

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ПАПКОВ СТАНИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ В ЗАДАЧАХ
КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Севастополь – 2019

Работа выполнена в Институте информационных технологий и управления в технических системах ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Официальные оппоненты: **Фролов Максим Евгеньевич,**

доктор физико-математических наук, доцент, директор Института прикладной математики и механики, зав. кафедрой «Прикладная математика», ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Радаев Юрий Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории «Моделирования в механике деформируемого твердого тела», ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН», г. Москва

Лукьянов Валерий Дмитриевич,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий учебным центром НПО «Авангард» г. Санкт-Петербург

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет» (ЮФУ), г. Ростов-на-Дону

Защита состоится «___» _____ 2019 г. в ____:____ на заседании диссертационного совета Д002.075.01 при Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук и на сайте института по адресу <http://www.ipme.ru>

Автореферат разослан «___» _____ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д002.075.01
доктор технических наук,
профессор

Владимир Васильевич Дубаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. На сегодняшний день появилось достаточно большое количество практически значимых задач в авиа- и машиностроении, в микро- и наноэлектронике, которые требуют анализа колебаний и динамической устойчивости элементов конструкций на средних и высоких частотах. К таким задачам можно отнести как исследование элементов конструкций на прочность при ударных нагрузках, при высокочастотных колебаниях, анализ динамической устойчивости, анализ влияния упругих колебаний в полупроводниковых пластинах в электронике. Как известно, метод конечных элементов (МКЭ) является общепринятым и универсальным инструментом в структурном анализе сложных конструкций. МКЭ основывается на дискретизации структуры на малые элементы, на которых динамические характеристики выражаются через аппроксимирующие функции. Как следствие, при увеличении частоты колебаний увеличивается и количество аппроксимирующих элементов, что приводит к тому, что в некоторых отраслях, таких как машиностроение и авиастроение, использование МКЭ практически ограничено диапазоном низких частот. В связи с этим, для моделирования механических структур в области средних и высоких частот разрабатываются методы, основанные как на методах теории вероятностей (например, Statistical Energy Analysis method), так и на использовании точных решений применительно к отдельным элементам структуры (Continuous Element method, Spectral Element method, Dynamic Stiffness method или DSM). В частности, для анализа колебаний и устойчивости ансамблей пластин эффективно себя зарекомендовал DSM. Данный метод, используя точные решения теории упругости для шарнирно-опертой пластины, позволяет получить значения собственных частот ансамбля пластин в широком частотном диапазоне. Однако для иных форм граничных условий пластин точное решение уравнения колебаний отсутствует, что существенно сужает область применимости такого подхода.

Преодоление данного ограничения связано с новыми аналитическими решениями для динамических элементов, то есть с разработкой подхода к решению задач колебания и устойчивости для тел полигонального сечения, дающего возможность описать поведение динамического элемента в любом требуемом диапазоне частот. В этом контексте новые решения для структурных элементов дают возможность к более эффективному по времени анализу практически значимых задач, в том числе и на основе метода спектральной динамической жесткости.

Обобщение метода спектральной динамической жесткости на ансамбли пластин с произвольными граничными условиями открывает возможность для его приложения к исследованию задач динамической устойчивости. В частности, в задачах панельного флаттера, система собственных форм колебаний панели в вакууме, построенная на основе DSM, может служить в качестве базиса для метода Бубнова – Галеркина, что позволяет провести анализ динамической устойчивости для нового класса задач.

Степень разработанности темы исследования.

Точные решения задач о колебаниях и устойчивости в механике твердого тела встречаются достаточно редко. Практически большинство известных решений были получены еще на этапе становления теории упругости и играют на сегодняшний день роль эталона, с которым сверяются численные и аналитико-численные методы. Вопросам построения эффективных аналитических решений для пластин, которые не имеют заделки в виде шарнирного опирания, посвящено большое количество исследований. Дискуссия о возможности построения точных решений продолжается до сих пор. Так, например, в работах Yufeng Xing и Bo Li предлагается спорный метод «dual separation of variables», которым авторы строят замкнутое аналитическое решение задачи о колебаниях полностью защемленной прямоугольной пластины. В статье X. Liu и J.R. Banerjee делается вывод о невозможности построения аналитического решения для пластин, не имеющих шарнирно опертых краев.

Приближенное решение в аналитической форме обычно строится на основе вариационного подхода. Заметим, что при возрастании частоты колебаний приходится увеличивать и число базисных функций, вовлекаемых в решение, в итоге порядок системы линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов достаточно быстро возрастает. При анализе отдельной пластины данная трудность легко преодолима, однако, использование подобных решений для описания структурного элемента в рамках практически любого из вышеперечисленных методов (например, DSM) оказывается неэффективным. В этой связи возникает потребность в получении новых аналитических решений, которые смогли бы обеспечить требуемый компромисс между точностью решения для элемента и эффективностью численной реализации при расчете ансамбля пластин.

В частности, в недавних работах Nefovska-Danilovich M. и Petronijevic M. представлено развитие DSM для элементов в форме прямоугольных пластин, где для этих целей используется метод суперпозиции, предложенный D.J. Gorman.

Однако при использовании данного подхода ряды, представляющие решения, усекаются, следовательно, с возрастанием частоты колебаний приходится удерживать большее число членов ряда. Таким образом, возникает та же проблема, что и при использовании вариационного подхода. Одним из путей к преодолению данной проблемы лежит в исследовании асимптотического поведения коэффициентов рядов, представляющих искомое решение. В таком случае получается фактически точное решение с инженерной точки зрения в любом диапазоне частот. С математической точки зрения данное решение можно рассматривать как асимптотически точное. Построение таких асимптотик связано с исследованием поведения решений соответствующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений при неограниченном возрастании номера.

Для упругих тел полигонального сечения, в частности параллелепипеда, задачи колебания в трехмерной постановке не имеют эффективного аналитического решения в случае первой и второй основных краевых задач. Построение новых аналитических решений для данных объектов представляет безусловный интерес, как с точки зрения эталонных решений, так и при описании структурного элемента.

Цели и задачи.

Цель диссертации – разработка эффективного метода для анализа колебаний и устойчивости пластин и их ансамблей при произвольных граничных условиях на основе новых асимптотически точных решений для структурного элемента.

Эта цель предполагает решение следующих задач:

- Разработка DSM для анализа ансамблей пластин в случае, когда на сторонах элементов структуры заданы граничные условия защемления, шарнирного - опирания или свободного края.
- Построение новых аналитических решений для структурных элементов.
- Развитие новых аспектов теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которая позволяла бы эффективно строить новые аналитические решения.
- Анализ особенностей напряжений, возникающих при подходе к внешним и внутренним угловым точкам.
- Разработка метода определения с гарантированной точностью собственных частот колебаний тел.
- Построение решения задачи о панельном флаттере защемленной пластины.
- Построение эффективного аналитического решения задачи о колебаниях упругого параллелепипеда в трехмерной постановке.

Научная новизна.

Впервые получены новые аналитические решения для ряда задач колебания и устойчивости пластин, прямоугольного параллелепипеда в трехмерной постановке. Рассмотрены случаи практически важных краевых условий, в частности, для ортотропных пластин анализируются случаи полностью свободного края и полностью защемленного края. Решения указанных задач сводятся к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении. Используя авторское обобщение закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича, для неизвестных в бесконечных системах находятся степенные асимптотики, которые позволяют найти всю последовательность неизвестных коэффициентов и получить асимптотически точное решение краевой задачи.

Используя полученные решения для задачи колебания пластин, строится спектральная матрица жесткости, связывающая значения граничных усилий и смещений пластины. Данный результат получен впервые для произвольных граничных условий. На основе матрицы жесткости элемента в виде отдельной пластины, строится алгоритм их объединения в общую DSM матрицу ансамбля пластин. Таким образом, построен новый метод спектральной динамической жесткости, подобный к DSM, эффективность которого численно подтверждена на примере ряда задач для пластин полигонального сечения.

Сформулирован и доказан достаточный признак существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы, который позволяет с высокой точностью найти значение собственного значения (собственной частоты или критической силы) без численного решения бесконечной системы. Данный признак позволяет впервые достоверно найти собственные частоты колебания для пластин со свободным и защемленным краем, в том числе и при гибких колебаниях.

В задаче о флаттере прямоугольной ортотропной панели в сверхзвуковом потоке газа впервые предлагается использовать в качестве базисных функций метода Бубнова - Галеркина новые аналитические представления собственных форм колебаний прямоугольной ортотропной пластины в вакууме. Представлен алгоритм определения критического значения параметра скорости, форм потери динамической устойчивости. Исследуется сходимость метода Бубнова – Галеркина при варьировании параметров задачи. Представлены примеры численной реализации, анализируется влияние ортотропии материала и планарных усилий.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные с использованием новых результатов из теории бесконечных систем аналитические решения задач теории упругости для продольных и поперечных колебаний пластин, бруса с сечением в виде крестообразной области, прямоугольного параллелепипеда имеют самостоятельное теоретическое значение, так как данные решения впервые дают возможность для эффективного анализа соответствующих краевых задач. Решения этих задач имеют также и самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что высокочастотные колебания перечисленных выше объектов встречаются в различных прикладных задачах технического характера. В частности, пластинки прямоугольной формы представляют особый интерес в микро- и наноэлектронике, в задачах строительной механики, при моделировании технических систем, в геофизике и др. Данные решения могут быть использованы для параметрической оптимизации, для анализа устойчивости к вибрации технических систем.

Развитая в работе асимптотическая теория квазирегулярных бесконечных систем линейных уравнений допускает применение также и во многих смежных дисциплинах (например, механика жидкости, гидроакустика, радиотехника) при анализе и решении краевых задач, которые до сих пор имели лишь приближенное или численное решение.

Предложенный новый аналитико-численный метод спектральной динамической жесткости (DSM) дает возможность для эффективного анализа колебания и устойчивости ансамблей пластин. Данный метод, прежде всего, будет востребован при моделировании сложных технических систем в таких отраслях как авиастроение, автомобилестроение.

Методология и методы исследования.

При решении поставленных задач использовались методы механики деформируемого твердого тела, в частности метод суперпозиции. При помощи данного метода краевые задачи колебания и устойчивости для пластин, брусьев и прямоугольного параллелепипеда сводились к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов в общем решении, которое *a priori* удовлетворяет разрешающим дифференциальным уравнениям. Для построения эффективного алгоритма отыскания собственных чисел краевых задач (собственных частот колебаний или критических нагрузок) и соответствующих им нетривиальных решений однородных бесконечных систем, была разработана соответствующая теория для квазирегулярных бесконечных систем. При помощи построенного достаточного признака существования ограниченного решения для квазирегулярных

бесконечных систем во всех рассмотренных случаях находятся собственные числа. Признак оказывается достаточно эффективным для определения собственных значений с наперед заданной точностью без численного решения бесконечной системы. Предложенное обобщение закона асимптотических выражений Б.М. Кояловича позволяет найти для рассматриваемых задач степенную асимптотику нетривиального решения бесконечной системы и, как следствие, в любом диапазоне частот удастся получить замкнутое аналитическое представление собственных форм. При этом использовались методы математического анализа и асимптотические разложения для улучшения сходимости рядов.

Полученные решения для отдельных пластин использовались для разработки DSM при произвольных граничных условиях на основе методов структурной механики и теории пластин. Алгоритм объединения локальных матриц жесткости в единую структуру осуществлялся на основе методов матричной алгебры.

Положения, выносимые на защиту.

На защиту выносится новый спектральный метод динамической жесткости, который позволяет исследовать задачи колебания и устойчивости ансамблей пластин при произвольных граничных условиях, методика построения спектральной матрицы жесткости, ее анализ и эффективная редукция, алгоритм стыковки отдельных элементов в единую структуру.

На защиту также выносится общий подход к отысканию аналитических решений ряда краевых задач, описывающих задачи колебания и устойчивости пластин, брусьев полигонального сечения и прямоугольного параллелепипеда в трехмерной постановке.

В частности, в диссертации впервые представлены новые аналитические (асимптотически точные) решения в случае

- гибких (свободных) поперечных колебаний защемленной (свободной) ортотропной прямоугольной пластины;
- планарных колебаний в случае обобщенного напряженного состояния защемленной или полностью свободной ортотропной прямоугольной пластины;
- вынужденных установившихся колебаний параллелепипеда под действием приложенных к его граням нормальных нагрузок в трехмерной постановке.

Представленные в диссертации задачи сводились при помощи метода суперпозиции к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, для которых не было подходящей теории для эффективного решения. Поэтому на

защиту выносятся ряд теоретических результатов из теории бесконечных систем, разработанных для решения поставленных выше задач теории упругости. В частности, выносятся достаточный признак существования ненулевого предела у решения бесконечной системы, позволяющий находить степенные асимптотики неизвестных коэффициентов рядов, представляющих силовые и кинематические характеристики. Также выносятся на защиту признак существования ограниченного решения у квазирегулярной бесконечной системы, позволяющий без численного решения бесконечной системы находить собственные частоты колебаний и критические силы в исследуемых задачах.

На защиту выносятся исследование динамической устойчивости прямоугольной защемленной ортотропной пластины на основе метода Бубнова – Галеркина, качественные зависимости о влиянии материала панели и планарных нагрузок на критическую скорость.

Закономерности деформирования и свободных колебаний ряда составных пластин, прямоугольного параллелепипеда при механическом нагружении. Анализ спектра собственных частот данных тел. Аналитическое описание особенностей напряжений в окрестностях внутренних угловых точек, устранение особенностей в представлении решения в окрестности внешних угловых точек.

