environments* (Nauka, Novosibirsk, 1992).
[17] S.Z. Dunin, D.N. Mikhailov, V.N. Nikolayevskii // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **70** (2006) 251.
[18] L.B. Zuev, V.I. Danilov, S.A. Barannikova, *Physics of macrolocalization plastic flow* (Nauka, Novosibirsk, 2008).
[19] L.B. Zuev, Yu.A. Khon, S.A. Barannikova // *Technical Physics* **55** (2010) 965.
[20] E.L. Aero, A.N. Bulygin // *Mechanics of Solids* **45** (2010) 670.
[21] E.L. Aero, A.L. Korzenevskii, A.N. Bulygin // *Materials Physics and Mechanics* **21** (2014) 230.
[22] V.I. Erofeev *Wave processes in solids with microstructure* (Moscow University, Moscow, 1999).
[23] A.E. Green, T.R. Steel // *International Journal of Engineering Science* **4** (1966) 483.
[24] Ya.Ya. Rushchitskii // *International Applied Mechanics* **33** (1997) 1.
[25] D. Ieşan // *Journal of Elasticity* **104** (2011) 369.
[26] D. Ieşan, R. Quintanilla // *Mechanics Research Communications* **48** (2013) 52.
[27] I.G. Filippov // *Soviet Applied Mechanics* **7** (1971) 1136.
[28] T.R. Tiersten, M.A. Jahanmir // *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **68** (1977) 153.
[29] M. Jahanmir, T.F. Tiersten // *International Journal of Solids and Structures* **14** (1978) 227.
[30] Ya. Ya. Rushchitskii // *International Applied Mechanics* **29** (1993) 267.
[31] V.D. Sarychev, V.A. Petrunin // *Izvestiya VUZ. Chernaya Metallurgia* **2** (1993) 29.
[32] V.D. Sarychev, S.A. Nevskii, E.V. Cheremushkina, V.E. Gromov, E.C. Aifantis // *Journal of Mechanical Behavior of Materials* **23** (2014) 177.
[33] Kh.A. Rakhmatulin // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **20** (1956) 184.
[34] B.L. Rozdestvenskii, N.N. Yanenko, *Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics* (Nauka, Moscow, 1968).
[35] V.A. Krasilnikov, *Introduction to acoustics* (Moscow University, Moscow, 1990).
[36] W. Lojkowski, M. Djahanbakhsh, G. Bürkle, S. Gierlotka, W. Zielinski, H.-J. Fecht // *Materials Science and Engineering: A* **303** (2001)197.
[37] S.Y. Tarasov, V.E. Rubtsov // *Physics of Solid State* **53** (2011) 358.