

# ПРОВЕРКА ПОСТУЛАТА ИЗОТРОПИИ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА СЛОЖНЫХ ГЛАДКИХ ТРАЕКТОРИЯХ

В.Г. Зубчанинов<sup>1</sup>, А.А. Алексеев<sup>1\*</sup>, Е.Г. Алексеева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Тверской государственной технической университет,  
наб. Афанасия Никитина 22, Тверь, 170026, Россия

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, Москва, 105005, Россия

\*e-mail: alexeew@bk.ru

**Аннотация.** Представлены результаты численного моделирования деформирования стали 45 с использованием общей и линеаризованной моделей теории процессов по плоским гладким траекториям с криволинейными участками. Результаты расчетов сопоставлены с данными экспериментов по деформированию тонкостенных цилиндрических образцов на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ. Показано, что для реализованных типов экспериментальных траекторий, симметричных относительно биссектрисы прямого угла, постулат изотропии А.А. Ильюшина выполняется достаточно хорошо.

## 1. Введение

Оценка достоверности и определение границ применимости существующих математических моделей теории пластичности невозможна без систематических экспериментальных исследований. При деформировании конструкционных материалов по плоским многозвенным прямолинейным и криволинейным траекториям выполнено достаточно большое количество экспериментальных исследований [1-5]. Постулат изотропии А.А. Ильюшина [6-7] как одно из основных положений теории процессов, опытно проверялся многими исследователями для различных материалов на разных траекториях [8-11]. Однако, после предварительного сложного упругопластического деформирования на первом участке траектории таких исследований было произведено немного. Поэтому, основной задачей в работе являлась проверка достоверности постулата изотропии А.А. Ильюшина, а также обоснование достоверности математических моделей теории процессов упругопластического деформирования В.Г. Зубчанинова [1] для рассматриваемых типов двухзвенных траекторий.

## 2. Основные соотношения и уравнения

В теории процессов упругопластического деформирования материалов для трехпараметрических плоских задач основные определяющие соотношения между векторами напряжений  $\bar{\sigma}$  и деформаций  $\bar{\epsilon}$  формоизменения имеют вид [1, 2]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \quad (1)$$

где  $s$  – длина дуги траектории деформирования;

$$\hat{\sigma} = \cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 (\cos \vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin \vartheta_2 \hat{p}_3) \quad (2)$$

– единичный вектор напряжений,  $\vartheta_m$  ( $m=1, 2$ ) – его угловые координаты в сопровождающем репере Френе  $\{\hat{p}_k\}$  ( $k=1, 2, 3$ ), для которых

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\bar{\mathcal{E}}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2} \left[ \kappa_1 \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{d^2\bar{\mathcal{E}}}{ds^2} \right) \right]; \quad (3)$$

$$M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \quad (4)$$

$M_1, M_3$  – функционалы процесса деформирования, которые должны зависеть от параметров сложного нагружения;  $\kappa_m$  ( $m=1, 2$ ) – параметры кривизны и кручения траектории деформирования.

Для определения углов сближения  $\vartheta_1$  и депланации  $\vartheta_2$  имеют место дифференциально нелинейные уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos \vartheta_2 = \frac{1}{\sigma} (-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2), \\ \sin \vartheta_1 \left( \frac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2 \right) = \kappa_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2. \end{cases} \quad (5)$$

Определяющие соотношения (1), (5) для случая плоских траекторий ( $\vartheta_2 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0$ ) с соответствующими начальными условиями для каждого аналитического участка траектории деформирования приводятся к системе уравнений задачи Коши, которая в скалярной форме имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{ds} = M_1 \frac{d\mathcal{E}_k}{ds} + M \frac{S_k}{\sigma}, \quad (k=1, 3), \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (6)$$

где  $S_k$  и  $\mathcal{E}_k$  – компоненты (координаты) векторов  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\mathcal{E}}$  соответственно. Для решения системы уравнений (6) в работе использовался численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

**Общая модель теории процессов.** В общей математической модели используются уравнения (6) и аппроксимации функционалов, предложенные на основе анализа многочисленных экспериментальных данных при сложном нагружении В.Г. Зубчаниновым [1, 2]

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q e^{-\gamma_1 \Delta s}, \quad M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1, \quad (7)$$

$$\sigma = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s), \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} + Af_0^p \frac{d\Omega}{ds}, \quad (8)$$

