Федеральное Государственное Автономное Образовательное Учреждение
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

На правах рукописи

Витохин Евгений Юрьевич

Исследование колебательных и волновых процессов в термоупругой среде с учетом времени релаксации теплового потока

Специальность 01.02.04 —
«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Иванова Е.А.

Санкт-Петербург – 2017

Содержание

Введение **4**

1 Численное решение задачи гиперболической термоупругости в случае лазерного воздействия **16**

1.1 Уравнения гиперболической теплопроводности и термоупругости 16

1.2 Постановка задачи 20

1.3 Численный метод 24

1.4 Сравнение результатов расчетов, полученных с использованием явной и неявной схемы интегрирования 27

1.5 Решение тестовой задачи о распространении термоупругих волн в полупространстве 39

1.6 Решение задачи со свободными границами, на которых поддерживается постоянная температура 42

1.7 Заключение 51

2 Анализ влияния краевых условий на решение волновых задач гиперболической термоупругости **53**

2.1 Постановка задачи 53

2.2 Границы слоя закреплены и на них поддерживается постоянная температура 55

2.3 Границы слоя закреплены и теплоизолированы 60

2.4 Границы слоя свободны от нагрузок и теплоизолированы 64

2.5 Анализ напряжений 70

2.6 Заключение 72

3 Асимптотический анализ дисперсионных соотношений в задаче гиперболической термоупругости Лорда–Шульмана . . . 74

3.1 Анализ дисперсионных соотношений задачи теплопроводности Максвелла–Каттанео . . . 74

3.2 Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости . . . 79

3.3 Экспериментальный метод определения времени релаксации теплового потока . . . 90

3.4 Заключение . . . 104

Заключение . . . 105

Литература . . . 107

Введение

Актуальность работы. Современное развитие микроэлектроники предъявляет повышенные требования к эффективности систем охлаждения. В ряде экспериментальных работ был обнаружен волновой характер распространения теплового импульса. В то же время известно, что гиперболическое уравнение теплопроводности на наномасштабном уровне предсказывает более высокие значения температур, по сравнению с классической теорией. Кроме того, параболическое уравнение теплопроводности, базирующееся на классическом законе Фурье, обладает бесконечной скоростью распространения теплового импульса. В задачах с высокими скоростями температурных воздействий, а также в наномасштабных областях возникает необходимость учета конечной скорости распространения тепловых волн. Гиперболическое уравнение теплопроводности подробно изучено в первой половине прошлого века. В последние десятилетия теоретиков и экспериментаторов стали привлекать задачи связанной гиперболической термоупругости. Несмотря на большое количество статей по этой тематике, появившихся в недавнее время, этот вопрос остается недостаточно изученным. В частности, требует дополнительного исследования то, насколько существенный вклад эффект связанности вносит в решение задачи гиперболической термоупругости.

Степень разработанности темы работы. Исследование волнового переноса тепла является актуальным и имеет практическое значение для ряда современных технологий, используемых при производстве микро- и нано- электромеханических устройств (MEMS и NEMS). Это связано с тем, что при моделировании нестационарных тепловых процессов, обусловленных внутренними тепловыми источниками наноразмерного масштабного уровня, или возникающих вследствие краткосрочных импульсных воздействий, использование клас-

сического уравнения теплопроводности не позволяет достичь хорошего совпадения с экспериментом — [2, 56]. Для моделирования подобных процессов были предложены более сложные модели теплопроводности. Обсуждая современные модели теплопроводности, прежде всего следует отметить модели, имеющие конечную скорость распространения тепловых возмущений [2–5]; модели с тепловой памятью, учитывающие историю нагревания тела [6]; модели, учитывающие времена запаздывания теплового потока и градиента температуры [4, 52]. Подробный обзор современных моделей теплопроводности можно найти в [2]. Известно, что использование уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео позволяет достичь более достоверных результатов в задачах нагревания металлов короткими лазерными импульсами [8], в случае высоких скоростей движения источников тепла [52], а также быстрого движений границ фазового перехода [9]. Вывод уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео основан на законе, предложенным независимо Каттанео [10] Верноттом [11] и Лыковым [12]:

$$\tau\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} = -\lambda\nabla T, \tag{1}$$

где $\mathbf{h}$ — вектор теплового потока, точкой обозначается производная по времени, ∇ — оператор Гамильтона, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности, τ — время релаксации теплового потока (постоянная величина). По сути, закон Каттанео–Вернотте является обобщением хорошо известного закона Фурье. Наличие времени релаксации в уравнении (1) означает, что поток тепла не возникает и не исчезает мгновенно с появлением или исчезновением градиента температуры.

Вывод уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео осуществляется следующим образом. Рассматривается теплопроводящая недеформируемая среда. В этом случае уравнение баланса энергии имеет вид:

$$\rho\dot{U} = -\nabla\cdot\mathbf{h} + \rho q, \tag{2}$$

где ρ — плотность среды, U — массовая плотность внутренней энергии, q — скорость подвода тепла, приходящаяся на единицу массы. Подставив в уравнение (2) простейшее определяющее уравнение для внутренней энергии $U = c_v T$,

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, и приняв во внимание закон Каттанео–Вернотте (1), после несложных преобразований получим уравнение теплопроводности Максвелла–Каттанео:

$$\lambda \Delta T - \rho c_v \left(\dot{T} + \tau \ddot{T} \right) + \rho \left(q + \tau \dot{q} \right) = 0, \tag{3}$$

где Δ — оператор Лапласа. Уравнение (3) — это уравнение гиперболического типа. Оно сочетает в себе свойства классического уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Скорость распространения тепловых волн в среде зависит от величины τ.

Используя сверхтекучий гелий при температуре близкой к абсолютному нулю, Пешков [13] в 1944 году экспериментально определил существование тепловых волн. Он назвал это явление "второй звук"из-за схожести скорости этих тепловых волн и скорости обычных акустических волн. Значения времени релаксации теплового потока τ для различных веществ, определенные в разное время разными исследователями с использованием разных методов, изменяются в очень широком диапазоне. Значения времени релаксации теплового потока для однородных материалов в различном агрегатном состоянии варьируется в пределах от 10^{-14} с до 10^{-8} с — см., например, [35]. В работах [14–16] приводятся τ для азота в пределах от 0,1 до 10 нс. В [59] определено время релаксации τ золота, в зависимости от типа рассеивания (фонон-фононное и электрон-фононное) равное 12 и 1,52 пс соответственно. В [18, 19] опубликованы результаты опытов с металлами, в которых время релаксации теплового потока измеряется десятками наносекунд. В работах [20–22] приводится время релаксации теплового потока для металлов, равное 0,01 нс. Для алмазов в литературе можно встретить [24] высокие значения τ порядка 1 мс при температуре жидкого азота (77 K). В то же время для материалов с неоднородной структурой, таких как сода ($NaHCO_3$) и песок τ исчисляют десятками секунд. Например, в [25] определено время релаксации τ для песка, равное 2,26 с, а для соды — 0,66 с. Кроме того широко известна экспериментальная работа Митры [26], в которой установлена величина τ для мяса порядка 15 секунд. В экспериментах

с агаром (agar-gelled water) [27] определено время релаксации теплового потока $\tau = 7,96$ с.