Достоверность результатов обусловлена строгостью постановки задач, построением аналитических решений в рамках сформулированных моделей. Строгим математическим доказательством представленных новых теорем из теории бесконечных систем, строгим анализом полученных бесконечных систем и их решений. Результаты исследований на эталонных примерах сверялись как с известными в литературе результатами, так и проверялись на достоверность и эффективность в сравнении с численными методами.

Апробация результатов исследования

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых зарубежных и отечественных научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК России [1]-[23]. Результаты подтверждаются также публикациями в научных сборниках и трудах конференций [24]-[42]. Все результаты, которые выносятся на защиту, были получены автором диссертации самостоятельно. Данные результаты, включая математические постановки и решения задач, разработанную теорию бесконечных систем линейных уравнений и алгоритм DSM при произвольных граничных условиях, представлены в перечисленных выше публикациях.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международной научной конференции «Dynamical system modelling and stability

investigation» (May, 2005. Kiev, Kiev University), на IV межд. науч. конф. «Актуальные проблемы механики твердого деформируемого тела» (2006. Донецк: ДонНУ), на восьмой и десятой Крымской международной математической школе (2006 г., 2010 г., Симферополь: ТНУ), на международных научных конференциях «Прикладные задачи математики и механики» XV – XXV (Севастополь, СевНТУ, СевГУ 2007 – 2017 гг.), на акустических симпозиумах «Консонанс-2007», «Консонанс-2009» (Киев, Институт гидромеханики), на XIV межд. конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (2010 г., Ростов-на-Дону), на международной научной конференции «Моделирование, управление и устойчивость (MCS)» (Крым, Севастополь, 10-14 сентября, 2012), на международной научной конференции «Advances in Computational&Experimental Engineering and Sciences (ICES 2012)» (Crete, Greece), на международной научной конференции «Twelfth Int. Conf. on Computational Structures Technology» (Stirlingshire, Scotland. 2014). Обсуждались на семинаре отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (2011 г.). В 2013 году основные положения по применению аналитических решений теории пластин к разработке DSM были обсуждены на научном семинаре кафедры структурной динамики (Cardiff University). Выносимые на защиту результаты также обсуждались на научном семинаре под руководством профессора J.R. Banerjee, директора центра аэроавтики School of Engineering and Mathematical Sciences at City University London (2014 г.). В 2016 г. основные результаты работы были представлены на Городском семинаре по механике ИПМаш РАН (г. Санкт-Петербург).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель исследования, положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость, представлена структура диссертации.

В первой главе подробно проанализированы литературные данные, посвященные исследованию вопросов, связанных с построением аналитических решений в теории тонких пластин, в задачах установившихся колебаний упругих прямоугольных брусьев. Описаны основные классические и современные подходы к построению точных решений для прямоугольных пластин. Дано краткое описание метода суперпозиции. Проанализированы возможности и ограничения указанных подходов к построению аналитических решений,

показана необходимость построения эффективной асимптотической теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Дается описание Dynamic Stiffness Method в случае анализа поперечных колебаний ансамблей прямоугольных пластин с шарнирной заделкой. Описаны его преимущества и недостатки в сравнении с другими подходами.

Представлена постановка основных задач и обоснован выбор объектов исследования. Выбрано основное направление исследований: построение асимптотически точных решений задач колебания и устойчивости тонких прямоугольных пластин с целью обобщения метода спектральной динамической жесткости на случай произвольных граничных условий.

Вторая глава посвящена развитию теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В частности, в п. 2.2. данной главы на основе теории лимитант Б.М. Кояловича формулируется и доказывается достаточный признак существования ненулевого предела у единственного ограниченного решения бесконечной системы. Представленная в диссертации теория значительно расширяет возможности асимптотического анализа решений бесконечных систем, так как, во-первых, позволяет рассматривать системы с произвольной неотрицательной матрицей, во-вторых, находить при помощи замены переменных степенную асимптотику решения.

В частности, исследуется бесконечная система уравнений с неотрицательными коэффициентами и свободными членами, записанная в форме

$$x_m^i = \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{ij} x_n^j + b_m^i, \quad (m=1,2,3,\dots; i=1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

Элементарный блок бесконечной матрицы $A_{mn} = \{a_{mn}^{ij}\}_1^s$ - символическая матрица порядка s . Если $A_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & a_{mn}^{12} \\ a_{mn}^{21} & 0 \end{pmatrix}$, где $a_{mn}^{ij} > 0$, то для исследования асимптотических свойств решения бесконечной системы (1) можно применить признак в известной формулировке для парной системы, для других случаев результаты отсутствуют.

Условия регулярности для системы (1) имеет вид

$$\sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{ij} = 1 - \varphi_m^i < 1, \quad (m=1,2,3,\dots; i=1,2,\dots,s) \quad (2)$$

Далее предполагается, что у рассматриваемой бесконечной системы существует единственное ограниченное решение. При практическом применении,

единственность ограниченного решения может быть доказана при помощи замены переменных сведением системы к вполне регулярной системе.

Оговорим расположение нулевых элементов в матрице A_{mn} , исключая случай расщепления системы на несколько независимых систем. Для этого потребуем, чтобы направленный граф матрицы A_{mn} был сильно связан. Действительно, в этом случае для любого множества строк $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ($1 \leq k \leq s-1$) матрицы A_{mn} существует $a_{mn}^{ij} \neq 0$ при $i \in I_k, j \notin I_k$.

Теорема 2.7. (Обобщение закона асимптотических выражений).

Если в каждой i -ой строке матрицы A_{mn} все ненулевые элементы допускают оценку при $n < m$:

$$lr_n^i \leq a_{mn}^{ij} \xi_m^i \leq Lr_n^i, \quad (L \geq l > 0, j \in \Omega(i)), \quad (3)$$

где $\Omega(i)$ - множество номеров столбцов ненулевых элементов i -ой строки A_{mn} ; а последовательности ξ_m^i и r_n^i таковы, что

$$\exists P > 0: b_m^i \xi_m^i \leq P, \varphi_m^i \xi_m^i \leq P \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N r_n^i \right)^{-1} = 0; \quad \xi_m^i = O\left(\sum_{n=1}^{m-1} r_n^i \right), \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда существует общий ненулевой предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^i = G > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Следствие. Бесконечная система (1), удовлетворяющая условиям теоремы 2.7, не является вполне регулярной, то есть

$$\lim_{m \rightarrow 0} \varphi_m^i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (4)$$

Заметим, что главное отличие представленного обобщения закона асимптотических выражений от предыдущих результатов заключается в том, что введенные в условие теоремы 2.7 последовательности r_n^i впервые дают возможность приводить путем замены переменной бесконечные системы произвольного вида к виду, подходящему под условия предлагаемой теоремы. Таким образом, появляется возможность для определения асимптотики решения бесконечной системы. В последующих разделах диссертации этот прием применяется для исследования степенных асимптотик квазирегулярных бесконечных систем, возникающих в задачах динамики упругого тела.

В п. 2.3 впервые формулируются и доказываются достаточные условия существования ограниченного решения квазирегулярной бесконечной системы, математически строго доказываются достаточные условия существования тривиального решения у однородной квазирегулярной системы. Из данной теоремы следует утверждение:

Следствие. Квазирегулярная однородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} x_n, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

для которой регулярная часть уравнений удовлетворяет условиям вполне регулярности:

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{kn}| = 1 - \theta < 1, \quad (k = N_R + 1, N_R + 2, \dots) \quad (6)$$

будет иметь единственное тривиальное решение $x_k \equiv 0$, если при некотором номере N существует обратная матрица $\{\sigma_{k,n}\}_{k,n=1}^N$ к матрице $\{\delta_{kn} - c_{kn}\}_{k,n=1}^N \neq 0$ и справедлива оценка:

$$T_N = 1 - \max_{j=1..N} \sum_{i=1}^N |\sigma_{ji}| \left(S_i - \sum_{n=1}^N |c_{in}| \right) + \inf_{k>N} \frac{1 - \vartheta - S_k}{\sum_{n=1}^N |c_{kn}|} > 0, \quad (7)$$

где $0 < \vartheta < \theta$.

Представленное следствие из теоремы 2.8 используется в последующих главах диссертации для локализации собственных значений краевых задач (собственных частот колебаний и критических сил) на основе проверки критерия (7). Заметим, что с практической точки зрения, реализация вычислений согласно (7), сводится к аналитическому суммированию рядов в условиях регулярности (6) и обращению конечной матрицы порядка N .

Третья глава посвящена построению новых аналитических решений для прямоугольной пластины $\{(x, y) \in [-a; a] \times [-b; b]\}$ толщины h в двух случаях граничных условий – полностью заземленных краев и полностью свободных краев. Уравнение установившихся сложных колебаний пластины в приближении классической теории Кирхгофа - Лява может быть записано относительно прогиба пластины $w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - D_1 \Omega^4 W = 0 \quad (8)$$

где $\Omega = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \rho h}{D_1}}$ - безразмерный частотный параметр, ρ - плотность материала, ω -

круговая частота; $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$; $D_2 = \frac{\nu_{21} E_1 h^3}{12 \nu_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21})}$;

$$D_3 = D_{12} + 2D_{66}; \quad D_{66} = \frac{Gh^3}{12}; \quad D_{12} = \nu_{12} D_2.$$

В случае анализа устойчивости пластины, инерциальный член уравнения (8) полагается равным нулю $\Omega = 0$ и задача сводится к нахождению критических значений нагрузок N_x и N_y , при которых возможны положения равновесия, отличные от начального. При $N_x = N_y = 0$ уравнение (8) описывает свободные колебания пластины.

Общее решение уравнения (8) может быть представлено в виде суммы четных и нечетных составляющих по каждой из координат

$$W = \sum_{k,j=0}^1 W_{kj} \quad (9)$$

где W_{00} является четной по обеим координатам, W_{01} - четная по x и нечетная по y , и т.п.

Используя стандартную технику разделения переменных, общее решение уравнения колебаний (8) для каждого случая симметрии может быть записано в форме суммы двух рядов Фурье с неопределенными коэффициентами

$$W_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk}y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk}y)) T_k(\alpha_{nk}x) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj}x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj}x)) T_j(\beta_{nj}y)$$

где тригонометрические и гиперболические функции обозначены как

$$T_j(z) = \begin{cases} \cos z, & j = 0 \\ \sin z, & j = 1 \end{cases}; \quad H_j(z) = \begin{cases} \text{ch } z, & j = 0 \\ \text{sh } z, & j = 1 \end{cases}.$$

Константы разделения выбираются в форме, обеспечивающей полноту решения на границе пластины для каждого случая симметрии

$$\alpha_{nj} = \frac{\pi}{a} \left(n - 1 + \frac{j}{2} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{\pi}{b} \left(n - 1 + \frac{j}{2} \right), \quad (10)$$

Величины p_{nk}, \bar{p}_{nk} и q_{hj}, \bar{q}_{hj} являются корнями следующих характеристических уравнений

$$D_2 p^4 + (N_y - 2D_3 \alpha^2) p^2 + D_1 \alpha^4 - N_x \alpha^2 - D_1 \Omega^4 = 0,$$

$$D_1 q^4 + (N_x - 2D_3 \beta^2) q^2 + D_2 \beta^4 - N_y \beta^2 - D_1 \Omega^4 = 0,$$

которые легко выражаются аналитически.

Таким образом, в зависимости от типа симметрии, предлагается комбинированная система тригонометрических функций $T_k(\alpha_{nk}x)$ и $T_j(\beta_{nj}y)$, допускающая единообразные выкладки, в силу совпадения разложений гиперболических функций по предложенному тригонометрическому базису

$$\frac{H_k(qx)}{H'_k(qa)} = \frac{q}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (2 - \delta_{k0} \delta_{1m})}{\alpha_{mk}^2 + q^2} T_k(\alpha_{mk}x),$$

что дает возможность для сведения данных задач к квазирегулярным бесконечным системам.