где  $G, G_p$  – упругий и пластический модули сдвига материала;  $G_p^0$  – значение  $G_p$  в точке излома траектории;  $p, q, \gamma, \gamma_1, b, A$  – экспериментально определяемые из базовых опытов материальные параметры материала;  $\Phi(s)$  – универсальная функция упрочнения Одквиста-Ильюшина для процессов, близких к простым;

$$\Omega(\Delta s) = -[\gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s})] \quad (9)$$

– функция, описывающая скалярный нырок модуля вектора напряжений после излома траектории деформирования;

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}; \quad f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2} \quad (10)$$

– функция, учитывающая отклонение вектора  $\bar{\sigma}$  на угол  $\vartheta_1$  от касательной к траектории деформирования и ее значение в точке излома траектории при значении угла сближения  $\vartheta_1^0$  для неаналитических траекторий.

**Линеаризованная модель.** В линеаризованном варианте [1, 12-13] модели для плоских траекторий предполагается, что угол сближения  $\vartheta_1$  мал, то есть  $\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1$ ,  $\cos \vartheta_1 \approx 1$ , и для его вычисления из (6) следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -n\vartheta_1, \quad (11)$$

в котором для активных процессов деформирования ( $0 < \vartheta_1 < 90^\circ$ ) принималось

$$n(s) = \frac{M_1}{\sigma} \approx \frac{\alpha_1 2G}{\sigma_k^T} = k, \quad (12)$$

где  $\alpha_1$  – постоянный коэффициент в пределах изменения  $0 < \alpha < 1$ ;  $\sigma_k^T$  – величина модуля вектора напряжений в точке излома траектории;  $k$  – постоянная величина. Коэффициент  $\alpha_1$  в теории средних кривизн В.И. Малого [1] принимается равным  $\alpha_1 = 0,68$ . Решение уравнения (11) приводит к выражению

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + (\vartheta_1^0 - \vartheta_1^*) e^{-k\Delta s}, \quad (13)$$

где  $\vartheta_1^* = -\kappa_1 / k$ . При плавном переходе от участка траектории с постоянной кривизной к другому участку с измененной кривизной, у угла  $\vartheta_1$  наблюдается нырок, подобный тому, который имеет место при изломе траектории. Например, при переходе к прямолинейному участку при  $s = s_*$  в линеаризованной модели получено [12]

$$\vartheta_1 = \frac{s_*}{s} \vartheta_1^* e^{-k\Delta s}. \quad (14)$$

Проведение теоретических расчетов по упрощенной модели позволяет оценить достоверность линеаризации в теории процессов и пределы ее применимости.

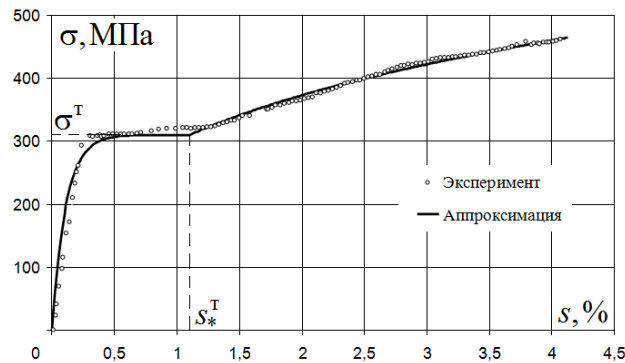
### 3. Результаты экспериментальных исследований и расчетов при численном моделировании

Экспериментальные исследования выполнялись на расчетно-экспериментальном комплексе СМ-ЭВМ имени А.А.Ильюшина в лаборатории кафедры «Сопrotивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета при деформировании тонкостенных цилиндрических образцов. На рис. 1 представлена опытная диаграмма растяжения материала сталь 45 с площадкой текучести, а также ее аппроксимация, положенная в основу численных расчетов. Опытные данные отмечены кружочками. При построении аппроксимации диаграммы простого нагружения использовались формулы

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} [1 - e^{-\alpha s}], & \text{при } 0 \leq s \leq s_*^T, \\ \sigma^T + 2G_* \Delta s + \sigma_* [1 - e^{-\beta \Delta s}], & \text{при } s > s_*^T, \end{cases} \quad (15)$$