В настоящее время, методы измерения температуры, а соответственно и параметров, характеризующих термодинамические свойства материалов, интенсивно развиваются. Одним из современных методов измерения температуры является лазерная термометрия [28–30]. Лазерная термометрия основана на дистанционном измерении температурно-зависимых параметров с помощью зондирующего светового пучка и вычислении температуры по известной зависимости измеренного параметра от температуры. В [31] обсуждаются пять бесконтактных и неразрушающих метода: метод оптического нагревания и электронного измерения, переходный электро-тепловой метод, переходный фото-электро-тепловой метод, метод тепловой релаксации под действием лазерных импульсов и стационарный электро-Раман-тепловой метод. В работах [14–16] обсуждается способ экспериментального определения τ, основанный на методе тепловых динамических решеток. Суть этого метода заключается в формировании в материале тепловой динамической решетки заданного периода. В направлении вектора решетки задается избыточная температура, распределенная по закону косинуса с периодом, равным периоду решетки. После прекращения воздействия процесс релаксации в образце регистрируется с помощью лазера. Тем не менее, как утверждается в [32], с. 75, в настоящее время нет прямых методов измерения τ.

Работа [25] представляет большой интерес. В ней обсуждаются эксперименты Грассманна [33], Хервига [34], Камински [23] и Митры [26]. Предлагается собственный оригинальный метод измерения времени релаксации теплового потока, а также проводится сравнение своих результатов с результатами других авторов. Следует отметить, что результаты работы [25] в части измерения коэффициента температуропроводности (thermal diffusivity) достаточно точно совпадают с результатами других авторов, тогда как значения τ для тех же материалов отличаются почти на два порядка (см. таблицу 1)

Таблица 1: Сравнение измеренных значений коэффициента температуропроводности и времени релаксации

Материал	Коэффициент температуропроводности, 10^{-6} м^2/с	Время релаксации, с	Источник
Песок	0,226	2,26	Ротцель [25]
	0,408	20	Камински [23]
	0,218	0	Грассманн [33]
	0,169	0	Хервиг [34]
$NaHCO_3$	0,185	0,66	Ротцель [25]
	0,31	28,7	Камински [23]
Обработанное	0,132	1,77	Ротцель [25]
мясо	0,14	15,5	Митра [26]
	0,1304	0	Хервиг [34]

Таким образом, проблема экспериментального определения времени релаксации теплового потока возникла давно, но и в настоящее время ее нельзя считать решенной, а приведенные в литературе значения τ также не всегда являются достоверными. Поэтому не утратила актуальности задача разработки теоретических основ для новых методов экспериментального определения времени релаксации теплового потока.

Модель упругой теплопроводящей среды, основанная на использовании закона теплопроводности Каттанео–Вернотте, (модель Лорда–Шульмана) была предложена в работе [36]. Позже Грином и Линдси была предложена [37] теория с двумя параметрами релаксации, позволяющая учесть скорость изменения температуры. Кроме того, Хетнарски и Игначак представили [38] теорию термоупругости для случая низких температур с нелинейным уравнением теплопроводности, где теплоемкость нелинейно зависит от температуры. Также широкое распространение получила термоупругость Грина-Нагди [39], в основе

которой лежит закон Фурье, в правой части которого имеется градиент температурного смещения, пропорциональный свободному пробегу частиц. Это слагаемое вносит ощутимый вклад в температуру на масштабах, сопоставимых с длиной свободного пробега частиц.

В современной литературе представлены и другие модели теплопроводности, термоупругости и термовязкоупругости, отличающиеся от классической теории — см., например, [40–46]. Аналитическое решение уравнения теплопроводности Максвелла-Каттанео в случае лазерного воздействия было найдено в [78]. Дисперсионные соотношения для уравнений термоупругости Лорда-Шульмана были получены и исследованы при произвольных значениях постоянной релаксации теплового потока в работе [48]. Скорости квазитеплового и квазиакустического фронта термоупругой волны были найдены в работах [48, 49]. Фундаментальный труд, посвященный различным неклассическим теориям термоупругости приведен в книге Жоу, Касас-Баскеса и Лебона [2]. Обширный обзор статей на тему гиперболической термоупругости предложен в [3].

На данный момент существует большое количество работ посвященных численному решению задач теплопроводности и термоупругости с импульсным воздействием. В статье [70] представлено численное решение гиперболического уравнения теплопроводности в случае импульсного воздействия, полученное с помощью явной и неявной схемы интегрирования. Производится сравнение этих решений и делается вывод о пригодности неявной схемы интегрирования для решения подобного типа задач. Явную схему интегрирования используют [71] для нахождения численного решения связанной задачи магнитно-термоупругости гиперболического типа. Также для решения связанных задач термоупругости используют и неявную схему интегрирования [72]. Кроме того для решения подобных задач используются [73] комбинированные явно-неявные методы на разнесенных сетках. Температуры, напряжения и перемещения дискретизируются на разных сетках, что позволяет использовать для решения волнового уравнения явную схему интегрирования, я для уравнения теплопроводности — неявную. Для подавления высокочастотной немонотонности в окрестности скачка,

вызванного импульсным воздействием, используют регуляризационные методы [70], а также биокомпактные схемы высокой точности [74]. Особенностью данной работы является то, что рассматривается связанная задача термоупругости гиперболического типа с импульсным воздействием и находится ее численное решение с помощью явной и неявной схем интегрирования. Численное решение сравнивается с аналитическим и находится погрешность численного счета при различных шагах интегрирования.

Несмотря на большое количество статей по гиперболической теплопроводности и термоупругости, этот вопрос остается недостаточно изученным. В частности, ранее не исследовалось влияние граничных условий на вклад, вносимый волновыми слагаемыми уравнения теплопроводности в решение связанной задачи гиперболической термоупругости. Кроме того, в теоретических работах [49, 50] представлены формулы, для определения скоростей квазиакустических и квазитемпературных фронтов термоупругой волны, а также критического значения коэффициента затухания, при котором решение претерпевает качественное изменение. Численной проверки этих соотношений раньше не проводилось, а это необходимо для подтверждения достоверности этих выражений. Задачу термоупругости можно решать в полусвязанной постановке. В этом случае сначала находится решение уравнения теплопроводности при заданных граничных условиях, а затем найденное решение подставляется в уравнение движения. Известно [68], что решение задачи классической термоупругости в полусвязанной постановке дает хорошее приближение, в то же время это решение значительно проще построить, чем решение связанной задачи термоупругости. Требует дополнительного исследования то, насколько существенный вклад эффект связанности вносит в решение задачи гиперболической термоупругости. Все эти вопросы изучаются в данной работе. Рассматриваются четыре комбинации граничных условий первого и второго рода, и устанавливается, в каком случае возникает наибольшее отличие решения гиперболической задачи от классической. Изучается влияние эффекта связности в гиперболической термоупругости при различных типах граничных условий. Кроме того, находится численное подтверждение аналитической формулы для определения скоростей

квазитеплового и квазиакустического фронтов, а также критического значения коэффициента затухания.

Проводится исследование свойств модели теплопроводности Максвелла–Каттанео и модели термоупругости Лорда–Шульмана, проявляющихся на наноразмерном масштабном уровне. Проводится анализ дисперсионных соотношений. Сравнивается характер температурных колебаний в задаче теплопроводности и связанной задаче термоупругости. На основе решения задачи теплопроводности разрабатываются теоретические основы экспериментального определения времени релаксации теплового потока. Путем сравнения решений задачи теплопроводности и связанной задачи термоупругости показывается, что механические колебания не должны влиять на точность определения времени релаксации теплового потока.