Так в п. 3.1 исследуются колебания ортотропной пластины со свободными краями в различных случаях симметрии решения. Подстановка общего решения (8) в краевые условия

$$M_x(\pm a, y) = V_x(\pm a, y) = M_y(x, \pm b) = V_y(x, \pm b) = 0$$

позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для пластины со свободными краями:

$$\begin{aligned} Y_m^f &= \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{2a \Delta_m^3 \sqrt{D_1 D_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2) \beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} X_n^f; \\ X_m^f &= \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{2b \Delta_m^7 \sqrt{D_1 D_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4D_{66}^2 + D_1 D_2 - D_3^2) \beta_{nj}^2 \alpha_{mk}^2 + D_{12} D_1 \Omega^4}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} Y_n^f; \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (11)$$

где δ_{mn} - символ Кронекера,

$$A_n = \frac{(-1)^n b \sqrt{D_1} (D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)}{2D_2 p_{nk} H'_j(p_{nk} b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n^f; \quad B_n = \frac{(-1)^{n+1} b \sqrt{D_1} (D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2)}{2D_2 \bar{p}_{nk} H'_j(\bar{p}_{nk} b) (\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} X_n^f$$

$$C_n = \frac{(-1)^n a \sqrt{D_2} (D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)}{2D_1 q_{nj} H'_k(q_{nj} a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n^f; \quad D_n = \frac{(-1)^{n+1} a \sqrt{D_2} (D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2)}{2D_1 \bar{q}_{nj} H'_k(\bar{q}_{nj} a) (\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} Y_n^f,$$

$$\begin{aligned} \Delta_m^3 &= \frac{H_k(q_{mj} a)}{H'_k(q_{mj} a)} \cdot \frac{(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 q_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2)}{2D_1 q_{mj} (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} - \\ &= \frac{H_k(\bar{q}_{mj} a)}{H'_k(\bar{q}_{mj} a)} \cdot \frac{(D_1 q_{mj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{mj}^2)(D_1 \bar{q}_{mj}^2 - D_{12} \beta_{mj}^2)}{2D_1 \bar{q}_{mj} (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)}; \end{aligned}$$

$$\Delta_m^7 = \frac{H_j(p_{mk}b)}{H'_j(p_{mk}b)} \cdot \frac{(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2 p_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2)}{2D_2 p_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} - \frac{H_j(\bar{p}_{mk}b)}{H'_j(\bar{p}_{mk}b)} \cdot \frac{(D_2 p_{mk}^2 - (D_3 + 2D_{66})\alpha_{mk}^2)(D_2 \bar{p}_{mk}^2 - D_{12}\alpha_{mk}^2)}{2D_2 \bar{p}_{mk}(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)},$$

Анализ регулярности системы (11), основанный на аналитическом сворачивании рядов, показывает, что четные и нечетные суммы стремятся к одному и тому же постоянному пределу

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \frac{D_1 D_2 - D_{12}^2 - 4D_{66} D_{12}}{D_1 D_2 - D_{12}^2 + 4D_{66} \sqrt{D_1 D_2}} = \theta < 1.$$

То есть всегда найдется номер N_R , начиная с которого ряды в условиях регулярности становятся меньше единицы, следовательно, система (11) является квазирегулярной. На рис. 1 показана зависимость данного номера от частоты колебаний квадратной изотропной пластины при $\nu = 0.225$. Можно заметить, что на графике есть интервалы изменения Ω , для которых $N_R = 0$. Это означает, система (12) является здесь вполне регулярной, то есть согласно теории бесконечных систем имеет единственное нулевое решение. Такой предварительный анализ позволяет сразу заключить, что собственная частота колебаний может быть расположена на интервале [1.84; 2.23]. Приведенные рассуждения равносильны проверке условия (7) для системы (12) при $N = 0$. Увеличением параметра N удастся сузить интервал настолько, что с некоторой точностью получаем значение собственной частоты. Следующая таблица демонстрирует вычисление первой собственной частоты для квадратной пластины при $\nu = 0.225$, значение которой в литературе дается как $\Omega_1 = 1.878$.

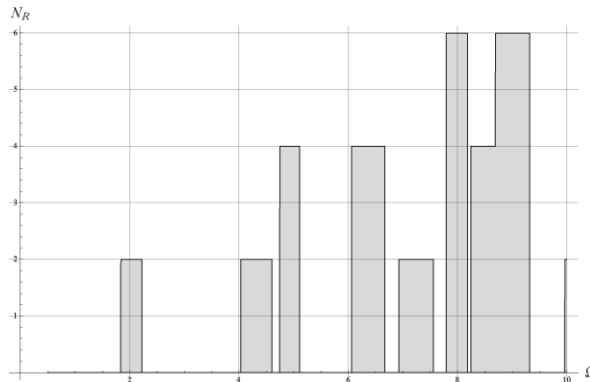


Рис. 1 Зависимость $N_R(\Omega)$ для квадратной изотропной пластины со свободными краями при $\nu = 0.225$

Таблица 1. Проверка условия $T_N(\Omega) > 0$ для изотропной пластины при $\nu = 0.225$, $a/b = 1$

| N | 1 | 5 | 25 |
|----------------------------------|---------------|-----------------|-----------------|
| Интервал для собственной частоты | 1.877 – 1.880 | 1.8780 – 1.8793 | 1.8783 – 1.8788 |

Как можно заметить, уже при $N = 1$ удается найти значение собственной частоты с удовлетворительной точностью. Представленный пример показывает, что увеличением значения N можно сделать оценки настолько близкими, что в значении собственной частоты оказываются совпадающими первые значащие цифры, что дает возможность найти ее значение с требуемой точностью.

После определения собственных значений задачи, приложение достаточного признака существования ненулевого предела у ограниченного решения полученных бесконечных систем (теорема 2.7) позволяет найти асимптотики нетривиальных решений (12) на найденной собственной частоте колебаний

$$Y_m^f = \frac{KD_1^{\frac{\lambda+1}{2}}}{\beta_{mj}^{2+\lambda}}; \quad X_m^f = \frac{KD_2^{\frac{\lambda+1}{2}}}{\alpha_{mk}^{2+\lambda}} \quad (m \rightarrow \infty),$$

где для показателя степени получено следующее уравнение

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{D_1D_2}}{\sqrt{\sqrt{D_1D_2} - D_3}} \cdot \frac{D_1D_2 - D_{12}^2 - 4D_{66}D_{12}}{D_1D_2 - D_{12}^2 + 4D_{66}\sqrt{D_1D_2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda+1}{2} \arctg \sqrt{\frac{D_1D_2}{D_3^2} - 1}\right)}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} = 1,$$

имеющее при $\lambda \in [0;1)$ единственное решение.

Таким образом, строится эффективный алгоритм определения всех коэффициентов тригонометрических рядов, представляющих решение задачи.

На основе полученных результатов, исследуются собственные частоты колебаний и собственные формы пластины (фигуры Хладни) в зависимости от упругих свойств материала.

В п.3.2. представлено решение задачи о колебаниях ортотропной прямоугольной пластины с заземленными краями. Все результаты, полученные в п. 3.1, остаются верными: собственные числа задачи – собственные частоты колебаний и критические силы, находятся согласно выведенному во втором разделе признаку, а собственные формы колебаний находятся с использованием асимптотики соответствующей бесконечной системы:

$$\begin{aligned}
Y_m^c &= \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{2a \Delta_m^2 D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^c}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} \\
X_m^c &= \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{2b \Delta_m^6 D_2} \frac{2}{\Delta_m^6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^c}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)}
\end{aligned} \tag{12}$$

где $Y_m^c = \frac{1}{a} (-1)^m D_m H_k(\bar{q}_{mj} a) (\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)$; $X_m^c = \frac{1}{b} (-1)^m B_m H_j(\bar{p}_{mk} b) (\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)$

$$\Delta_m^2 = \frac{1}{2D_1(\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2)} \left(q_{mj} \frac{H'_k(q_{mj} a)}{H_k(q_{mj} a)} - \bar{q}_{mj} \frac{H'_k(\bar{q}_{mj} a)}{H_k(\bar{q}_{mj} a)} \right);$$

$$\Delta_m^6 = \frac{1}{2D_2(\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2)} \left(p_{mk} \frac{H'_j(p_{mk} b)}{H_j(p_{mk} b)} - \bar{p}_{mk} \frac{H'_j(\bar{p}_{mk} b)}{H_j(\bar{p}_{mk} b)} \right).$$

Для нетривиального решения однородной квазирегулярной бесконечной системы (12) выполняется следующий асимптотический закон:

$$Y_m^c = Z_{\infty}; \quad X_m^c = Z_{\infty} \quad (m \rightarrow \infty) \tag{13}$$

Следующий п.3.3 посвящен решению задачи об устойчивости ортотропной пластины. Проводится параметрическое исследование собственных частот и критических сил пластины. Анализируются собственные формы в зависимости от геометрии задачи и упругих констант.

Таким образом, получены асимптотически точные решения для колебаний ортотропной прямоугольной пластины в случае полностью свободных и полностью защемленных краев пластины:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{k,j=0}^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_j(p_{nk} y)}{p_{nk} H'_j(p_{nk} b)} \left[\left(D_2 \bar{p}_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2 \right) \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} \right] - \right. \\
&- \left. \frac{H_j(\bar{p}_{nk} y)}{\bar{p}_{nk} H'_j(\bar{p}_{nk} b)} \left[\left(D_2 p_{nk}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \alpha_{nk}^2 \right) \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} + \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} \right] \right\} \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{D_2(\bar{p}_{nk}^2 - p_{nk}^2)} + \\
&+ \left\{ \frac{H_k(q_{nj} x)}{q_{nj} H'_j(q_{nj} a)} \left[\left(D_1 \bar{q}_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2 \right) \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \right] - \right. \\
&- \left. \frac{H_k(\bar{q}_{nj} x)}{\bar{q}_{nj} H'_j(\bar{q}_{nj} a)} \left[\left(D_1 q_{nj}^2 - (D_3 + 2D_{66}) \beta_{nj}^2 \right) \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} + \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} \right] \right\} \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{D_1(\bar{q}_{nj}^2 - q_{nj}^2)} \tag{14}
\end{aligned}$$

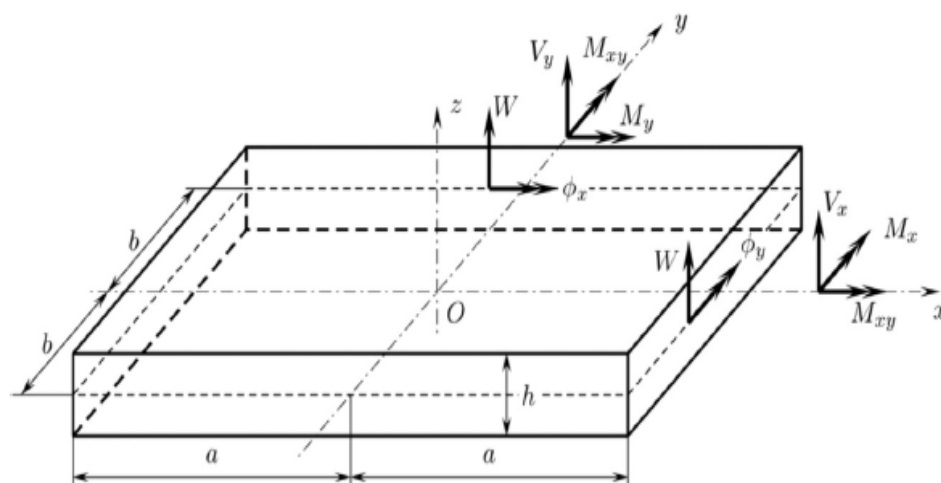


Рис. 2. Структурный элемент в виде прямоугольной пластины

Заметим, что неопределенные коэффициенты в общем решении оказываются выраженными через граничные значения силовых и кинематических характеристик элемента

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} &= b\sqrt{D_1} X_n^f; & \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} &= a\sqrt{D_2} Y_n^f \\ \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} &= -bX_n^c; & \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} &= aY_n^c. \end{aligned}$$

В четвертой главе диссертации разработан метод спектральной динамической жесткости для анализа поперечных колебаний ансамбля прямоугольных пластин в случае произвольной комбинации классических граничных условий. Ключевым моментом в реализации данного метода является использование построенных в третьей главе диссертации асимптотически точных решений теории тонких пластин. В п. 4.1 описывается постановка задачи в общем случае, строится зависимость между коэффициентами разложения по тригонометрической системе функций кинематических граничных характеристик элемента (граничных значений прогиба и углов поворота) и силовых характеристик (моментов и опорных реакций).

$$d = \begin{bmatrix} W_1 \\ \phi_1 \\ W_2 \\ \phi_2 \\ W_3 \\ \phi_3 \\ W_4 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} W_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ \phi_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ W_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ \phi_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ W_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ \phi_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ W_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ \phi_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad f = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} V_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ M_{an}^{+k} T_k(\beta_{nk} y) \\ V_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ M_{bn}^{+k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ V_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ M_{an}^{-k} T_k(\beta_{nk} y) \\ V_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \\ M_{bn}^{-k} T_k(\alpha_{nk} x) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Данная зависимость записывается в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, связывающей указанные коэффициенты:

$$\begin{aligned} & \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{bD_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(D_2 \beta_{mj}^2 + D_{12} \alpha_{nk}^2) \phi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \Delta_m^1 \phi_{am}^{kj} + \Delta_m^2 V_{am}^{kj} = W_{am}^{kj} \\ & \frac{2 - \delta_{j0} \delta_{1m}}{bD_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{((D_3^2 - 4D_{66}^2 - D_1 D_2) \beta_{mj}^2 \alpha_{nk}^2 - D_1 D \Omega^4) \phi_{bn}^{kj} - (D_{12} \beta_{mj}^2 + D_1 \alpha_{nk}^2) V_{bn}^{kj}}{(\alpha_{nk}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nk}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} + \\ & + \Delta_m^3 \phi_{am}^{kj} + \Delta_m^4 V_{am}^{kj} = -M_{am}^{kj} \\ & \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{aD_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(D_1 \alpha_{mk}^2 + D_{12} \beta_{nj}^2) \phi_{bn}^{kj} + V_{bn}^{kj}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \Delta_m^5 \phi_{bm}^{kj} + \Delta_m^6 V_{bm}^{kj} = W_{bm}^{kj} \\ & \frac{2 - \delta_{k0} \delta_{1m}}{aD_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{((D_3^2 - 4D_{66}^2 - D_1 D_2) \beta_{nj}^2 \alpha_{mk}^2 - D_1 D \Omega^4) \phi_{an}^{kj} - (D_{12} \alpha_{mk}^2 + D_2 \beta_{nj}^2) V_{an}^{kj}}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} + \\ & + \Delta_m^7 \phi_{bm}^{kj} + \Delta_m^8 V_{bm}^{kj} = -M_{bm}^{kj} \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{bn}^{+k} - (-1)^j \phi_{bn}^{-k}}{2} &= \phi_{bn}^{kj}, & \frac{\phi_{an}^{+j} - (-1)^k \phi_{an}^{-j}}{2} &= \phi_{an}^{kj}, & \frac{W_{bn}^{+k} + (-1)^j W_{bn}^{-k}}{2} &= W_{bn}^{kj}, & \frac{W_{an}^{+j} + (-1)^k W_{an}^{-j}}{2} &= W_{an}^{kj} \\ \frac{V_{bn}^{+k} - (-1)^j V_{bn}^{-k}}{2} &= V_{bn}^{kj}, & \frac{V_{an}^{+j} - (-1)^k V_{an}^{-j}}{2} &= V_{an}^{kj}, & \frac{M_{bn}^{+k} + (-1)^j M_{bn}^{-k}}{2} &= M_{bn}^{kj}, & \frac{M_{an}^{+j} + (-1)^k M_{an}^{-j}}{2} &= M_{an}^{kj} \end{aligned}$$