где  $\Delta s = s - s_*^T$ ,  $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$ ,  $\sigma_T$  – физический предел текучести,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_*$ ,  $G_*$  – материальные параметры. Для стали 45 было получено  $\sigma^T = 310$  МПа,  $s_*^T = 1,1 \cdot 10^{-2}$ ,

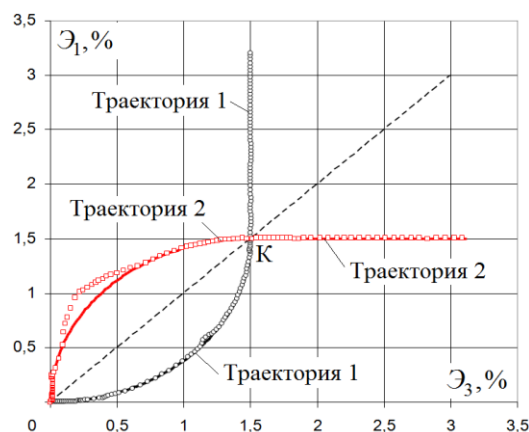
$2G = 1,57 \cdot 10^5$  МПа,  $\beta = 70$ ,  $\alpha = 900$ ,  $\sigma_* = 82$  МПа,  $2G_* = 2700$  МПа. Материал с достаточной степенью точности обладал начальной изотропией, что было подтверждено результатами базовых опытов по типу центрального веера на образцах из той же партии.



**Рис. 1.** Аппроксимация диаграммы деформирования.

При углах  $\vartheta_1^0 > 90^\circ$  образуется скалярный нырок длины вектора напряжений, на котором  $\sigma(s)$  значительно отличается от универсального закона упрочнения Одквиста-Ильюшина  $\sigma = \Phi(s)$ . В этом случае, используется аппроксимация (8). При углах  $\vartheta_1^0 \leq 90^\circ$  функция (15) дает достаточно хорошие результаты.

Для верификации описанных выше математических моделей и проверке постулата изотропии А.А. Ильюшина на траекториях с предварительным сложным пластическим деформированием на участке постоянной кривизны рассмотрена траектория в пространстве деформаций  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ , состоящая из двух участков, и ее зеркальное отражение относительно прямой, равнонаклоненной к осям  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_3$  (рис. 2).



**Рис. 2.** Траектории деформирования.

Исходная траектория деформирования (траектория 1, на рис. 2 обозначена черным цветом) на первом участке представляет собой четверть окружности радиусом  $\rho = 1,5\%$  на которой осуществлялось совместное растяжение с кручением образца до точки К. Затем, плавно и без излома, траектория переходит на второй прямолинейный участок, где реализовывалось растяжение по компоненте  $\mathcal{E}_1$ . В точке К стыка первого и второго участков траектории изменяется ее кривизна. В отраженной траектории деформирования (траектория 2, на рис. 2 обозначена красным цветом) на первом

участке также реализовывалось совместное растяжение с кручением до точки К, на втором участке – только кручение по компоненте  $\mathcal{E}_3$ . По определению А.А. Ильюшина [7] эти траектории являются гладкими, так как на них отсутствуют точки излома, но функции  $\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}(s)$ , описывающие траектории в линейном пространстве, имеют только первые непрерывные производные, а вторые претерпевают разрыв.

В расчетах по обеим траекториям принимались равные значения параметров аппроксимаций функционалов пластичности. На первом участке:  $q = 0.1$ ,  $\gamma_1 = 25$ ; на втором участке:  $q = 0.3$ ,  $\gamma_1 = \gamma = 150$ ,  $p = 4$ ,  $b = 0.35$ . На первом участке из (10) при  $\mathcal{E}_1^0 = 0$  следует  $f_0 = 0$ , тогда из (8) имеем  $\sigma = \Phi(s)$ ,  $d\sigma/ds = d\Phi/ds$ . В расчете по линеаризованной модели принято  $\alpha_1 = 0.7$ ,  $k = 280$ , углы сближения задавались по приближенным формулам (13)-(14), в частности на первом участке по (13), где при  $\kappa_1 = 1/\rho = 66,67$  имеем  $\mathcal{E}_1^* \approx 0,236$  рад;  $\mathcal{E}_1^0 = 0$ . На рис. 3–7 приведены результаты численных расчетов и опытные данные для исходной траектории (номер 1 на рис. 2), а на рис. 8–12 приведены расчетные результаты и опытные данные для отраженной траектории деформирования (номер 2 на рис. 2). Опытные данные отмечены точками: для траектории 1 – кружочки черного цвета; для траектории 2 – квадратики красного цвета. Кривые 1 (синим цветом) соответствуют расчетным данным по общей математической модели теории процессов, кривые 2 (черным цветом) – линеаризованной модели. Точками К на рисунках отмечены точки стыка участков траектории деформирования при переходе от криволинейных участков к прямолинейным. Расчетные и опытные результаты приводятся в представлении деформаций и напряжений через компоненты соответствующих векторов по А.А. Ильюшину [1-2, 6-7].