Задачи гиперболической термоупругости со сверхбыстрым воздействием обладают особенностями, которые затрудняют их численное решение. Импульсное воздействие приводит к возникновению скачка функции, в окрестности которого появляются высокочастотные колебания. В уравнении теплопроводности при старшей производной находится малый параметр, приводящий к появлению быстро меняющихся функций независимо от характера воздействия. Кроме того, коэффициент температурного расширения, отвечающий за связь тепловых и механических процессов, также является малым, вследствие чего высота пиков тепловых и акустических фронтов сильно отличается. Построение аналитического решения также сопряжено с определенными трудностями. Решение системы гиперболической термоупругости без учета механических слагаемых в уравнении теплопроводности можно представить в виде рядов. Поскольку эти ряды медленно сходятся, для получения достаточно точных результатов необходимо учесть большое число членов ряда. Это может привести к накоплению ошибки при суммировании и возникновению осцилляций вблизи скачка искомой функции. При удержании малого числа членов ряда может возникнуть ошибка округления. Для того, чтобы сделать вывод о том, какие особенности решения отражают реальное поведение системы, проводится качественное сравнение численного решение с аналитическим. Для определения

достоверности численного счета находится погрешность при различных шагах интегрирования и выясняется вопрос сходимости по сетке.

Цель работы. Целью работы является исследование распространения термоупругих волн на основе модели гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана.

Задачи работы. Анализ дисперсионных соотношений; исследование зависимости решения от времени релаксации теплового потока; определение величин и скоростей пиков для тепловой и акустической составляющих термоупругой волны; сравнение решения классической и гиперболической задачи термоупругости.

Научная новизна работы.

- На основании численного решения связанной задачи термоупругости Лорда-Шульмана при импульсном лазерном воздействии установлено, при какой энергии облучения отклонение температуры материала от начального значения не будет превышать величину 10 °C, т.е. решение будет оставаться в пределах применимости линейной теории.

- Решена задача о распространении термоупругих волн, возникающих вследствие импульсного лазерного воздействия, и оценены высоты пиков на профилях температуры в классической и гиперболической термоупругости. Показано, что для металлов при временах, меньших времени релаксации теплового потока, высоты пиков достаточно сильно различаются для того, чтобы по результатам измерений можно было бы оценить, какая из указанных теорий лучше моделирует данный процесс.

- Проведен сравнительный анализ решения задачи термоупругости Лорда-Шульмана и классической термоупругости в зависимости от граничных условий. Установлено, что наибольшие количественные отличия возникают в задаче с закрепленными границами и постоянной температурой на них, наименьшие - в задаче со свободными границами и теплоизоляцией.

- В результате численных расчетов установлено, что наибольшая разница между перемещениями (деформациями) в гиперболической и классической задачах термоупругости наблюдается в промежутке между акустическим и тепловым фронтом. При уменьшении расстояния между этими фронтами разница увеличивается.

- Установлено, что во всех рассмотренных задачах при времени релаксации теплового потока, равном 0,1 нс, в первые 0,025 нс наблюдается рост скоростей квазиакустического и квазитеплового фронтов. В последующие моменты времени значения скоростей отклоняются от своего асимптотического значения не более чем на 5 %, что находится в пределах погрешности численного счета.

- Проведен асимптотический анализ дисперсионных соотношений в случае модели Лорда-Шульмана, в результате которого получены приближенные формулы для дисперсионных соотношений.

- Показано, что в случае гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана дисперсионные кривые имеют волновое число отсечки. Теоретически обоснована возможность экспериментального определения времени релаксации теплового потока с использованием волнового числа отсечки.

Теоретическая и практическая значимость работы. Получены теоретические результаты, которые могут найти применение при экспериментальном определении времени релаксации теплового потока. Определены времена релаксации теплового потока, при которых отличие решения классической задачи термоупругости от решения задачи гиперболической термоупругости достаточно велико, чтобы по результатам измерений можно было оценить, какая из теорий предпочтительнее для решения данного класса задач.

Методология и методы исследования. Анализ дисперсионных соотношений производился асимптотическими методами. Решение динамических задач находилось численно, с использованием явной и неявной схемы метода

конечных разностей. Численный метод реализован на языке программирования Delphi.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Значение энергии облучения, при которой отклонение температуры от начального значения в решении задачи термоупругости Лорда-Шульмана находится в пределах применимости линейной теории.

2. Определение разницы высот пиков температуры в классической и гиперболической термоупругости.

3. Определение качественных различий решений задачи термоупругости Лорда-Шульмана, соответствующих четырем видам граничных условий.

4. Оценка влияния граничных условий на отличие между решениями задач классической и гиперболической термоупругости.

5. Оценка разницы перемещений, полученных в результате решения классической и гиперболической задачи термоупругости, в зависимости от расстояния между акустическим фронтом и тепловым.

6. Определение ускорений квазитеплового и квазиакустического фронтов термоупругой волны.

7. Результаты асимптотического анализа дисперсионных соотношений термоупругости Лорда-Шульмана при малых частотах и частотах стремящихся к бесконечности.

8. Приближенные формулы, аппроксимирующие дисперсионные кривые термоупругости Лорда-Шульмана во всем частотном диапазоне.

9. Теоретическое обоснование метода экспериментального определения времени релаксации теплового потока, основанного на использовании волнового числа отсечки.

Степень достоверности. Достоверность численных результатов обусловлена сравнением с аналитическим решением, а также сравнением результатов решения явной и неявной схемой интегрирования метода конечных разностей.

Апробация результатов. Основные результаты работы доложены на: XLI, XLIII, XLIV The International Summer School "Advanced Problems in Mechanics" (Санкт-Петербург, 2013, 2015 и 2016 гг.), XVII, XVIII, XIX зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2011, 2013 и 2015 гг.), XXXIX, XL, XLII Научно–практическая конференция с международным участием "Неделя науки СПбГПУ" (Санкт-Петербург, 2010, 2011 и 2013 гг.), Семинар кафедры МСС и ВТ ПГНИУ (Пермь, 2015, 2017 гг.), Семинар по прикладным задачам механики ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, 2015, 2017 гг.), Научный семинар кафедры "Теоретическая механика" СПбПУ (Санкт-Петербург, 2017 г.), Городской семинар по механике (Санкт-Петербург, 2017 г.), Семинар кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ (Санкт-Петербург, 2017 г.)

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в **3** научных статьях в журналах, рекомендованных ВАК [80–82].

Личный вклад автора. Участие в постановках задачи, численные расчеты, анализ полученных результатов

Структура и объем работы. Диссертация состоит из трех глав и заключения. Полный объем диссертации **114** страниц текста с **72** рисунками и **8** таблицами. Список литературы содержит **82** наименований.

Глава 1

Численное решение задачи гиперболической термоупругости в случае лазерного воздействия

1.1 Уравнения гиперболической теплопроводности и термоупругости

Получим уравнение теплопроводности, используя обобщенный закон Фурье (1). Для этого запишем уравнение баланса энергии для недеформируемой среды:

$$\rho \dot{U} = -\nabla \cdot \boldsymbol{h} + \rho q \tag{1.1}$$

Здесь U — массовая плотность внутренней энергии, ρ — плотность, q — массовая плотность внутренних источников тепла. Т.к. среда недеформируема, $\rho = \text{const}$.

В случаях, когда отклонения температуры от начального значения T^* малы, массовую плотность внутренней энергии можно представить следующим образом:

$$U = c_v \tilde{T}, \qquad \tilde{T} = T - T^* \tag{1.2}$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Подставим выражение (1.2) в уравнение баланса энергии (1.1). Используя полученное уравнение и обобщенный закон Фурье (1) получаем уравнение теплопроводности гиперболического типа, известное как уравнение Максвелла-Каттанео:

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_v \left(\dot{\tilde{T}} + \tau \ddot{\tilde{T}} \right) = -\rho \left(q + \tau \dot{q} \right) \tag{1.3}$$

Рассмотрим деформируемую среду с учетом тепловых воздействий. Будем считать, что среда упругая. Уравнение баланса энергии для такой среды имеет вид:

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{e}} - \nabla\cdot\mathbf{h} + \rho q \tag{1.4}$$

Существуют различные способы введения температуры и энтропии [68, 69]. В случае упругой среды все они приводят к одним и тем же результатам. Рассмотрим способ, предложенный Жилиным [75, 76]:

$$\rho T\dot{H} = -\nabla\cdot\mathbf{h} + \rho q, \tag{1.5}$$

где H — массовая плотность энтропии. Перепишем уравнение баланса энергии (1.4) с учетом (1.5)

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{e}} + \rho T\dot{H} \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) называется приведенным уравнением баланса энергии.