При этом, входящие в нее блоки бесконечных матриц оказываются в точности теми, что уже проанализированы в случае пластин с защемленными или свободными краями. Это позволяет в п.4.2 на основе известных асимптотик построить явную зависимость между граничными кинематическими характеристиками и граничными силовыми характеристиками, т.е. получить спектральную динамическую матрицу жесткости элемента

$$f_S^{ki} = \mathbf{K}^{kj} d_S^{kj},$$

где для каждого типа симметрии (k, j) \mathbf{K}^{kj} - спектральные динамические матрицы

$$\text{жесткости; } f_S^{ki} = -D \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a^{kj} \\ \mathbf{V}_b^{kj} \\ \mathbf{M}_a^{kj} \\ \mathbf{M}_b^{kj} \end{bmatrix}; d_S^{ki} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_a^{kj} \\ \mathbf{W}_b^{kj} \\ \boldsymbol{\Phi}_a^{kj} \\ \boldsymbol{\Phi}_b^{kj} \end{bmatrix} - \text{последовательности коэффициентов Фурье}$$

граничных усилий и смещений соответственно, при записи которых принято

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_a^{kj} &= \{\delta_{k0}W_{a0}, W_{a1}, \dots, W_{am}, \dots\}^T, & \mathbf{W}_b^{kj} &= \{\delta_{j0}W_{b0}, W_{b1}, \dots, W_{bm}, \dots\}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_a^{kj} &= \{\delta_{k0}\phi_{a0}, \phi_{a1}, \dots, \phi_{am}, \dots\}^T, & \boldsymbol{\Phi}_b^{kj} &= \{\delta_{j0}\phi_{b0}, \phi_{b1}, \dots, \phi_{bm}, \dots\}^T \\ \mathbf{V}_a^{kj} &= \{\delta_{k0}V_{a0}, V_{a1}, \dots, V_{am}, \dots\}^T, & \mathbf{V}_b^{kj} &= \{\delta_{j0}V_{b0}, V_{b1}, \dots, V_{bm}, \dots\}^T \\ \mathbf{M}_a^{kj} &= \{\delta_{k0}M_{a0}, M_{a1}, \dots, M_{am}, \dots\}^T, & \mathbf{M}_b^{kj} &= \{\delta_{j0}M_{b0}, M_{b1}, \dots, M_{bm}, \dots\}^T \end{aligned}$$

Векторы граничных смещений d^{kj} и усилий f^{kj} для каждого типа симметрии (k, j) , связанные посредством матриц \mathbf{K}^{kj} , позволяют записать граничные смещения и усилия на сторонах пластины следующим образом

$$d = \begin{bmatrix} W_1^0 + W_1^1 \\ \phi_1^0 + \phi_1^1 \\ W_2^0 + W_2^1 \\ \phi_2^0 + \phi_2^1 \\ W_3^0 + W_3^1 \\ \phi_3^0 + \phi_3^1 \\ W_4^0 + W_4^1 \\ \phi_4^0 + \phi_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_a^{00} + W_a^{01} + W_a^{10} + W_a^{11} \\ \phi_a^{00} + \phi_a^{01} + \phi_a^{10} + \phi_a^{11} \\ W_b^{00} + W_b^{01} + W_b^{10} + W_b^{11} \\ \phi_b^{00} + \phi_b^{01} + \phi_b^{10} + \phi_b^{11} \\ W_a^{00} + W_a^{01} - W_a^{10} - W_a^{11} \\ -\phi_a^{00} - \phi_a^{01} + \phi_a^{10} + \phi_a^{11} \\ W_b^{00} - W_b^{01} + W_b^{10} - W_b^{11} \\ -\phi_b^{00} + \phi_b^{01} - \phi_b^{10} + \phi_b^{11} \end{bmatrix} \text{ и } f = \begin{bmatrix} V_1^0 + V_1^1 \\ M_1^0 + M_1^1 \\ V_2^0 + V_2^1 \\ M_2^0 + M_2^1 \\ V_3^0 + V_3^1 \\ M_3^0 + M_3^1 \\ V_4^0 + V_4^1 \\ M_4^0 + M_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a^{00} + V_a^{01} + V_a^{10} + V_a^{11} \\ M_a^{00} + M_a^{01} + M_a^{10} + M_a^{11} \\ V_b^{00} + V_b^{01} + V_b^{10} + V_b^{11} \\ M_b^{00} + M_b^{01} + M_b^{10} + M_b^{11} \\ V_a^{00} + V_a^{01} - V_a^{10} - V_a^{11} \\ -M_a^{00} - M_a^{01} + M_a^{10} + M_a^{11} \\ V_b^{00} - V_b^{01} + V_b^{10} - V_b^{11} \\ -M_b^{00} + M_b^{01} - M_b^{10} + M_b^{11} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Из равенств (17) можно выразить смещения на двух противоположных сторонах пластины через значения смещений d^{kj} . Так на сторонах $x = \pm a$ получаем:

$$[W_1^0, W_1^1, W_3^0, W_3^1]^T = \mathbf{T}_1 [W_a^{00}, W_a^{01}, W_a^{10}, W_a^{11}]^T, [\phi_1^0, \phi_1^1, \phi_3^0, \phi_3^1]^T = \mathbf{T}_3 [\phi_a^{00}, \phi_a^{01}, \phi_a^{10}, \phi_a^{11}]^T \quad (18)$$

и на сторонах $y = \pm b$:

$$[W_2^0, W_2^1, W_4^0, W_4^1]^T = \mathbf{T}_2 [W_b^{00}, W_b^{01}, W_b^{10}, W_b^{11}]^T, [\phi_2^0, \phi_2^1, \phi_4^0, \phi_4^1]^T = \mathbf{T}_4 [\phi_b^{00}, \phi_b^{01}, \phi_b^{10}, \phi_b^{11}]^T \quad (19)$$

где матрицы перехода \mathbf{T}_j имеют вид:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы перехода обладают свойством

$$\mathbf{T}_j^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_j^T,$$

формулы (18), (19) допускают простое обращение, например

$$[W_a^{00}, W_a^{01}, W_a^{10}, W_a^{11}]^T = \frac{1}{2} \mathbf{T}_1^T [W_1^0, W_1^1, W_3^0, W_3^1]^T \quad (20)$$

Аналогичным образом оказываются связанными также и компоненты силовых характеристик. Ниже приводятся эти формулы на сторонах $x = \pm a$:

$$[V_1^0, V_1^1, V_3^0, V_3^1]^T = \mathbf{T}_1 [V_a^{00}, V_a^{01}, V_a^{10}, V_a^{11}]^T, \quad [M_1^0, M_1^1, M_3^0, M_3^1]^T = \mathbf{T}_3 [M_a^{00}, M_a^{01}, M_a^{10}, M_a^{11}]^T \quad (21)$$

и на сторонах $y = \pm b$:

$$[V_2^0, V_2^1, V_4^0, V_4^1]^T = \mathbf{T}_2 [V_b^{00}, V_b^{01}, V_b^{10}, V_b^{11}]^T, \quad [M_2^0, M_2^1, M_4^0, M_4^1]^T = \mathbf{T}_4 [M_b^{00}, M_b^{01}, M_b^{10}, M_b^{11}]^T \quad (22)$$

Введем последовательности коэффициентов Фурье для векторов граничных смещений d и усилий f :

$$f_S = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}; \quad d_S = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (23)$$

где

$$f_i = [V_i^0, V_i^1, M_i^0, M_i^1]^T, \quad d_i = [W_i^0, W_i^1, \Phi_i^0, \Phi_i^1]^T,$$

$$\mathbf{W}_i^0 = \{W_{i0}^0, W_{i1}^0, \dots, W_{im}^0, \dots\}^T, \quad \mathbf{W}_i^1 = \{W_{i1}^1, \dots, W_{im}^1, \dots\}^T$$

$$\Phi_i^0 = \{\Phi_{i0}^0, \Phi_{i1}^0, \dots, \Phi_{im}^0, \dots\}^T, \quad \Phi_i^1 = \{\Phi_{i1}^1, \dots, \Phi_{im}^1, \dots\}^T$$

$$\mathbf{V}_i^0 = \{V_{i0}^0, V_{i1}^0, \dots, V_{im}^0, \dots\}^T, \quad \mathbf{V}_i^1 = \{V_{i1}^1, \dots, V_{im}^1, \dots\}^T$$

$$\mathbf{M}_i^0 = \{M_{i0}^0, M_{i1}^0, \dots, M_{im}^0, \dots\}^T, \quad \mathbf{M}_i^1 = \{M_{i1}^1, \dots, M_{im}^1, \dots\}^T$$

Данные последовательности можно выразить через коэффициенты Фурье f_s^{kj} и d_s^{kj} каждого типа симметрии в отдельности в виде

$$f_s = \mathbf{T} [f_s^{00}, f_s^{01}, f_s^{10}, f_s^{11}] \text{ и } d_s = \mathbf{T} [d_s^{00}, d_s^{01}, d_s^{10}, d_s^{11}] \quad (24)$$

при помощи матрицы перехода \mathbf{T} , являющейся комбинацией матриц \mathbf{T}_j .

Тогда (24) допускает обращение в виде

$$[f_s^{00}, f_s^{01}, f_s^{10}, f_s^{11}] = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T f_s \text{ и } [d_s^{00}, d_s^{01}, d_s^{10}, d_s^{11}] = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T d_s,$$

и спектральная матрица динамической жесткости для прямоугольной пластины, дающая зависимость

$$f_s = \mathbf{K} d_s,$$

выражается в виде

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \begin{pmatrix} K^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^{11} \end{pmatrix} \mathbf{T}^T. \quad (25)$$

При практической реализации, в последовательностях коэффициентов Фурье удерживается некоторое число N первых компонентов, и все матрицы, входящие в представленные выше формулы оказываются конечными. При этом матрицы \mathbf{K}^{kj} оказываются порядка $4N \times 4N$, а спектральная DSM матрица \mathbf{K} порядка $16N \times 16N$.

В п.4.3. описывается алгоритм стыковки отдельных матриц элементов в генеральную матрицу ансамбля пластин.

Представленный подход иллюстрируется в п. 4.4. на примере ряда модельных задач, проводится анализ эффективности предлагаемого подхода в сравнении с программными продуктами, написанными на основе метода конечных элементов (табл. 2, 3). Представленные данные показывают эффективность разработанного метода спектральной динамической жесткости в сравнении с коммерческими программными продуктами.

На рис.3. представлены собственные формы колебаний составной пластины, рассчитанные по методу спектральной динамической жесткости в сравнении с формами колебаний однородной пластины. Спектр собственных частот составной (ослабленной) пластины лежит значительно ниже по сравнению с однородной пластиной. На первых частотах более жесткая часть составной пластины остается

в покое, в то же время более податливая составляющая дает собственную форму. С увеличением частоты колебаний начинаются колебания и для более жесткой составляющей, при этом можно найти формы колебаний, где именно эта часть определяет собственную форму колебаний пластины, тогда как вторая часть остается относительно невозмущенной. Для однородной пластины эти эффекты отсутствуют.

Таблица 2 Сходимость и вычислительная эффективность метода спектральной динамической жесткости в сравнении с методом конечных элементов (ABAQUS 300×300)

| | Собственные частоты Ω квадратной пластины $D_1/D_2 = 10, D_{66}/D_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$ | | | | | | Знач. цифры | Время ожидания (s) |
|------|---|---------|---------|---------|---------|---------|----------------|--------------------------|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | |
| FFFF | | | | | | | | |
| 5 | 1.65297 | 1.97760 | 2.36466 | 2.49495 | 2.74719 | 2.90039 | 3 | 0.15 |
| 10 | 1.65297 | 1.97740 | 2.36466 | 2.49489 | 2.74718 | 2.89991 | 4 | 0.16 |
| 20 | 1.65297 | 1.97737 | 2.36466 | 2.49488 | 2.74718 | 2.89983 | > 6 | 0.22 |
| FEM | 1.65303 | 1.97731 | 2.36469 | 2.49484 | 2.74727 | 2.89970 | 4 | 49.00 |
| CCCC | | | | | | | | |
| 5 | 3.14649 | 3.99557 | 4.05737 | 4.26632 | 4.81067 | 5.07834 | 5 | 0.12 |
| 10 | 3.14649 | 3.99557 | 4.05737 | 4.26632 | 4.81067 | 5.07834 | 6 | 0.14 |
| 20 | 3.14649 | 3.99557 | 4.05737 | 4.26632 | 4.81067 | 5.07834 | > 6 | 0.16 |
| FEM | 3.14651 | 3.99550 | 4.05752 | 4.26629 | 4.81069 | 5.07863 | 4 | 43.00 |

Таблица 3 Первые собственные частоты Ω изотропной пластины в виде уголка с шарнирно-опертыми краями $\nu=0,29$ ($a_1 : b_1 : a_2 : b_2 = 2 : 2 : 1 : 1$)

| n | DSM $N = 10$ | Метод конечных элементов | [175] |
|-----|-----------------|-----------------------------|--------|
| 1 | 6.214 | 6.220 | 6.198 |
| 2 | 7.795 | 7.802 | 7.862 |
| 3 | 8.909 | 8.902 | 8.922 |
| 4 | 10.983 | 10.882 | 10.900 |
| 5 | 11.329 | 11.340 | 11.384 |