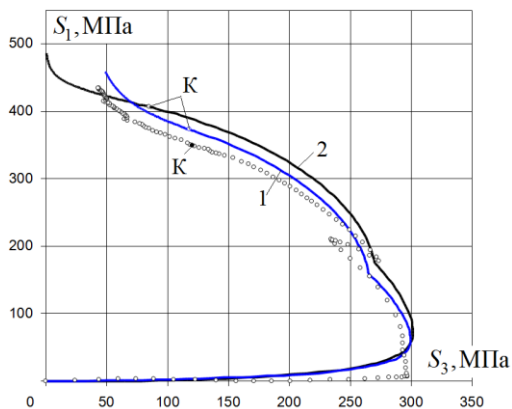


Рис. 3. Траектория 1. Отклик  $S_1 - S_3$ .

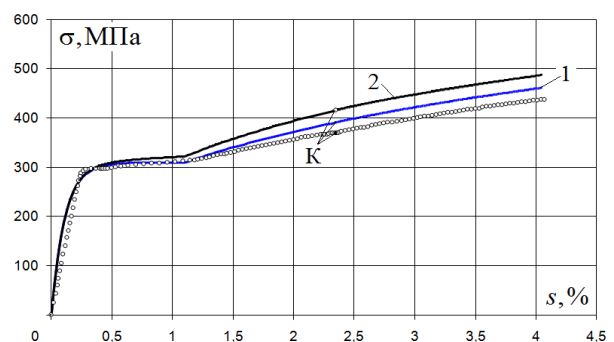


Рис. 4. Траектория 1. Диаграмма деформирования  $\sigma - s$ .

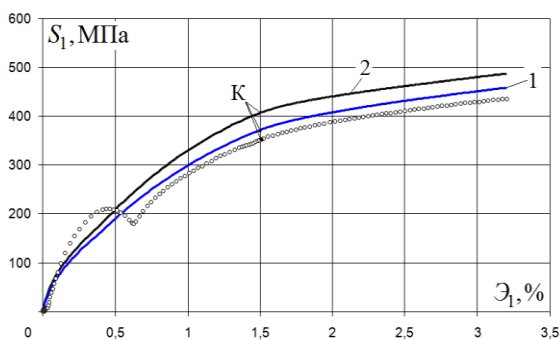


Рис. 5. Траектория 1. Диаграмма  $S_1 - \mathcal{E}_1$ .

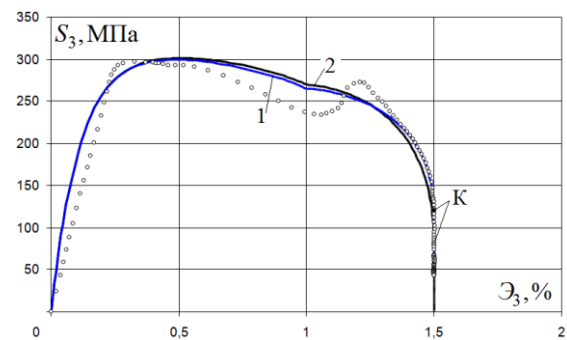


Рис. 6. Траектория 1. Диаграмма  $S_3 - \mathcal{E}_3$ .