Рассмотрим упругий материал. Тогда внутренняя энергия будет зависеть только от деформаций и энтропии. Тогда производная по времени от внутренней энергии представляется так:

$$\rho\dot{U} = \frac{\partial\rho U}{\partial\boldsymbol{e}}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{e}} + \frac{\partial\rho U}{\partial H}\dot{H} \tag{1.7}$$

Вычтем из (1.6) уравнение (1.7)

$$0 = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial\rho U}{\partial\boldsymbol{e}}\right)\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{e}} + \left(\rho T - \frac{\partial\rho U}{\partial H}\right)\dot{H} \tag{1.8}$$

Выражения в скобках в (1.8) не зависят от $\dot{\boldsymbol{e}}$ и $\dot{H}$. Таким образом из (1.8) можно получить соотношения Коши-Грина

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\rho U}{\partial\boldsymbol{e}}, \qquad \rho T = \frac{\partial\rho U}{\partial H} \tag{1.9}$$

Разложим функцию внутренней энергии в ряд Тейлора, и, т.к. в рамках линейной теории $\boldsymbol{e}$ и H малы, ограничимся только квадратичными слагаемыми

$$\rho U = \rho T^{*}H + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}\cdot\cdot{}^{4}\boldsymbol{C}\cdot\cdot\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\cdot\cdot\boldsymbol{C}_{*}H + \frac{1}{2}\tilde{C}H^{2} \tag{1.10}$$

Подставив (1.10) в (1.9), получим выражения для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и температуры $\tilde{T}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{C}_* H, \tag{1.11}$$

$$\rho\tilde{T} = \boldsymbol{e} \cdot\cdot \boldsymbol{C}_* + \tilde{C} H, \tag{1.12}$$

Далее будем рассматривать изотропный материал. В этом случае все материальные тензоры являются изотропными и выражения (1.11), (1.12) упрощаются:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(K_{ad} - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon\boldsymbol{E} + 2G\boldsymbol{e} + C_* H\boldsymbol{E}, \tag{1.13}$$

$$\rho\tilde{T} = C_*\varepsilon + \tilde{C}H. \tag{1.14}$$

Здесь K_{ad} — адиабатический модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига, $\varepsilon = \operatorname{tr}\boldsymbol{e}$, $C_* = 1/3\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_*$. Из (1.14) получим выражение для энтропии:

$$H = \frac{1}{\tilde{C}}\rho\tilde{T} - \frac{C_*}{\tilde{C}}\varepsilon \tag{1.15}$$

В таком случае, учитывая, что $\tilde{T}$ — малая величина:

$$\rho T\dot{H} = \rho T^* \left(\frac{1}{\tilde{C}}\rho\dot{\tilde{T}} - \frac{C_*}{\tilde{C}}\dot{\varepsilon}\right) \tag{1.16}$$

Вычислим дивергенцию от (1):

$$\tau(\nabla\cdot\mathbf{h})^{\cdot} + \nabla\cdot\mathbf{h} = -\lambda\Delta\tilde{T} \tag{1.17}$$

Теперь подставим (1.16) в (1.5):

$$\frac{\rho^2 T^*}{\tilde{C}}\dot{\tilde{T}} - \frac{\rho T^* C_*}{\tilde{C}}\dot{\varepsilon} = -\nabla\cdot\mathbf{h} + \rho q, \tag{1.18}$$

Вычислим производную по времени от (1.18), результат умножим на τ и сложим с (1.18):

$$\frac{\rho^2 T^*}{\tilde{C}}\left(\dot{\tilde{T}} + \tau\ddot{\tilde{T}}\right) - \frac{\rho T^* C_*}{\tilde{C}}\left(\dot{\varepsilon} + \tau\ddot{\varepsilon}\right) = -\left(\tau(\nabla\cdot\mathbf{h})^{\cdot} + \nabla\cdot\mathbf{h}\right) + \tau\rho\dot{q} + \rho q \tag{1.19}$$

Исключим из (1.19) тепловой поток используя (1.17). Таким образом получим уравнение теплопроводности с учетом деформируемости среды

$$-\lambda\Delta\tilde{T}+\frac{\rho^2T^*}{\tilde{C}}\left(\dot{\tilde{T}}+\tau\ddot{\tilde{T}}\right)-\frac{\rho T^*C_*}{\tilde{C}}\left(\dot{\varepsilon}+\tau\ddot{\varepsilon}\right)=\rho\left(q+\tau\dot{q}\right). \tag{1.20}$$

Константы $\tilde{C}$ и C_* выражаются через термодинамические параметры по следующим формулам:

$$\tilde{C}=\frac{\rho T^*}{c_v},\qquad C_*=-\frac{\alpha K_{iz}T^*}{c_v}, \tag{1.21}$$

где K_{iz} — изотермический модуль объемного сжатия, α — объемный коэффициент теплового расширения. С учетом (1.21) уравнение (1.20) принимает вид:

$$\lambda\Delta\tilde{T}-\rho c_v\left(\dot{\tilde{T}}+\tau\ddot{\tilde{T}}\right)-\alpha K_{iz}T^*\left(\dot{\varepsilon}+\tau\ddot{\varepsilon}\right)=-\rho\left(q+\tau\dot{q}\right) \tag{1.22}$$

Получим уравнение, описывающие упругие колебания среды. Уравнение динамики сплошной среды в локальной форме выглядит следующим образом:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{f}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{1.23}$$

где $\boldsymbol{f}$ — вектор массовой плотности объемных сил, $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений.

Связь между напряжениями, деформацией и температурой, известная как закон Дюамеля-Неймана, может быть получена, если выражение для энтропии (1.15) подставить в (1.13) и учесть связь между адиабатическим и изотермическим модулями объемного сжатия:

$$\boldsymbol{\sigma}=\left(K_{iz}-\frac{2}{3}G\right)\varepsilon\boldsymbol{E}+2G\boldsymbol{e}-\alpha K_{iz}\tilde{T}\boldsymbol{E}. \tag{1.24}$$

Подставим закон Дюамеля-Неймана (1.24) в уравнение движения (1.23) без учета объемных сил:

$$\left(K_{iz}-\frac{2}{3}G\right)\nabla\varepsilon+2G\nabla\cdot\boldsymbol{e}-\alpha K_{iz}\nabla\tilde{T}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}. \tag{1.25}$$

Применим к (1.25) оператор дивергенции. В итоге получим уравнение, описывающее объемную деформацию термоупругой среды:

$$\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)\Delta\varepsilon-\alpha K_{iz}\Delta\tilde{T}=\rho\ddot{\varepsilon} \tag{1.26}$$

Вычислив ротор от (1.23), получим уравнение для сдвиговых колебаний. В этом уравнении отсутствует температурное слагаемое. Однако изменение температуры может оказывать влияние на сдвиговую деформацию, потому что

уравнения для сдвиговой и объемной деформации в общем случае связаны между собой граничными условиями. В дальнейшем рассматриваются такие граничные условия, при которых задачи о сдвиговой и объемной деформации независимы.