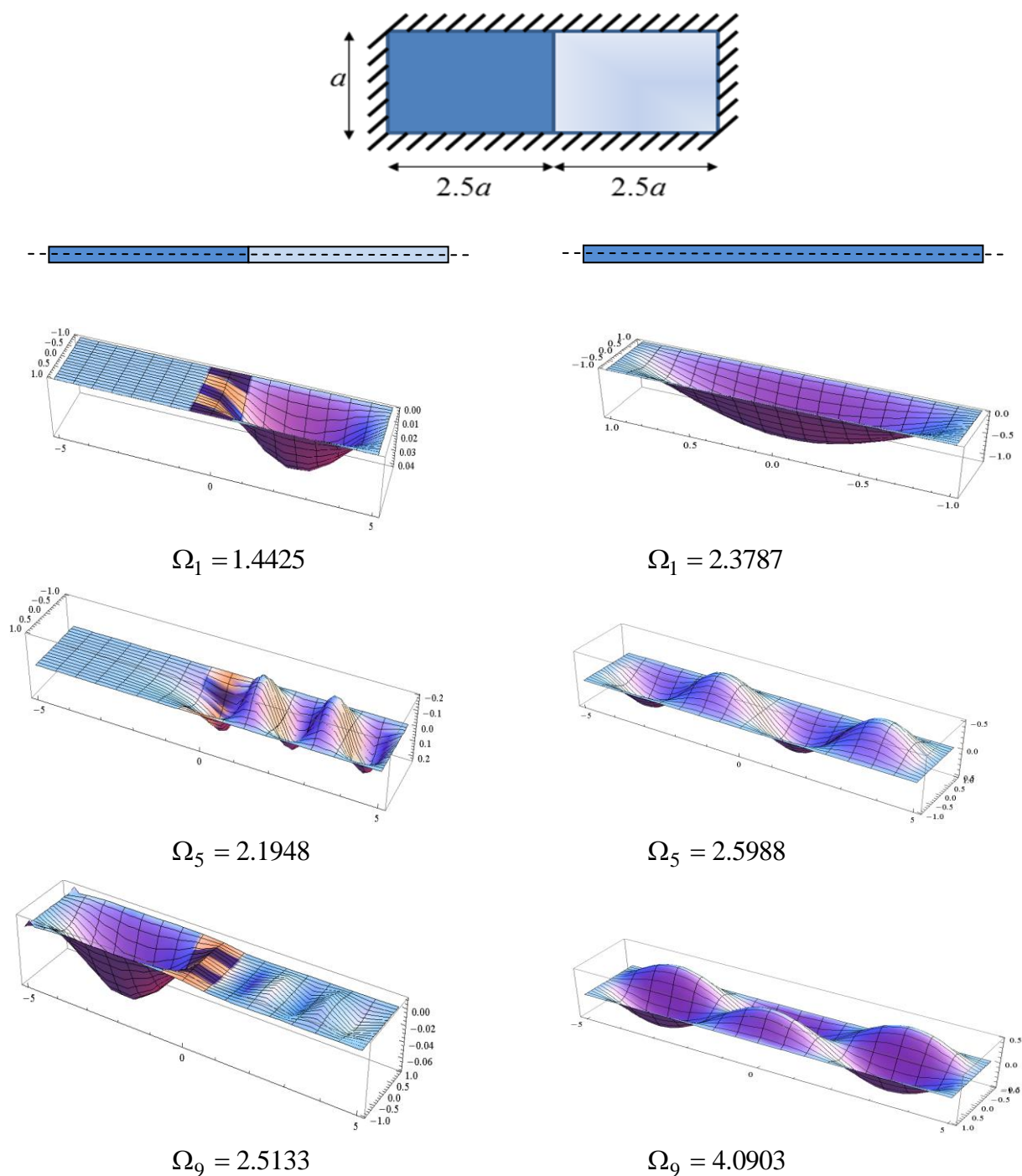


Рис.3. Собственные формы защемленной пластины
 $\nu = 0.25$ ($a : b = 5 : 1$, $E_I : E_{II} = 8 : 1$)

В пятой главе строятся аналитические решения плоских задач теории упругости для ортотропных пластин (продольные колебания прямоугольной пластины в рамках обобщенного напряженного состояния или колебания бесконечного бруса прямоугольного сечения в рамках плоской деформации), получено асимптотически точное решение задачи об установившихся вынужденных колебаниях упругого параллелепипеда в трехмерной постановке.

Исследование свободных планарных колебаний прямоугольной ортотропной пластины сводится к построению нетривиального решения системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно собственных форм колебаний $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(G + \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \Omega^2 G u &= 0 \\ \left(G + \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \Omega^2 G v &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

где обозначено $\Omega^2 = \frac{\rho\omega^2}{G}$, ν_1 и ν_2 - коэффициенты Пуассона, E_1 и E_2 - модули Юнга в направлениях координатных осей, G - модуль сдвига.

При этом для пластины с защемленными краями, граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a & \quad u = v = 0 \\ \text{при } y = \pm b & \quad u = v = 0 \end{aligned}$$

и для пластины со свободными краями в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a & \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0 \\ \text{при } y = \pm b & \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \end{aligned}$$

В силу линейности исследуемых задач, представим общее решение системы дифференциальных уравнений (26) в виде суммы:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{01} \\ v_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{10} \\ v_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} \\ v_{11} \end{pmatrix},$$

где индексом «00» обозначено решение соответствующее напряженно-деформируемому состоянию симметричному по обеим координатным осям, индексом «01» - симметричному по оси OX и антисимметричному по OY , и т.д.

Компоненты смещений u_{kj} и v_{kj} представляются в виде суммы двух тригонометрических рядов в виде

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1-\nu_1\nu_2)} \right) u_{kj} = \delta_{j0} C_0 T'_k(\Omega_x x) + \left(1 + \frac{\nu_2 E_1}{G(1-\nu_1\nu_2)} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n H_j(p_{nk} y) + B_n H_j(\bar{p}_{nk} y)) T'_k(\alpha_{nk} x) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \frac{q_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1\nu_2)} + \Omega^2}{q_{nj}} H'_k(q_{nj} x) + D_n \frac{\bar{q}_{nj}^2 - \frac{E_2 \beta_{nj}^2}{G(1-\nu_1\nu_2)} + \Omega^2}{\bar{q}_{nj}} H'_k(\bar{q}_{nj} x) \right) \frac{T_j(\beta_{nj} y)}{\beta_{nj}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) v_{kj} = \delta_{k0} A_0 T'_j(\Omega_y y) + \left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (C_n H_k(q_{nj} x) + D_n H_k(\bar{q}_{nj} x)) \Gamma'_j(\beta_{nj} y) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{p_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{p_{nk}} H'_j(p_{nk} y) + B_n \frac{\bar{p}_{nk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{nk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2}{\bar{p}_{nk}} H'_j(\bar{p}_{nk} y) \right) \frac{T_k(\alpha_{nk} x)}{\alpha_{nk}}, \quad (28)$$

где δ_{mn} - символ Кронекера, A_n, B_n, C_n и D_n - неопределенные коэффициенты.

Здесь p_{nk}, \bar{p}_{nk} и q_{hj}, \bar{q}_{hj} - корни характеристических уравнений

$$p^4 + \left(\left(2v_1 - \frac{E_1}{G} \right) \alpha^2 + \Omega^2 + \Omega_y^2 \right) p^2 + \frac{v_1}{v_2} (\alpha^2 - \Omega^2) (\alpha^2 - \Omega_x^2) = 0,$$

$$q^4 + \left(\left(2v_2 - \frac{E_2}{G} \right) \beta^2 + \Omega^2 + \Omega_x^2 \right) q^2 + \frac{v_2}{v_1} (\beta^2 - \Omega^2) (\beta^2 - \Omega_y^2) = 0$$

где $\Omega_x^2 = \frac{(1-v_1 v_2) \rho \omega^2}{E_1}$ и $\Omega_y^2 = \frac{(1-v_1 v_2) \rho \omega^2}{E_2}$ - дополнительные частотные параметры, которые введены для краткости изложения.

Подстановка общего решения (27), (28) в краевые условия приводит к квазирегулярным однородным бесконечным системам в случае заземленных и свободных краев пластины. Так в случае заземленных сторон прямоугольника бесконечная система имеет вид

$$x_m^c = \frac{2\alpha_{mk}}{\left(1 + \frac{v_2 E_1}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{1,m}^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n^c}{(\beta_{nj}^2 + p_{mk}^2)(\beta_{nj}^2 + \bar{p}_{mk}^2)} \quad (29)$$

$$y_m^c = \frac{2\beta_{mj}}{\left(1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)}\right) \Delta_{2,m}^c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^c}{(\alpha_{nj}^2 + q_{mj}^2)(\alpha_{nj}^2 + \bar{q}_{mj}^2)} \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\text{где } \Delta_{1,m}^c = \frac{b\alpha_{mk}}{\bar{p}_{mk}^2 - p_{mk}^2} \left(\frac{p_{mk}}{p_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_j(p_{mk} b)}{H'_j(p_{mk} b)} - \frac{\bar{p}_{mk}}{\bar{p}_{mk}^2 - \frac{E_1 \alpha_{mk}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_j(\bar{p}_{mk} b)}{H'_j(\bar{p}_{mk} b)} \right)$$

$$\Delta_{2,m}^c = \frac{a\beta_{mj}}{\bar{q}_{mj}^2 - q_{mj}^2} \left(\frac{q_{mj}}{q_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_k(q_{mj} a)}{H'_k(q_{mj} a)} - \frac{\bar{q}_{mj}}{\bar{q}_{mj}^2 - \frac{E_2 \beta_{mj}^2}{G(1-v_1 v_2)} + \Omega^2} \frac{H_k(\bar{q}_{mj} a)}{H'_k(\bar{q}_{mj} a)} \right)$$

Также как и в третьей главе диссертации, собственные частоты колебаний вычислялись на основе сформулированного во второй главе признака (7), который впервые дает возможность для эффективного определения верхних и нижних границ собственных частот пластины. Показывается, что данный подход является эффективным и в области высоких частот.

Строится трансцендентное уравнение для определения степенной асимптотики нетривиального решения полученных бесконечных систем, так в случае системы (29) это уравнение относительно λ имеет вид

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\tau} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda+1}{4} \ln \frac{1+\sqrt{1-\tau}}{1-\sqrt{1-\tau}} \right)}{\sqrt{1-\sqrt{\tau}}} \cdot \theta_c = \cos \frac{\pi \lambda}{2},$$

$$\text{где } \tau = \frac{v_1 v_2}{\left(\frac{E_2 v_1}{2G} - v_1 v_2 \right)^2}, \quad \theta_c = \frac{1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)} \left(2 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)} \right)}{1 + \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}} + \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}} \cdot \frac{v_1 E_2}{G(1-v_1 v_2)} \right)}.$$

Асимптотика неизвестных описывается формулой

$$x_m^c = \frac{v_2^{\lambda/4}}{\alpha_{mk}^\lambda} G_c, \quad y_m^c = \frac{v_1^{\lambda/4}}{\beta_{mj}^\lambda} G_c \quad (m \rightarrow \infty).$$

Полученные решения дают возможность провести анализ спектра собственных частот колебаний в случае первой и второй основных граничных задач для прямоугольника. Проведено параметрическое исследование зависимости спектральных кривых от упругих констант. Показан механизм возникновения эффекта краевого резонанса для симметричных мод колебаний и его отсутствие в случае косо́й симметрии.

На рис. 4 представлены графики нормальных напряжений в различных сечениях прямоугольника в случае возбуждения колебаний заданными на границе

$x = \pm a$ постоянными нормальными напряжениями $\frac{1-v_1 v_2}{E_1} \sigma_{xx} = -1$ на частоте колебаний $\Omega = 1.47$, близкой к первой собственной частоте.

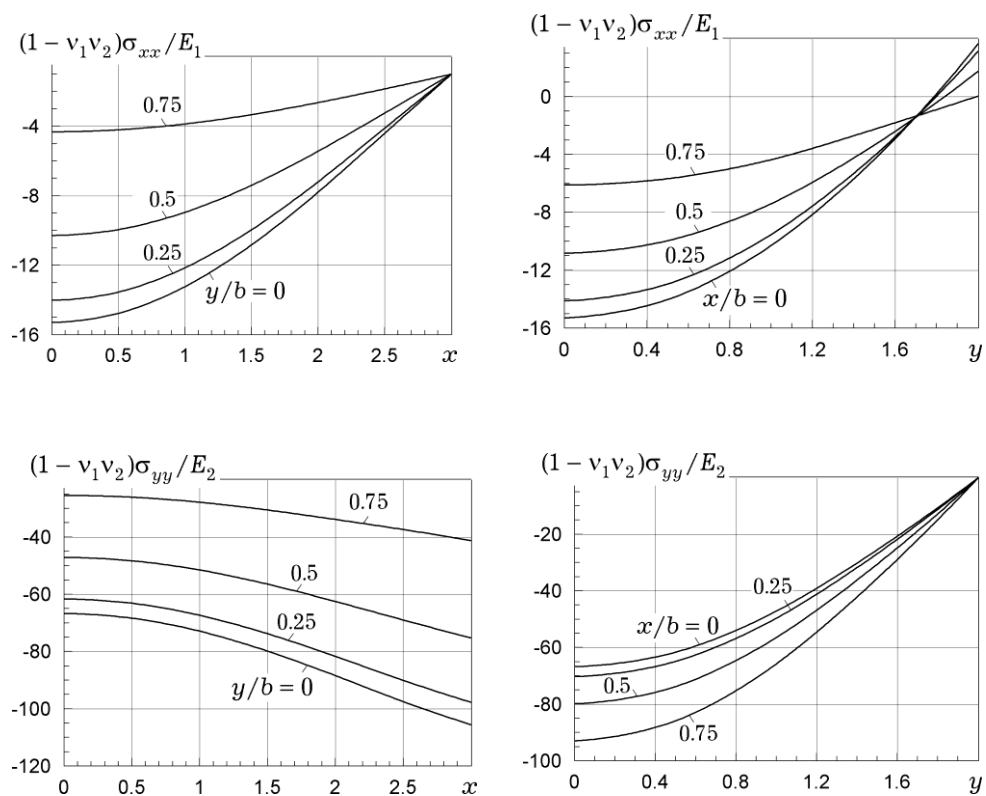


Рис.4. Значения напряжений в прямоугольнике при возбуждении колебаний нормальными напряжениями ($a/b = 3/2$, $\nu_1 = 0.072$, $\nu_2 = 0.036$; $E_1 = 1.2$, $E_2 = 0.6$, $G = 0.07 [\times 10^5 \text{ кг/см}^2]$)

Нормальные напряжения $\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{xx}$ наибольших значений (-15.29) достигают в центре прямоугольника убывая к его границам, а нормальные напряжения $\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{yy}$ своих наибольших значений (-88.39) достигают посредине сторон $x = \pm a$. При этом касательные напряжения оказываются достаточно малы: $|\sigma_{xy}| \leq 3.6G$.