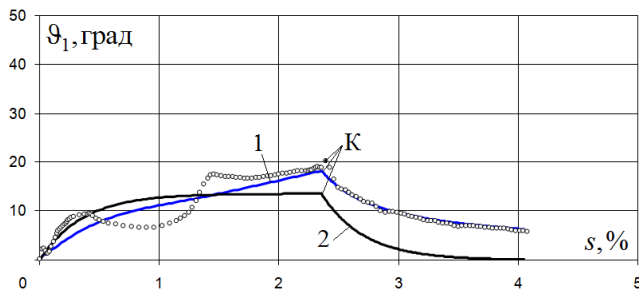


Рис. 7. Траектория 1. Диаграмма  $\vartheta_1 - s$ .

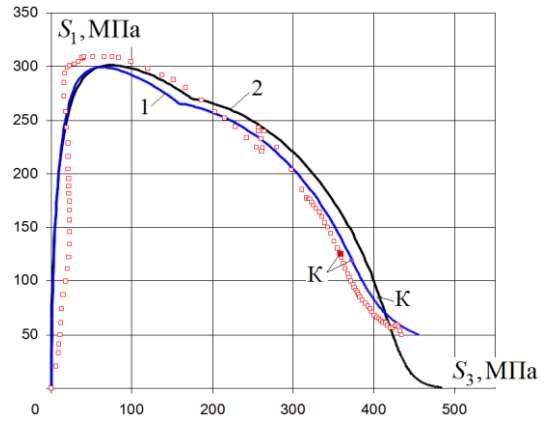


Рис. 8. Траектория 2. Отклик  $S_1 - S_3$ .

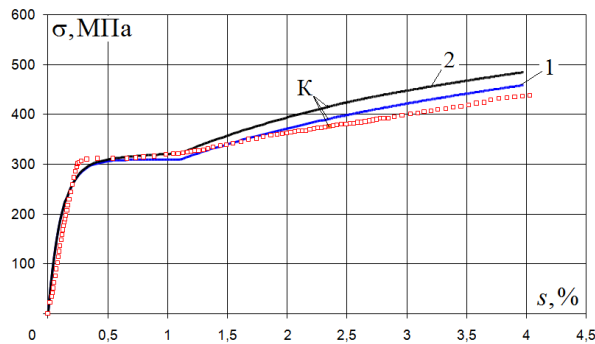


Рис. 9. Траектория 2. Диаграмма деформирования  $\sigma - s$ .

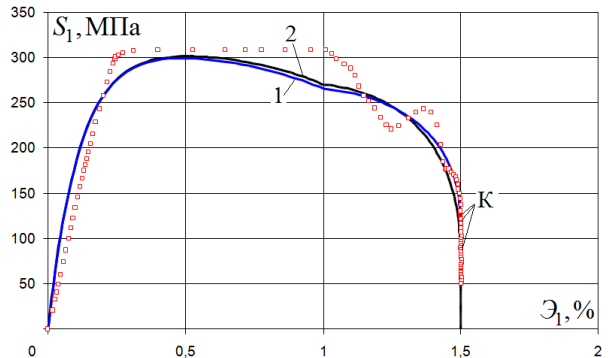


Рис. 10. Траектория 2. Диаграмма  $S_1 - \varepsilon_1$ .

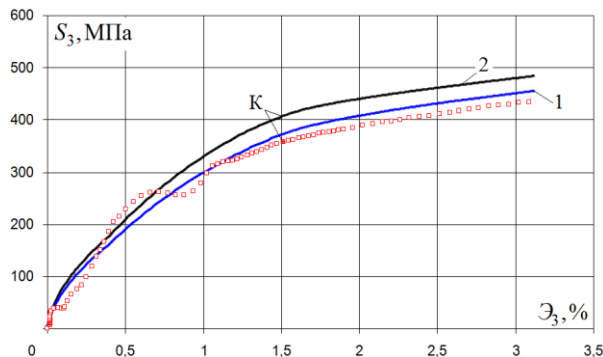


Рис. 11. Траектория 2. Диаграмма  $S_3 - \varepsilon_3$ .