Для нахождения аналитического решения удобно оперировать уравнением движения в терминах напряжений. Вычислим след от (1.24) и выразим деформацию через напряжения и температуру. Полученное подставим в уравнения (1.22) и (1.26). В итоге записанная через напряжения система уравнений связанной задачи гиперболической термоупругости в случае объемной деформации принимает вид:

$$\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)\Delta\sigma-\alpha K_{iz}\rho\ddot{\tilde{T}}-\rho\ddot{\sigma}=0$$

$$\lambda\Delta\tilde{T}-\left(\frac{\alpha^2K_{iz}^2T^*}{K_{iz}+\frac{4}{3}G}+\rho c_v\right)\left(\dot{\tilde{T}}+\tau\ddot{\tilde{T}}\right)-\frac{\alpha K_{iz}T^*}{K_{iz}+\frac{4}{3}G}\left(\dot{\sigma}+\tau\ddot{\sigma}\right)=-\rho\left(q+\tau\dot{q}\right), \tag{1.27}$$

где $\sigma=1/3\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}$.

Если в системе уравнений (1.27) устремить время релаксации теплового потока τ к нулю, то решение данной системы будет стремиться к решению классической задачи термоупругости параболического типа.

1.2 Постановка задачи

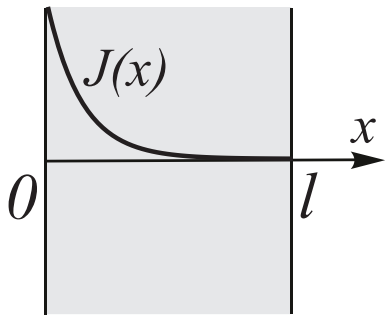

Рисунок 1.1: Задача гиперболической термоупругости для бесконечного слоя, находящегося под воздействием лазерного излучения

Рассмотрим бесконечный слой, который подвергается лазерному воздействию. Предположим, что в случае, когда слой облучается равномерно по всей поверхности, волна будет распространяться только вдоль оси x. Воздействие лазера на термоупругую среду моделируется с помощью закона Бугера (рис. 2.1):

$$J(x) = J_0 e^{-\gamma x},$$

где J_0 — интенсивность лазерного воздействия, γ — коэффициент поглощения среды. Разумеется, величина J_0 зависит не только от свойств лазера, но от свойств поверхности. Часть излучения, падающего на облучаемую поверхность отражается от нее, а часть проникает в материал. Для формулировки задачи о распространении термоупругих волн в материале представляет интерес интенсивность лазерного воздействия, проникающего в материал. Именно такой смысл имеет величина J_0. Зависимость лазерного воздействия от времени достаточно сложна и поэтому, как правило, она не учитывается, а под J_0 подразумевается усредненная характеристика. В работах экспериментаторов обычно приводятся две характеристики кратковременного лазерного воздействия: длительность воздействия δ_0 и энергия E_0, поглощенная единицей площади поверхности материала за все время воздействия. Таким образом интенсивность лазерного воздействия считается функцией вида

$$\tilde{J}(x,t) = \begin{cases} J_0 e^{-\gamma x}, & 0 \le t \le \delta_0; \\ 0, & t > \delta_0. \end{cases}$$

Тогда

$$E(x) \equiv \int_0^\infty \tilde{J}(x,t)dt = J_0 \delta_0 e^{-\gamma x} \quad \Rightarrow \quad E_0 \equiv E(0) = J_0 \delta_0.$$

При аналитическом исследовании подобных процессов зависимость воздействия от времени обычно задается с помощью дельта-функции Дирака $\delta(t-0)$, так как именно такая аппроксимация кратковременного воздействия позволяет строить точные решения задач. При этом постоянный коэффициент выбирается таким образом, чтобы энергия E_0, поглощенная единицей площади поверхности материала за все время воздействия, соответствовала бы экспери-

ментальным данным. Нетрудно убедиться, что функция $J(x,t)$, удовлетворяющая перечисленным условиям, имеет вид:

$$\hat{J}(x,t) = E_0 e^{-\gamma x}\delta(t-0). \tag{1.28}$$

Действительно,

$$E(x) \equiv \int_0^\infty \hat{J}(x,t)dt = E_0 e^{-\gamma x}.$$

Далее для интенсивности лазерного воздействия будет использоваться формула (1.28). Связь между скоростью подвода тепла $\rho q(x,t)$, приходящегося на единицу объема, и интенсивностью лазерного облучения определяется уравнением баланса энергии

$$\hat{J}(x,t) - \rho q(x,t)dx - \hat{J}(x+dx,t) = 0.$$

Разложив в ряд Тейлора функцию $\hat{J}(x+dx,t)$, с учетом формулы (1.28) получим

$$E_0 e^{-\gamma x}\delta(t-0) - \rho q(x,t)dx - E_0 e^{-\gamma x}\delta(t-0)(1-\gamma dx) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$q(x,t) = \frac{E_0\gamma}{\rho}e^{-\gamma x}\delta(t-0), \qquad E_0 = J_0\delta_0. \tag{1.29}$$

Выражение (2.4) для плотности внутренних источников тепла хорошо известно в литературе — см., например, [18].

Уравнения (1.27) в случае, когда волны распространяются только вдоль оси x, записываются в виде:

$$\begin{gathered}\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} - \alpha K_{iz}\rho\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial t^2} - \rho\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = 0\\ \frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial x^2} - \left(\frac{\alpha^2 K_{iz}^2 T^*}{\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)\lambda} + \frac{\rho c_v}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t} + \tau\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial t^2}\right) - \\ -\frac{\alpha K_{iz}T^*}{\lambda\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \tau\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}\right) = -\frac{\rho}{\lambda}\left(q + \tau\frac{\partial q}{\partial t}\right)\end{gathered} \tag{1.30}$$

Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ будет иметь три ненулевые компоненты:

$$\sigma_{xx} = \left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon - \alpha K_{iz}\tilde{T},$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(K_{iz} - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon - \alpha K_{iz}\tilde{T}, \tag{1.31}$$

где $\varepsilon = \partial u/\partial x$. В дальнейшем будем рассматривать только осевые напряжения σ_{xx} и введем обозначение $\sigma = \sigma_{xx}$.

В качестве термомеханических характеристик среды принимаем параметры меди: модуль Юнга $E = 127$ ГПА, коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$, плотность $\rho = 8960$ кг/м^3, коэффициент теплопроводности $\lambda = 401$ Вт/(м·К), объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = 49.5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 390$ Дж/К, постоянная поглощения излучения средой $\gamma = 11.7$ мкм$^{-1}$, ширина полосы $l = 1$ мкм.

В экспериментальных [18, 19, 59] и теоретических [61–65] работах приводятся различные данные о времени релаксации теплового потока для металлов, которые находятся в пределах от 10^{-8} до 10^{-12} с. На основании этих данных примем в качестве τ среднее значение из этого интервала — 0.1 нс.