В п.5.5. представлено решение плоской задачи для крестообразной области в случае установившихся вынужденных колебаний под действием граничных напряжений. Распределение нормальных напряжений $\sigma_{xx}/2G$ представлено на рис. 5 для частоты колебаний $\Omega = 0.5$ и $\nu = 0.3$ для различной геометрии области. Данная частота вынужденных колебаний расположена далеко от собственных частот креста в обоих случаях, поэтому значения напряжений сравнительно невелики. Особенности в углу носят локальный характер.

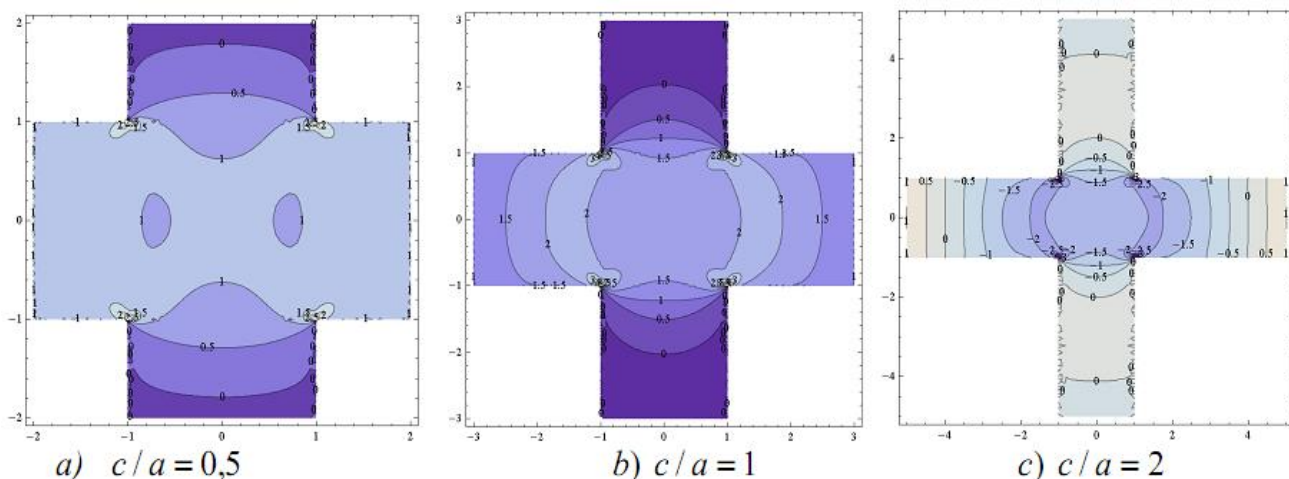


Рис.5. Распределение нормальных напряжений $\sigma_{xx}/2G$ для частоты колебаний $\Omega = 0.5$

В данной главе также представлено решение классической задачи теории упругости о колебаниях прямоугольного параллелепипеда. Данная задача, несмотря на то, что была впервые поставлена в трехмерной постановке еще Ламе в середине XIX столетия, до сих пор имеет лишь приближенное и численное решение, полученные на основе вариационного принципа. В п.5.6 строится общее решение уравнений Ламе на основе метода суперпозиции. Гармонические колебания однородного и линейно-упругого прямоугольного параллелепипеда под действием приложенных к его граням нагрузок с частотой ω описываются в терминах вектора смещений $\mathbf{U} \cdot e^{-i\omega t}$ при помощи уравнения Lamé

$$(1 - 2\nu)\Delta\mathbf{U} + \text{grad div } \mathbf{U} + \frac{(1 - 2\nu)\rho\omega^2}{G}\mathbf{U} = 0 \quad (30)$$

где ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность материала, G – модуль сдвига.

Пусть в исходных декартовых координатах параллелепипед описывается как $(X, Y, Z) \in \{-h_1; h_1\} \times \{-h_2; h_2\} \times \{-h_3; h_3\}$. Перейдем к безразмерным координатам и смещениям делением на некоторый характерный размер. В частности, выбирая в качестве такой величины h_1 , введем безразмерные координаты и смещения

$$x = X / h_1, \quad y = Y / h_1, \quad z = Z / h_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} / h_1$$

Обозначим также безразмерные частоты колебаний как

$$\Omega_j = \omega h_1 / c_j \quad (j = 1, 2)$$

где $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ и $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ - скорости распространения продольных и поперечных волн в изотропной неограниченной среде соответственно.

Для построения общего решения уравнения (30) используем разложение вектора смещений \mathbf{u} при помощи векторного \mathbf{a} и скалярного потенциалов φ

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{a} \quad (31)$$

При этом, что для полноты представления (31) необходимо добавить условие того, что векторный потенциал представляет собой соленоидальное поле

$$\text{div } \mathbf{a} = 0. \quad (32)$$

В этом случае потенциалы удовлетворяют двум уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\varphi + \Omega_1^2\varphi = 0; \quad \Delta\mathbf{a} + \Omega_2^2\mathbf{a} = 0. \quad (33)$$

Используя стандартную технику разделения переменных для уравнений (33) и связь компонентов векторного потенциала посредством (32), получаем следующие выражения для смещений:

$$\begin{aligned} u_x = & \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\alpha_n A_{nm}^1 \text{ch } p_{nm,1} z + V_3^2 (\alpha_n, \beta_m) \text{ch } p_{nm,2} z \right) \sin \alpha_n x \cos \beta_m y - \\ & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\alpha_n A_{nm}^5 \text{ch } q_{nm,1} y - V_8^6 (\alpha_n, \gamma_m) \text{ch } q_{nm,2} y \right) \sin \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(g_{nm,1} A_{nm}^9 \text{sh } g_{nm,1} x + (\beta_n A_{nm}^{12} - \gamma_m A_{nm}^{11}) \text{sh } g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y = & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\beta_m A_{nm}^1 \text{ch } p_{nm,1} z - V_2^3 (\beta_m, \alpha_n) \text{ch } p_{nm,2} z \right) \cos \alpha_n x \sin \beta_m y + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(q_{nm,1} A_{nm}^5 \text{sh } q_{nm,1} y + (\gamma_m A_{nm}^6 - \alpha_n A_{nm}^8) \text{sh } q_{nm,2} y \right) \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\beta_n A_{nm}^9 \text{ch } g_{nm,1} x + V_{12}^{11} (\beta_n, \gamma_m) \text{ch } g_{nm,2} x \right) \sin \beta_n y \cos \gamma_m z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z = & \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(p_{nm,1} A_{nm}^1 \text{sh } p_{nm,1} z + (\alpha_n A_{nm}^3 - \beta_m A_{nm}^2) \text{sh } p_{nm,2} z \right) \cos \alpha_n x \cos \beta_m y + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\gamma_m A_{nm}^5 \text{ch } q_{nm,1} y + V_6^8 (\gamma_m, \alpha_n) \text{ch } q_{nm,2} y \right) \cos \alpha_n x \sin \gamma_m z - \\ & - \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\gamma_m A_{nm}^9 \text{ch } g_{nm,1} x - V_{11}^{12} (\gamma_m, \beta_n) \text{ch } g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \sin \gamma_m z \end{aligned}$$

где $\alpha_n = \pi n$; $\beta_n = \pi n / b$; $\gamma_n = \pi n / c$, $V_j^k(\alpha, \beta) = \frac{\alpha \beta A_{nm}^k - (\alpha^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^j}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \Omega_2^2}}$,

$$p_{nm,j} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_j^2}; \quad q_{nm,j} = \sqrt{\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_j^2}; \quad g_{nm,j} = \sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_j^2}.$$

В отличие от плоских задач, здесь решение представляется в виде суммы трех двойных тригонометрических рядов с неопределенными коэффициентами. Таким образом, полученная из граничных условий бесконечная система в п.5.7.

связывает три бесконечные матрицы неопределенных коэффициентов. Для системы также доказана квазирегулярность. Показано, что достаточное условие (7) и здесь позволяет локализовать собственные частоты.

Используя известную в математическом анализе асимптотику коэффициентов ряда Фурье для гладкой функции, в предположении гладкости граничных напряжений находится асимптотика неизвестных в бесконечной системе, позволяющая описывать элементы искомым бесконечных матриц, как по строкам, так и по столбам. Это позволяет свернуть остатки рядов в выражениях напряжений и устранить логарифмические особенности на гранях параллелепипеда, которые при использовании метода простой редукции (построении приближенного решения краевой задачи в виде конечного отрезка ряда Фурье) не исчезают и не дают возможности выполнить с удовлетворительной точностью заданные граничные условия. Показано, что при вырождении трехмерной задачи в плоскую задачу, найденные в 5.7 асимптотики переходят в асимптотики для плоской задачи.

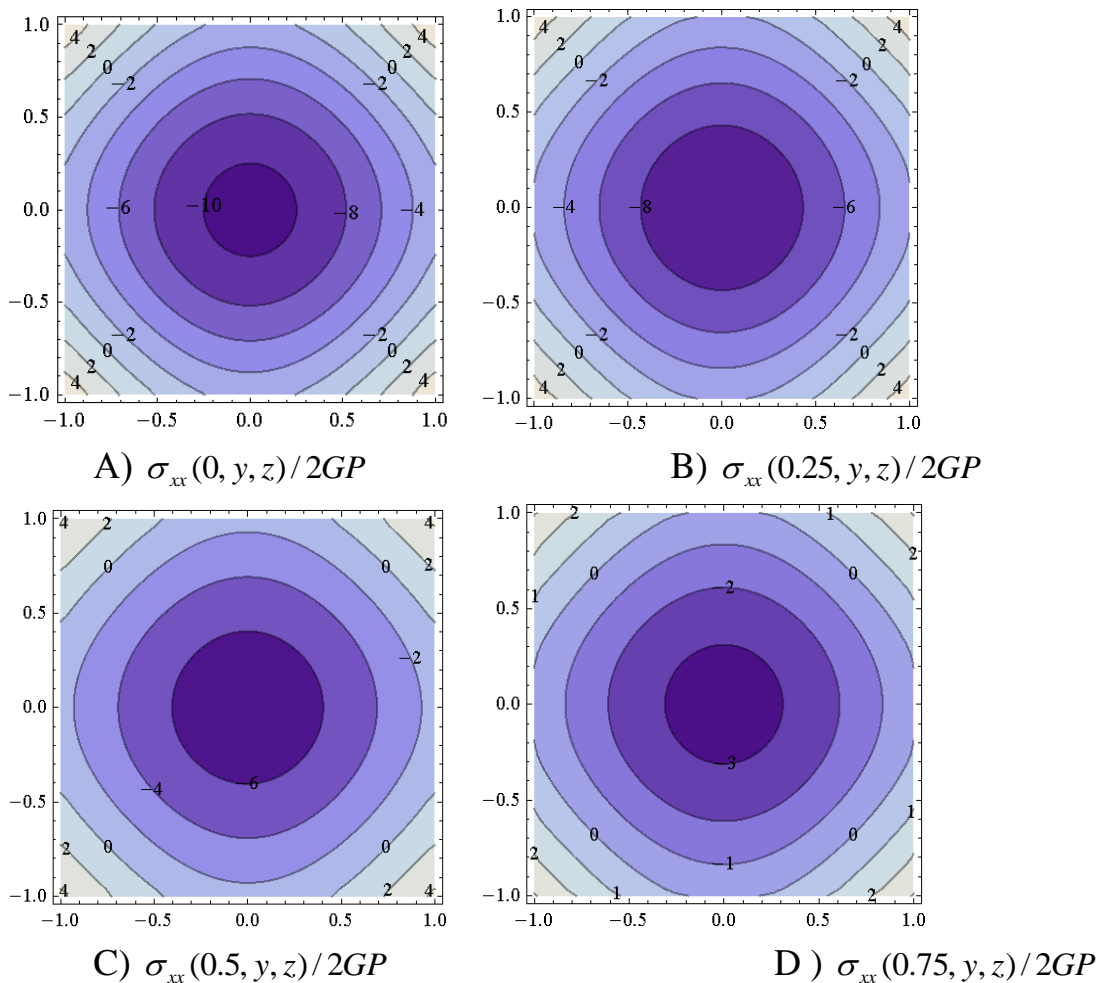


Рис.6. Распределение нормальных напряжений по сечениям куба из примера

На рис.6. представлены значения нормальных напряжений $\sigma_{xx}(x, y, z)/2GP$ в различных сечениях куба, нагруженного только по паре противоположных граней равными постоянными нормальными нагрузками

$$\frac{1}{2G}\sigma_{xx}|_{x=\pm 1} = Pe^{-i\omega t}; \frac{1}{2G}\sigma_{yy}|_{y=\pm 1} = \frac{1}{2G}\sigma_{zz}|_{z=\pm 1} = 0,$$

на частоте колебаний $\Omega = 1.5$, которая всего на 6% отличается от собственной частоты. Все касательные напряжения полагаем равными нулю.