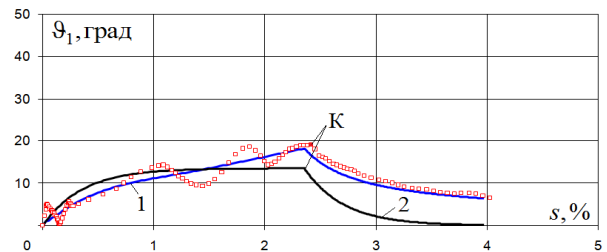
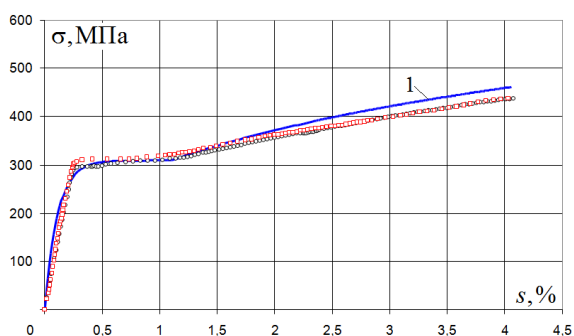


Рис. 12. Траектория 2. Диаграмма  $\vartheta_1 - s$ .

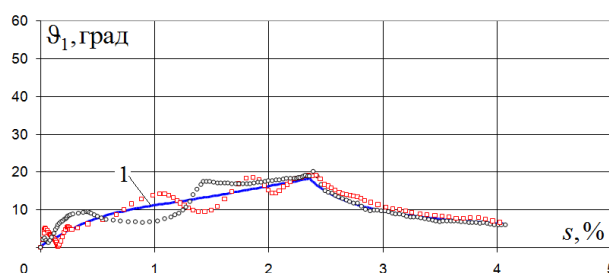
Полученные по общей модели расчетные диаграммы  $\sigma - s$  (кривые 1 на рис. 4, 9) и  $\vartheta_1 - s$  (кривые 1 на рис. 7, 12), отвечающие за скалярные и векторные свойства материала соответственно, достаточно хорошо согласуются с опытными данными. При этом, резкое изменение кривизны траектории в точке К при переходе от криволинейного участка к прямолинейному сказалось на величине  $\vartheta_1$ , равносильно излому траектории. Также наблюдается хорошее соответствие результатов расчета по общей модели с опытными данными по отклику в пространстве напряжений  $S_1 - S_3$  (рис. 3, 8) и локальным диаграммам деформирования растяжения-сжатия  $S_1 - \varepsilon_1$  (рис. 5, 10) и кручения  $S_3 - \varepsilon_3$  (рис. 6, 11). На основании этого можно сделать вывод, что общая математическая модель В.Г. Зубчанинова дает достоверные результаты при описании закономерностей поведения материала для рассмотренных типов плоских гладких траекторий.

Расчеты по линеаризованной модели (кривые 2 на рис. 7, 12) дают большие отклонения по векторным свойствам. Между тем линеаризованная модель также дает удовлетворительные результаты для траекторий данного типа, поскольку на них реализуется активный процесс деформирования ( $0 < \vartheta_1 < 90^\circ$ ), а параметр сложности процесса  $\vartheta_1^0 < 90^\circ$ .

Для проверки выполнения постулата изотропии А.А. Ильюшина на рассмотренных выше траекториях построены совмещенные диаграммы  $\sigma-s$  и  $\vartheta_1-s$ , которые представлены на рис. 13-14. На этих рисунках приведены расчетные траектории только для общей математической модели В.Г. Зубчанинова, лучше соответствующей опытным данным.



**Рис. 13.** Траектории 1 и 2. Диаграммы деформирования  $\sigma-s$ .



**Рис. 14.** Траектории 1 и 2. Диаграммы  $\vartheta_1-s$ .

Как видно из рисунков 13-14, экспериментальные диаграммы исходной и зеркально отраженной траекторий деформирования совпадают друг с другом с достаточной степенью точности. Отсутствие гладкости и некоторое расхождение экспериментальных диаграмм  $\vartheta_1-s$  на первых участках траекторий деформирования (см. рис. 14) можно объяснить некоторым отклонением экспериментальных траекторий от реализуемых программ теоретических дуг окружности, а также влиянием сложного деформирования, реализуемого на площадке текучести. Таким образом, можно считать, что для данных типов сложных двухзвенных гладких траекторий при предварительном сложном упругопластическом деформировании на участке постоянной кривизны, постулат изотропии выполняется как по скалярным, так и векторным свойствам.