Энергия облучения E_0 принимается равной 0,15 Дж/м^2. В таком случае отклонение температуры находится в пределах от 0 до 10 °C на всем временном интервале. Это позволяет рассматривать распространение термоупругих волн в пределах линейной теории. Поскольку все представленные ниже результаты получены в рамках линейной теории, изменение энергии облучения не окажет качественного влияния на характер решения задач. Чтобы получить решение при иных значениях энергий облучения, достаточно умножить результат численных расчетов на коэффициент, который показывает во сколько раз отличается заданное значение энергии облучения от интересующей. Полеткин в работе [59] указывает, что использовал для облучения золотых пленок энергию воздействия 0,4 Дж/м^2, что примерно соответствует используемому нами уровню воздействия. Однако в работе [18] говорится об энергии воздействия порядка 10 Дж/м^2. По-видимому, это связано с тем, что экспериментаторы имели возможность измерять температуру только на границе, противоположной облу-

чаемой, и в своих оценках они исходили именно из этих значений температуры. При воздействиях порядка 10 Дж/м^2 отклонение температуры на границе, противоположной облучаемой, действительно будет находится в пределах 10 °C. Что касается температуры внутри слоя, то ее значения зависят того, по какой теории они вычисляются. Максимальные температуры, вычисленные по классической теории, существенно меньше максимальных значений температуры, вычисленных по теории гиперболического типа. Значение энергии воздействия было выбрано нами на два порядка меньше, чем в [18], чтобы отклонения температуры, определяемые гиперболической теплопроводностью, были в пределах 10 °C во все моменты времени во всех точках полосы.

1.3 Численный метод

В уравнении теплопроводности в (1.30) при вторых производных по времени присутствует малый параметр τ, а в правой части уравнения находится источниковый член в виде дельта-функции, что ухудшает сходимость решения. Поэтому, для нахождения численного решения системы (1.30) представим ее в безразмерном виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial s^2}-\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\theta^2}-b\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}=0\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+d\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}\right)-a\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}+d\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\theta^2}\right)=-\left(q^*+d\frac{\partial q^*}{\partial\theta}\right)\end{gathered}\tag{1.32}$$

где ζ, s, θ, q^* - безразмерные температура, координата, время и источниковый член соответственно. Они связаны с размерными величинами следующим образом:

$$\zeta=k_1\tilde{T},\qquad s=k_2x,\qquad \theta=k_3t,\tag{1.33}$$

где коэффициенты, связывающие безразмерные и размерные величины даются выражениями:

$$k_1=\alpha,\qquad k_2=\frac{c_v}{\lambda}\sqrt{\rho\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)},\qquad k_3=\frac{c_v}{\lambda}\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right).\tag{1.34}$$

Безразмерные коэффициенты выглядят так:

$$a = \frac{c_p - c_v}{c_v}, \qquad b = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\frac{G}{K_{iz}}},$$
$$d = k_3\tau, \qquad q^* = \frac{\alpha}{c_v}\frac{E_0\gamma}{\rho}e^{-\gamma s}\delta(\theta - 0). \tag{1.35}$$

Для нахождения решения системы уравнений (1.32) воспользуемся как явной, так неявной схемой интегрирования метода конечных разностей. В неявной схеме интегрирования производные заменяются следующими выражениями:

$$f' = \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{2h}, \qquad f'' = \frac{f_{i+1}^{k+1} - 2f_i^{k+1} + f_{i-1}^{k+1}}{h^2},$$
$$\dot{f} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}, \qquad \ddot{f} = \frac{f_i^{k+1} - 2f_i^k + f_i^{k-1}}{\Delta t^2}, \tag{1.36}$$

где $f = f(x,t)$ — искомая функция, h — шаг интегрирования по пространству, Δt — шаг интегрирования по времени, i — номер узла сетки, k — номер временного слоя. Аппроксимация производных конечными разностями вида (1.36) приводит систему уравнений в частных производных (1.32) к системе линейных алгебраических уравнений:

$$-\mathbf{A}\mathbf{X}_{i+1}^{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{X}_i^{k+1} - \mathbf{C}\mathbf{X}_{i-1}^{k+1} = \mathbf{F}_i, \tag{1.37}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — матрицы 2×2 с коэффициентами уравнений, $\mathbf{X} = (\tilde{T}, \varepsilon)^T$ — вектор-столбец неизвестных, $\mathbf{F}_i$ — вектор-столбец свободных членов. Корни СЛАУ (1.37) находятся с помощью метода матричной прогонки. Этот метод состоит из прямого и обратного хода. На прямом ходе находятся прогоночные коэффициенты:

$$\mathbf{P}_i = (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{P}_{i-1})^{-1}\mathbf{C}, \qquad \mathbf{Q}_i = (\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{P}_{i-1})^{-1}(\mathbf{F}_i + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{i-1}),$$
$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}, \qquad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{B}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}, \qquad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{A}\mathbf{X}_0^{k+1}, \tag{1.38}$$

где $\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{Q}_i$ — матрица 2×2 и вектор-столбец прогоночных коэффициентов соответственно. На обратном ходе прогонки находятся искомые величины:

$$\mathbf{X}_{N-1}^{k+1} = \mathbf{Q}_{N-1}, \qquad \mathbf{X}_i^{k+1} = \mathbf{P}_i\mathbf{X}_{i+1}^{k+1} + \mathbf{Q}_i, \qquad i = (1, N-1). \tag{1.39}$$

В явной схеме интегрирования производные заменяются следующими выражениями:

$$f' = \frac{f_{i-1}^k - f_{i+1}^k}{2h}, \qquad f'' = \frac{f_{i-1}^k - 2f_i^k + f_{i+1}^k}{h^2},$$
$$\dot{f} = \frac{f_i^{k-1} - f_i^{k+1}}{2\Delta t}, \qquad \ddot{f} = \frac{f_i^{k+1} - 2f_i^k + f_i^{k-1}}{\Delta t^2}. \tag{1.40}$$

Такая схема позволяет явным образом выразить неизвестные на новом временном слое через известные величины, найденные на предыдущих шагах по времени. Такая схема существенно проще в реализации, чем (1.36), однако устойчивость метода достигается только при соблюдении условия Куранта:

$$\Delta t \ll \frac{h}{c_{ac}}, \qquad c_{ac} = \sqrt{(K_{iz} + 4/3G)/\rho}, \tag{1.41}$$

где c_{ac} — скорость звука в среде.

Дельта-функция и производная от дельта-функции моделируются на первых двух шагах по времени как функции с амплитудой $1/(2\Delta t)$ и $\pm 1/(\Delta t)^2$ соответственно (рис. 1.2).

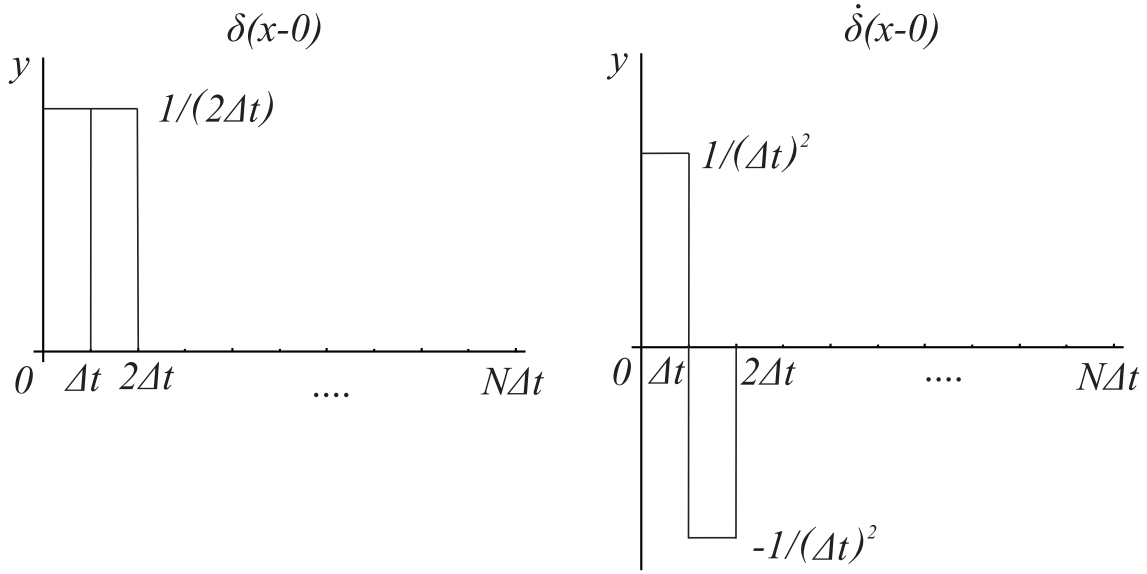

Рисунок 1.2: Моделирование дельта-функции Дирака

Описанные численные методы реализованы в авторской программе на языке программирования Delphi.