Близость частоты вынужденных колебаний к собственной частоте дает в этом примере достаточно большие значения напряжений, наибольшие значения которых достигаются в центре куба, убывая к его граням.

На основе найденного аналитического решения задачи исследован спектр собственных частот упругого параллелепипеда в зависимости от упругих характеристик и линейных размеров (рис. 7). Впервые построены таблицы собственных значений параллелепипеда в случае для симметричных по осям нагрузок. Анализ спектра собственных значений и собственных форм показывает, что для конечного параллелепипеда также характерен эффект краевого резонанса.

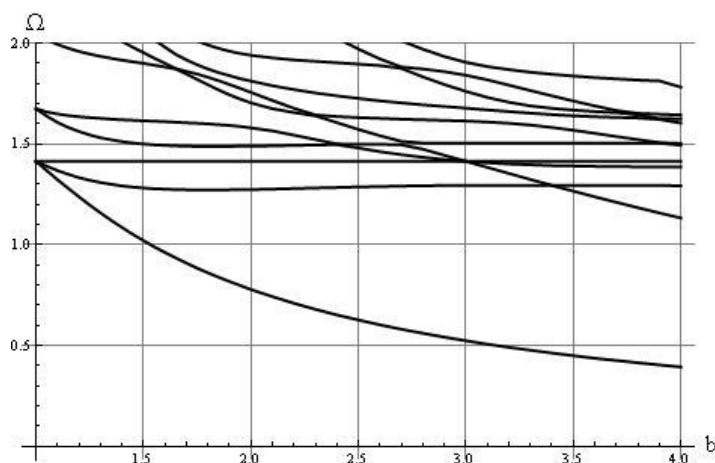


Рис. 7. Первые десять собственных частот параллелепипеда ($\nu = 0.25$, $c = 1$)

В шестой главе диссертации представлено решение задачи о флаттере защемленной ортотропной прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке газа. Предлагается использовать в качестве базисных функций метода Бубнова - Галеркина новые аналитические представления собственных форм колебаний прямоугольной ортотропной пластины в вакууме. Представлен как алгоритм построения базисных функций, так и алгоритм определения критического значения параметра скорости, форм потери динамической устойчивости. Исследуется сходимость метода Бубнова - Галеркина при варьировании

параметров задачи. Представлены примеры численной реализации, анализируется влияние ортотропии материала и планарных усилий.

Пусть амплитудное значение прогиба $w(x, y)$, т. е. $W = we^{\sigma t}$, тогда получаем в приближении поршневой теории следующую задачу на собственные значения в случае защемленных краев пластины:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + U_0 D_1 \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda D_1 w \quad (34)$$

$$\text{при } x = \pm a: w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\text{при } y = \pm b: w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

где ρ – плотность материала, h – толщина пластины, ε – коэффициент затухания; N_x и N_y – сжимающие (растягивающие) силы в плоскости пластины;

$$U_0 = a^3 \frac{\kappa p_0}{c_0 D_1} U, \quad \lambda D_1 = -\rho h \sigma^2 - \sigma \left(\varepsilon \rho h + \frac{\kappa p_0}{c_0} \right).$$

Как известно, решение задачи на собственные значения (34) позволяет ответить на вопрос об устойчивости колебаний. Действительно, колебания пластины будут устойчивы при $\text{Re } \sigma < 0$ и наоборот, при $\text{Re } \sigma > 0$ являются неустойчивыми. Для удобства обозначим $\Omega^2 = \frac{\rho h}{D_1} \sigma^2$ и $g = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \varepsilon + \frac{\kappa p_0}{c_0 \sqrt{D_1 \rho h}}$, тогда

критерием устойчивости движения будет условие

$$\begin{cases} \Omega^2 + g\Omega + \lambda = 0 \\ \text{Re } \Omega < 0 \end{cases} \quad (35)$$

Заметим, что краевая задача (34) достаточно хорошо изучена, в частности известно, что $\text{Re } \lambda > 0$, с увеличением параметра скорости U_0 собственные значения λ последовательно переходят в комплексную область.

Решение ищется в виде разложения по собственным формам колебаний пластины в вакууме $\{\phi_m(x, y)\}$, соответствующим собственным частотам $\{\omega_m\}$:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m \phi_m(x, y) \quad (36)$$

Подстановка (36) в дифференциальное уравнение (34) согласно методу Бубнова – Галеркина, с учетом ортогональности собственных форм $\{\phi_m(x, y)\}$ в области пластины, приводит к однородной бесконечной системе алгебраических уравнений вида:

$$(\lambda - \omega_m^2) \xi_m = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_K \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \phi_m dK}{\int_K \phi_m^2 dK} \xi_n \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (37)$$

Ниже на рис. 8 представлен алгоритм определения критической скорости.

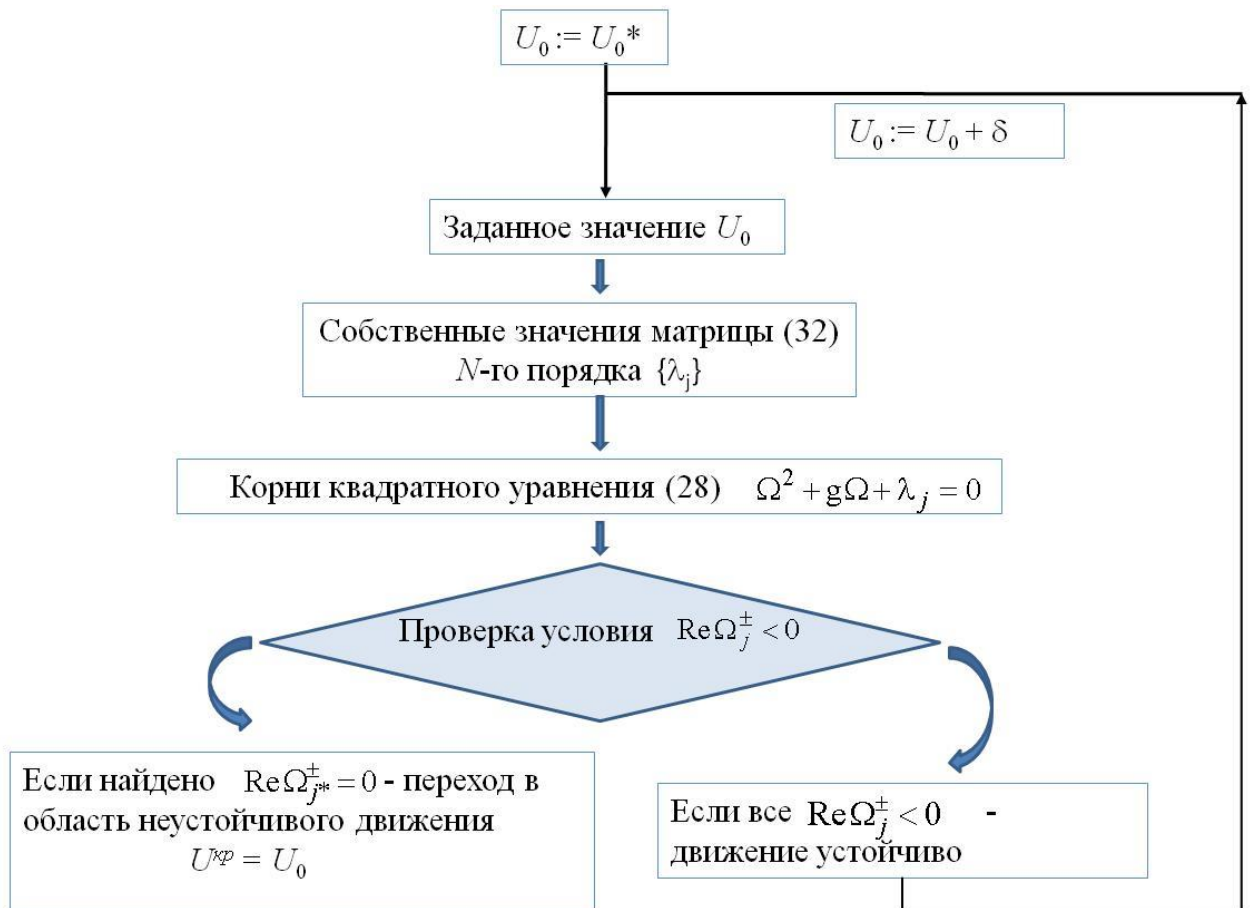


Рис. 8. Алгоритм нахождения критической скорости

В табл. 4 представлена сходимость метода Бубнова – Галеркина при варьировании параметров задачи $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 1.9982 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$. Параметры воздушного потока следующие $p_0 = 1.0126 \cdot 10^5$ Па, $\rho_0 = 1.2928$ кг/м³, $\kappa = 1.4$. В представленных примерах предполагалось отсутствие затухания $\varepsilon = 0$, при моделировании ортотропных свойств материала предполагалось, что по оси Ox жесткость D_1 соответствует стальной пластине, а жесткость D_2 по оси Oy изменяется в некотором отношении, при этом $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$.

Таблица 4. Сходимость метода Бубнова – Галеркина.

| N | U_0 | | | |
|----|---|--|--|---|
| | $D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 1$ | $D_1 = 3D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 1$ | $D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0.5\pi^2 D_1$ $b/a = 1$ | $D_1 = D_2$ $N_x = N_y = 0$ $b/a = 5$ |
| 8 | 119.90 | 98.68 | 89.05 | 62.64 |
| 12 | 105.45 | 102.02 | 83.87 | 62.56 |
| 16 | 106.39 | 93.89 | 84.31 | 62.62 |
| 20 | 106.39 | 93.89 | 84.31 | 62.52 |
| 24 | 106.39 | 93.89 | 84.31 | 62.52 |

Из представленных данных можно увидеть, что удовлетворительная точность полученных результатов начинает наблюдаться уже при $N \geq 16$.

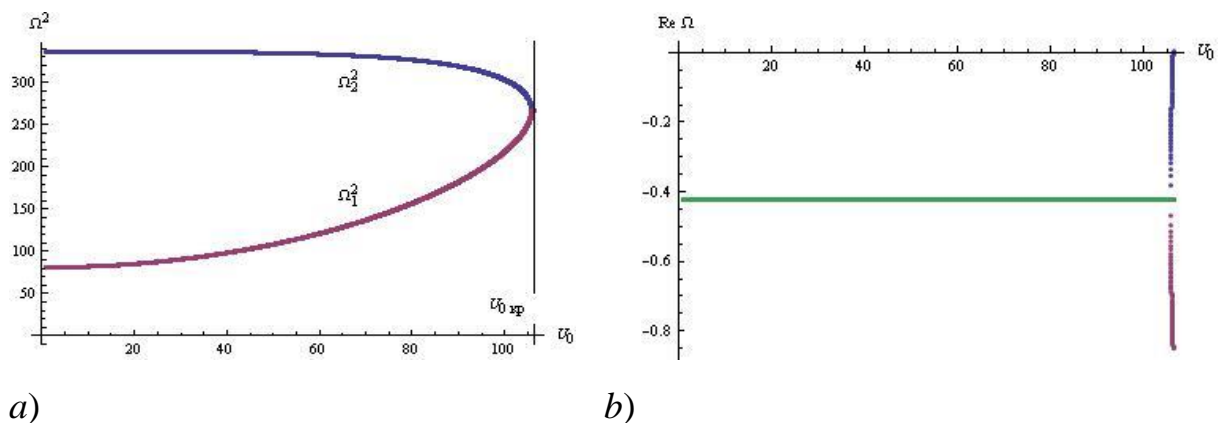


Рис.9. Слияние первых двух частот для квадратной изотропной пластины

На рис.9 представлена эволюция собственных значений краевой задачи Ω с увеличением параметра скорости U_0 для квадратной изотропной пластины. Можно увидеть на рис. 8a, что для защемленной квадратной панели критическая скорость соответствует сближению и слиянию первых двух собственных частот колебаний. Более подробный анализ действительной части $\text{Re } \Omega_1$ (рис.2b) показывает, что вначале происходит ветвление постоянной действительной части при $U_{доф} = 105.78$, и только после этого одна из ветвей $\text{Re } \Omega_1^+$ становится положительной. Данная картина согласуется с известными результатами, где было предложено различать две критические скорости, первую – дофлаттерную, при

которой движения панели переходят из стоячих волн в бегущие волны с ограниченной амплитудой, и вторую критическую скорость – флаттерную, при которой амплитуды бегущих волн начинают возрастать во времени. Из представленных данных следует, что обе критические скорости для защемленной панели отличаются незначительно, менее чем на 1%.

Проведены тестовые расчеты для изотропной стальной квадратной пластины при различной планарной нагрузке, соответствующие формы потери устойчивости показаны ниже на рис. 10.