## Литература

- [1] В.Г. Зубчанинов, *Механика процессов пластических сред* (Физматлит, Москва, 2010).
- [2] В.Г. Зубчанинов, *Устойчивость и пластичность. Т.2. Пластичность* (Физматлит, Москва, 2008).
- [3] В.П. Дегтярев, *Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций* (Машиностроение, Москва, 1967).
- [4] Ф.М. Митенков, И.А. Волков, Л.А. Игумнов, А.В. Каплиенко, Ю.Г. Коротких, В.А. Панов, *Прикладная теория пластичности* (Физматлит, Москва, 2015).
- [5] В.В. Москвитин, *Пластичность при переменных нагрузениях* (Издательство МГУ, Москва, 1965).
- [6] А.А. Ильюшин, *Пластичность. Основы общей математической теории* (Издательство АН СССР, Москва, 1963).
- [7] А.А. Ильюшин, *Труды (1946-1966). Т.2 Пластичность* (Физматлит, Москва, 2004).
- [8] В.С. Ленский, В кн: *Вопросы теории пластичности* (Изд-во АН СССР, 1961), с. 58.
- [9] Ю.Н. Шевченко, Н.Н. Тормахов // *Прикладная механика* **35** (1999) 17.

- [10] В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультяев // *Вестник ПНИПУ. Механика* **3** (2014) 71.
- [11] В.Г. Зубчанинов // *Известия РАН. МТТ* **21** (2011) 27.
- [12] В.Г. Зубчанинов // *Проблемы прочности и пластичности* **67** (2005) 5.
- [13] В.Г. Зубчанинов, Е.Г. Алексеева // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния* **8** (2010) 172.

## VERIFICATION OF THE POSTULATE OF THE ISOTROPY AND NUMERICAL SIMULATION OF THE DEFORMATION OF MATERIALS ON A COMPLEX SMOOTH TRAJECTORIES

В.Г. Зубчанинов<sup>1</sup>, А.А. Алексеев<sup>1\*</sup>, Е.Г. Алексеева<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Tver State Technical University, nab. Afanasiya Nikitina 22, Tver, 170026, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, ul. Baumanskaya 2-ya, 5/1, Moscow, 105005, Russia

\*e-mail: alexeew@bk.ru

**Abstract.** The article presents the results of numerical modeling of deformation of steel 45 using general and linearized models of the theory of processes on flat smooth trajectories with curvilinear sections. The calculation results are compared with experimental data on the deformation of thin-walled cylindrical specimens on using the SN-EVM testing system. It is shown that for the implemented types of experimental trajectories, symmetric about the bisectors of angle, the postulate of isotropy by A.A. Ilyushin performed quite well.

### References

- [1] V.G. Zubchaninov, *Mechanics of processes of plastic environments* (Fizmatlit, Moscow, 2010). (In Russian).
- [2] V.G. Zubchaninov, *Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity* (Fizmatlit, Moscow, 2008). (In Russian).
- [3] V.P. Degtyarev, *Plasticity and creep of engineering structures* (Mashinostroenie, Moscow, 1967). (In Russian).
- [4] F.M. Mitenkov, I.A. Volkov, L.A. Igumnov, A.V. Kapliencko, Yu.G. Korotkih, V.A. Panov, *Applied theory of plasticity* (Fizmatlit, Moscow, 2015). (In Russian).
- [5] V.V. Moskvitin, *Plasticity at variable loadings* (Izdatelstvo MGU, Moscow, 1965). (In Russian).
- [6] A.A. Ilyushin, *Plasticity: Fundamentals of the general mathematical theory* (Izdatelstvo AN USSR, Moscow, 1963). (In Russian).
- [7] A.A. Ilyushin, *Proceedings (1946-1966). Vol. 2 Plasticity* (Fizmatlit, Moscow, 2004). (In Russian).
- [8] V.S. Lenskij, In: *Questions of the theory of plasticity* (Izdatelstvo AN USSR, 1961), p. 58. (In Russian).
- [9] Yu.N. Shevchenko, N.N. Tormahov // *International Applied Mechanics* **35** (1999) 13.
- [10] V.G. Zubchaninov, A.A. Alekseev, V.I. Gul'tyaev // *PNRPU Mechanics Bulletin* **3** (2014) 71.
- [11] V.G. Zubchaninov // *Mechanics of Solids* **46** (2011) 21.
- [12] V.G. Zubchaninov // *Problems of Strength and Plasticity* **67** (2005) 5.
- [13] V.G. Zubchaninov, E.G. Alekseeva // *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state* **8** (2010) 172. (In Russian).