1.4 Сравнение результатов расчетов, полученных с использованием явной и неявной схемы интегрирования

Будем считать, что в начальный момент времени слой находился в невозмущенном состоянии, а его границы свободны от нагрузок, и на них поддерживается постоянная температура. Тогда начальные условия будут однородные, а граничные имеют вид:

$$\sigma\big|_{x=0} = 0; \quad \sigma\big|_{x=l} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=0} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=l} = 0; \tag{1.42}$$

Для того, чтобы оценить погрешность численного решения задачи (1.32), (2.3) производилось сравнение с аналитическим решением аналогичной задачи, опубликованным в [80]. На рис. 1.3 — 1.10 и 1.11 — 1.14 представлено сравнение численного решения с аналитическим. Графики 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, 1.11 и 1.13 построены при значениях времени $t = \tau = 0.1$ нс, а графики 1.4, 1.6, 1.8, 1.10, 1.12 и 1.14 — при значениях времени $t = 2\tau = 0.2$ нс. На рис. 1.3, 1.4, 1.7, 1.8, 1.11 и 1.12 показано численное решение, для получения которого использовалась конечно-разностная сетка, состоящая из 1000 узлов по пространству и 10 000 узлов по времени. Решение на рис. 1.5, 1.6, 1.9, 1.10, 1.13, 1.14 построено с помощью сетки с 10 000 узлами по пространству и 100 000 узлами по времени.