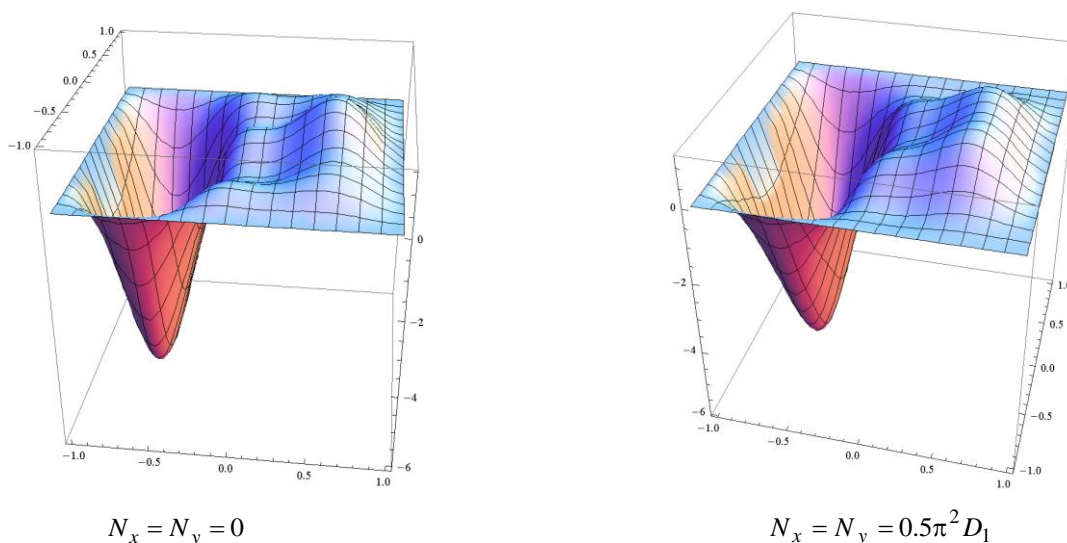


Рис. 10. Собственные формы потери динамической устойчивости

Результаты расчетов показывают следующие качественные зависимости:

- равномерно сжимающие нагрузки на пластину приводят к уменьшению критического значения параметра скорости, динамическая неустойчивость наступает на более медленных скоростях;

- нагрузки, сжимающие пластину только в направлении перпендикулярном движению, приводят к значительно более медленному уменьшению критического значения параметра скорости по сравнению с равномерно нагруженной пластиной;

- растягивающие пластину нагрузки, приводят к увеличению критического значения параметра скорости;

- форма потери динамической устойчивости для квадратной пластины мало меняется при варьировании параметров;

- увеличение сторон пластины в направлении, перпендикулярном потоку, а также уменьшение жесткости пластины в данном направлении приводит к уменьшению критической скорости.

По каждой главе представлены краткие выводы.

В **Заключении** изложены основные результаты диссертации.

Количество страниц в диссертации – 295, в том числе иллюстраций – 56 и таблиц - 61. Список литературы содержит 228 наименований.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Выполнен комплекс исследований по построению аналитических решений для ряда задач колебания и устойчивости тел полигонального сечения, цель которого заключалась в разработке спектрального метода динамической жесткости для анализа ансамблей пластин при произвольных граничных условиях. На данной основе представлен высокоточный подход к исследованию механического поведения тонких пластин полигонального сечения, балок полигонального сечения и конечного прямоугольного параллелепипеда при гармонических колебаниях в широком диапазоне частот.

Основные результаты состоят в следующем:

- 1) Построен новый эффективный спектральный метод динамической жесткости для анализа пластин и их ансамблей. Используя полученные решения для задачи колебания пластин, строится спектральная матрица жесткости, связывающая значения граничных усилий и смещений пластины. Данный результат получен впервые для произвольной комбинации классических граничных условий. На основе матрицы жесткости элемента в виде отдельной пластины, строится алгоритм их объединения в общую DSM матрицу ансамбля пластин. Таким образом, построен новый метод, подобный к Dynamic stiffness method, эффективность которого численно подтверждена на примере задач для пластин полигонального сечения.
- 2) Впервые получены решения для ряда задач колебания и устойчивости прямоугольных ортотропных пластин, позволяющих описать структурный элемент в виде прямоугольной пластины, в том числе для среднего и высокого диапазона частот колебаний.
- 3) Проведен анализ напряжений вблизи углов прямоугольника, крестообразной области, который показывает, что усечение бесконечных рядов, представляющих напряжения приводит к возникновению явления Гиббса, что не дает возможности достоверно описать напряжения вблизи углов. Улучшение сходимости рядов в выражениях напряжений, на основе найденных аналитически асимптотик решений бесконечных систем,

позволяет избежать явления Гиббса и получить эффективное решение во всей полигональной области.

- 4) Впервые получены аналитические решения для вынужденных гармонических колебаний пластин с геометрией в виде равнобокого креста, которые позволяют описать возникающие смещения и напряжения вблизи угловых точек области, вблизи резонансных частот.
- 5) Найдено в замкнутой форме асимптотически точное решение задачи о колебаниях упругого параллелепипеда в трехмерной постановке под действием приложенных к граням напряжений. Асимптотика решений соответствующей бесконечной системы позволяет аналитически улучшить сходимость рядов в выражениях напряжений и исследовать спектр собственных частот, показать наличие краевого резонанса.
- 6) Впервые представлено решение задачи о панельном флаттере защемленной ортотропной панели на основе метода Бубнова – Галеркина, где в качестве базисных функций предлагается брать собственные формы колебаний панели в вакууме, вычисленные на основе метода спектральной динамической жесткости.
- 7) Разработан ряд аспектов теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которая позволяет эффективно исследовать полученные бесконечные системы. Впервые получен эффективный метод для отыскания асимптотик решения регулярных бесконечных систем. Учитывая, что квазирегулярную бесконечную систему всегда можно разложить на совокупность регулярных систем, представленная теорема 2.7 также дает возможность для исследования асимптотик квазирегулярных бесконечных систем.

Решения представленных в диссертации задач имеют самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что высокочастотные колебания перечисленных выше объектов встречаются в различных прикладных задачах технического характера (микро- и наноэлектронике, в задачах строительной механики, при моделировании технических систем, в геофизике и др.), также данные решения могут быть использованы для параметрической оптимизации, для анализа устойчивости к вибрации технических систем.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Папков С.О. Асимптотически точное решение задачи о гармонических колебаниях упругого параллелепипеда // Известия РАН Механика твердого тела. 2017. № 6. С. 109-125.
2. Папков С.О. Флаттер защемленной ортотропной прямоугольной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т.10, №4. С. 361-374.
3. Papkov S.O. A new method for analytical solution of in-plane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems // Journal of Sound and Vibration. 2016. 369. P. 228 - 245.
4. Papkov S.O. Vibrations of a Rectangular Orthotropic Plate with Free Edges: Analysis and Solution of an Infinite System // Acoustical Physics. 2015. Vol. 61, No. 2. P. 136 - 143.
5. Papkov S.O., Banerjee J.R. A new method for free vibration and bucking analysis of rectangular orthotropic plates // Journal of Sound and Vibration. 2015. 339. P. 342-358.
6. Papkov S.O. Harmonic vibrations of a cross – base prism // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 205, No 5. P. 691-705.
7. Papkov S.O. Three - dimensional dynamic problem of the theory of elasticity for a parallelepiped // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 215, No 2. P. 121-142.
8. Banerjee J.R., Papkov S.O., Liu X., Kennedy D. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case // Journal of Sound and Vibration. 2015. 342. P. 177 - 199.
9. Papkov S.O., Chekhov V.N. Limiting Limitants in Dynamic Problems for a Rectangular Prism // Int. Applied Mechanics. 2013. Vol. 49, No 5. P. 555-569.
10. Papkov S.O. Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 192, No 6. P. 691-702.
11. Папков С.О., Чехов В.Н. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доклады НАН Украины. 2004. №10. С.57-62.
12. Папков С.О. Установившиеся вынужденные колебания призмы при заданных на границе смещениях // Акустический вестник. 2008. Т.11. №4. С.36-43.

13. Папков С.О., Мелешко В.В. Изгибные колебания прямоугольной пластины со свободными краями // Теоретическая и прикладная механика. 2009. В.46. С.104-111.
14. Папков С.О., Мелешко В.В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акустический вестник. 2009. Т.12. №4. С.34-51.
15. Папков С.О. Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы // Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 89-98.
16. Мелешко В.В., Папков С.О. Закон асимптотических выражений Бубнова Кояловича // Вестник Днепропетровского университета. Серия «Механика». Вып 15, Т.2, № 5, 2011. С. 163 -174.
17. Папков С.О. Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы // Динамические системы. 2011. Т.1 (29), № 2. С. 255 - 267.
18. Папков С.О. Планарные колебания прямоугольной пластины в случае первой основной граничной задаче // Динамические системы. 2011. Т.1 (29), № 1. С.41- 51.
19. Папков С.О. Установившиеся вынужденные колебания прямоугольной ортотропной призмы // Математические методы и физико-механические поля, 55, №2, 2012. С.177-185.
20. Папков С.О., Чехов В.Н. Исследование регулярности бесконечной системы алгебраических уравнений и определение критических нагрузок в задаче об устойчивости сжатой прямоугольной пластины // Доклады НАН Украины. 2012 №12. С.55-60.
21. Папков С.О. Элемент в виде прямоугольной пластины в рамках Dynamic Stiffness Method // Динамические системы. 2013. Т.3 (31), № 1-2. С. 95-101.
22. Папков С.О. Гармонические колебания призмы с сечением в виде креста // Математические методы и физико-механические поля. 2013. 56. №3. С.170-181.
23. Папков С.О. Пространственная динамическая задача теории упругости для параллелепипеда // Математические методы и физико-механические поля. 2014. 57, № 2. С. 97 - 111.

24. Папков С.О. Динамическая задача для прямоугольной призмы // Вестник СевГТУ. Сер. «Механика, энергетика, экология». 2005. Вып. 67. С. 5-18.
25. Папков С.О. Спектр собственных частот кососимметричных колебаний прямоугольной призмы // Вестник СевГТУ. Сер. «Физика и математика». 2005. Вып. 70. С.148 -157.
26. Мелешко В.В., Папков С.О., Ван Хейст Г.Я.Ф. Закон асимптотических выражений Бубнова-Кояловича в задаче изгиба жестко-защемленной прямоугольной пластины // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2009. С.82-87.
27. Папков С.О., Мелешко В.В. Собственные формы колебаний упругих прямоугольных пластин со свободными краями // Сборник трудов XIV Межд. конференции: Современные проблемы механики сплошной среды. 2010, Ростов-на-Дону. С.217-222.
28. Папков С.О., Чехов В.Н. Исследование нестационарного деформирования упругой прямоугольной призмы / Dynamical system modelling and stability investigation. May, 2005. Kiev: Kiev University. P. 315.
29. Папков С.О., Чехов В.Н. Асимптотики решений регулярных бесконечных систем в задачах динамики для упругой прямоугольной призмы / Актуальные проблемы механики твердого деформируемого тела. Материалы IV межд. науч. конф. июнь, 2006. Донецк: ДонНУ. С. 289-291.
30. Папков С.О., Чехов В.Н. Исследование бесконечной системы линейных уравнений в задаче о колебаниях призмы при заданных на границе смещениях / Восьмая Крымская международная математическая школа. Сентябрь, 2006 г. Симферополь: ТНУ. С. 136.
31. Папков С.О. Собственные частоты колебаний призмы в случае кинематических граничных условий / Прикладные задачи математики и механики. Материалы XV межд. науч. конф. Севастополь. Сентябрь, 2007. С. 3-7.
32. Папков С.О. Спектр колебаний прямоугольной призмы под действием вынуждающих смещений / Акустический симпозиум «Консонанс-2007», Киев, Институт гидромеханики. С. 35.
33. Папков С.О. Метод суперпозиции в задаче аналитического построения фигур Хладни / Прикладные задачи математики и механики. Материалы XVIII межд. науч. конф. Севастополь. Сентябрь 2010. С. 3-8.

34. Папков С.О., Чехов В.Н. Метод предельных лимитант для установившихся колебаний прямоугольной призмы / Десятая Крымская международная математическая школа. Сентябрь 2010 г. Симферополь: ТНУ. С. 110.
35. Мелешко В.В., Гринченко В.Т., Папков С.О. Резонансные колебания пластин: от Хладни и Ритца до наших дней / XIV Межд. конференция: Современные проблемы механики сплошной среды. 2010, Ростов-на-Дону. С.27.
36. Папков С.О. Свободные колебания прямоугольной ортотропной пластины / Прикладные задачи математики и механики. Материалы XIX межд. науч. конф. Севастополь. Сентябрь 2011. С. 3-8.
37. Папков С.О. Новый подход к точному определению критических нагрузок в задачах статической устойчивости пластин / Прикладные задачи математики и механики. XX межд. науч. конф. Севастополь, сентябрь 2012. С. 3-8.
38. Папков С.О., Чехов В.Н. Приложение теории бесконечных систем к задачам колебания ортотропных пластин / Моделирование, управление и устойчивость (MCS) 2012, Крым, Севастополь, 10-14 сентября, 2012. С.57.
39. Papkov S.O., Chekhov V.N. Buckling of Thin Elastic Plates and Regular Infinite Systems of the Linear Algebraic Equations / ICCES 2012. Abstracts of ICCES'12, Crete, Greece. P. 54-55.
40. Папков С.О. Динамическая задача теории упругости для трехмерного параллелепипеда / Прикладные задачи математики и механики. XXII межд. науч. конф. Севастополь, сентябрь 2014. С. 3-8.
41. Liu X., Papkov S., J.R. Banerjee. An analytical solution for free transverse vibration of plates with arbitrary boundary conditions / Twelfth Int. Conf. on Computational Structures Technology. Stirlingshire, Scotland. 2014. Paper 36, P. 1-18. DOI: 10.4203/csr.106.36.
42. Папков С.О. Динамическая устойчивость защемленной ортотропной панели / Прикладные задачи математики. XXV межд. науч. конф. Севастополь, сентябрь 2017. С. 42-46.