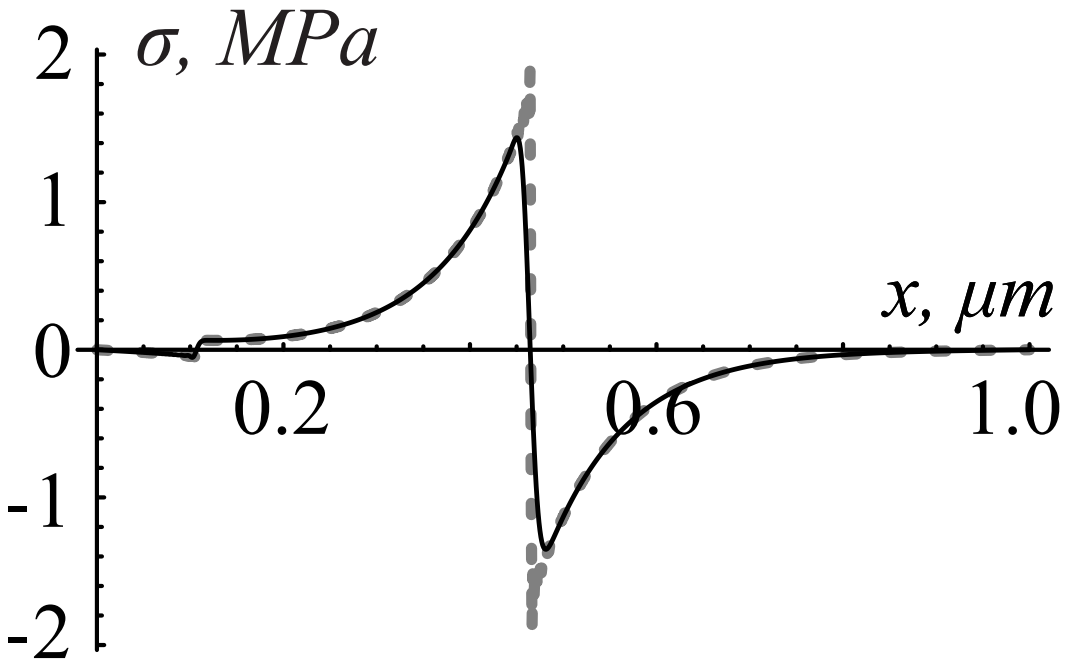

Рисунок 1.3: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

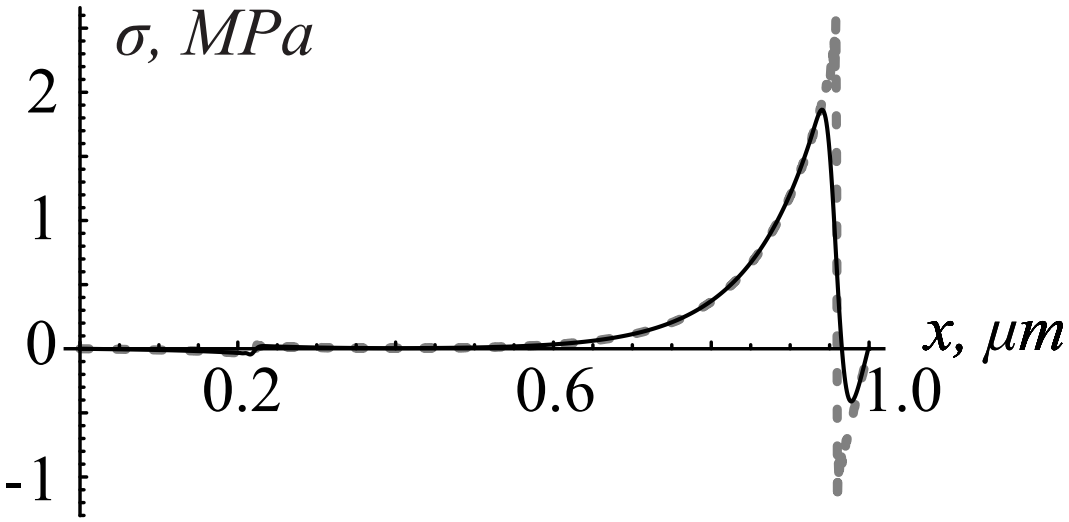

Рисунок 1.4: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

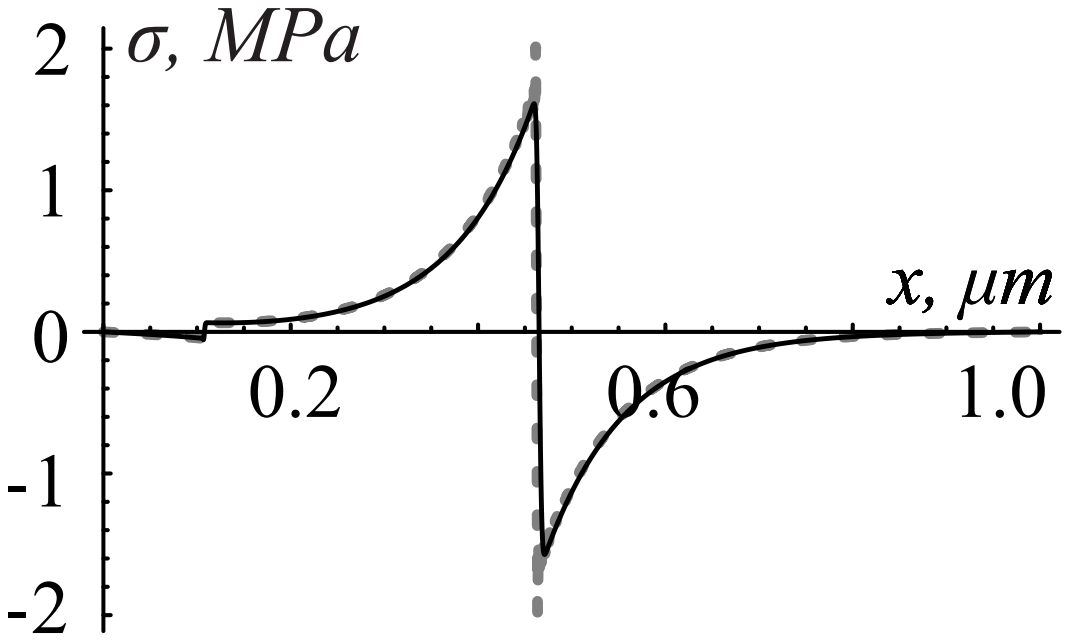

Рисунок 1.5: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

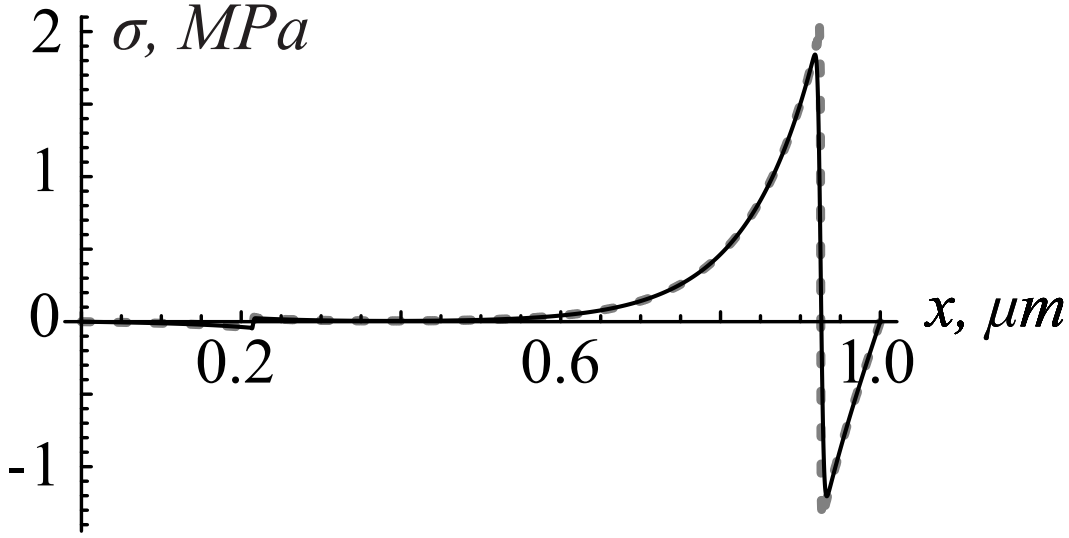

Рисунок 1.6: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

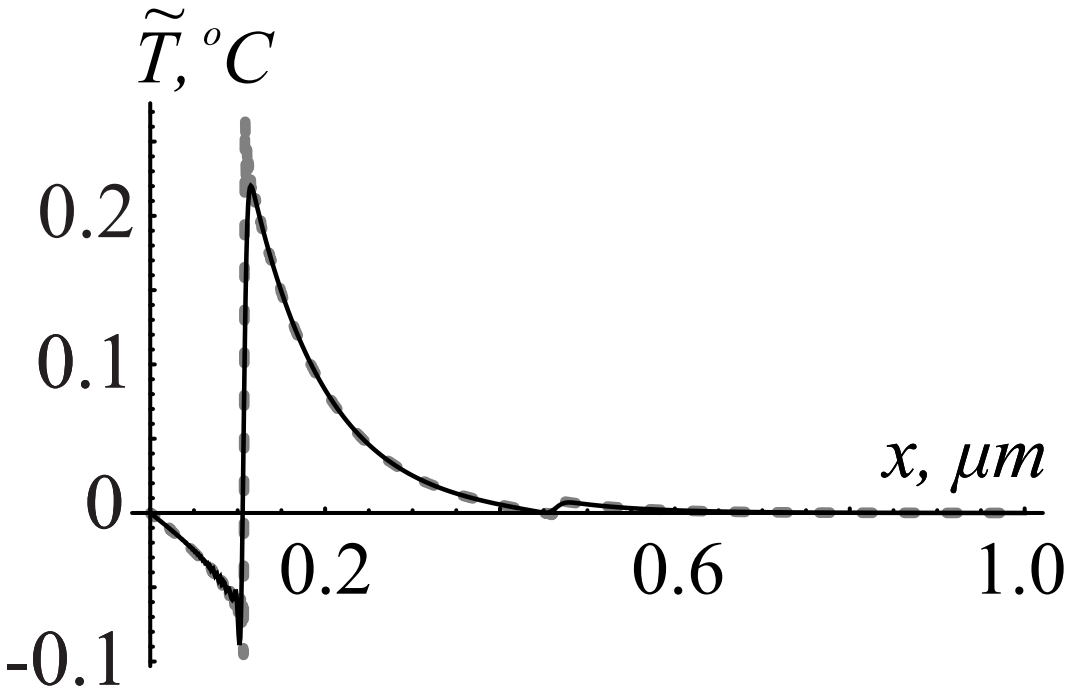

Рисунок 1.7: Температуры, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

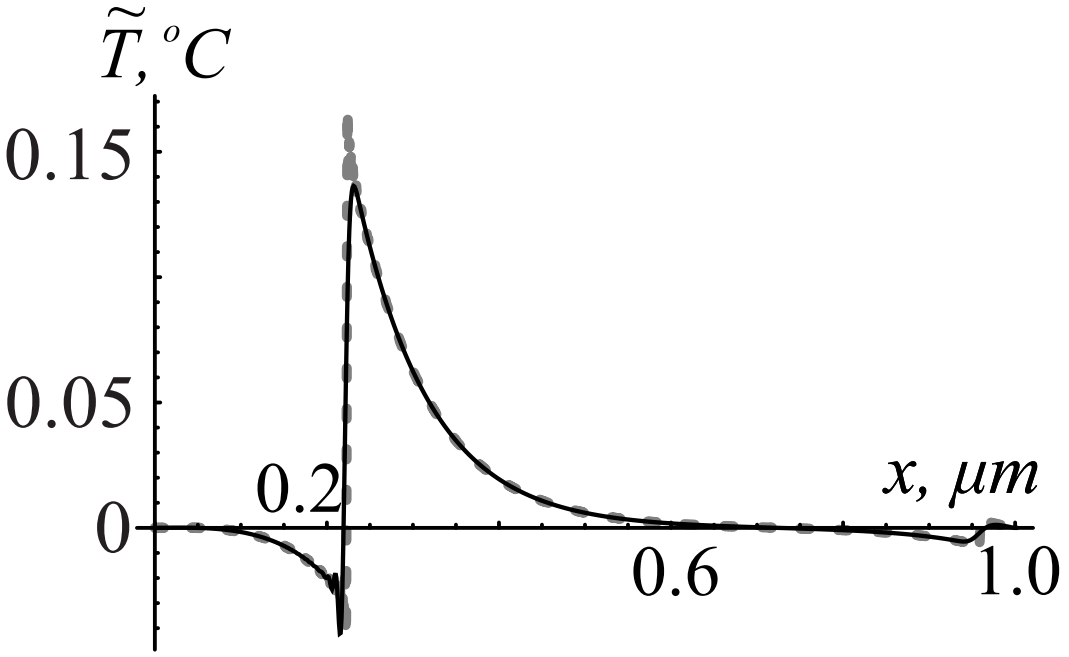

Рисунок 1.8: Температуры, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

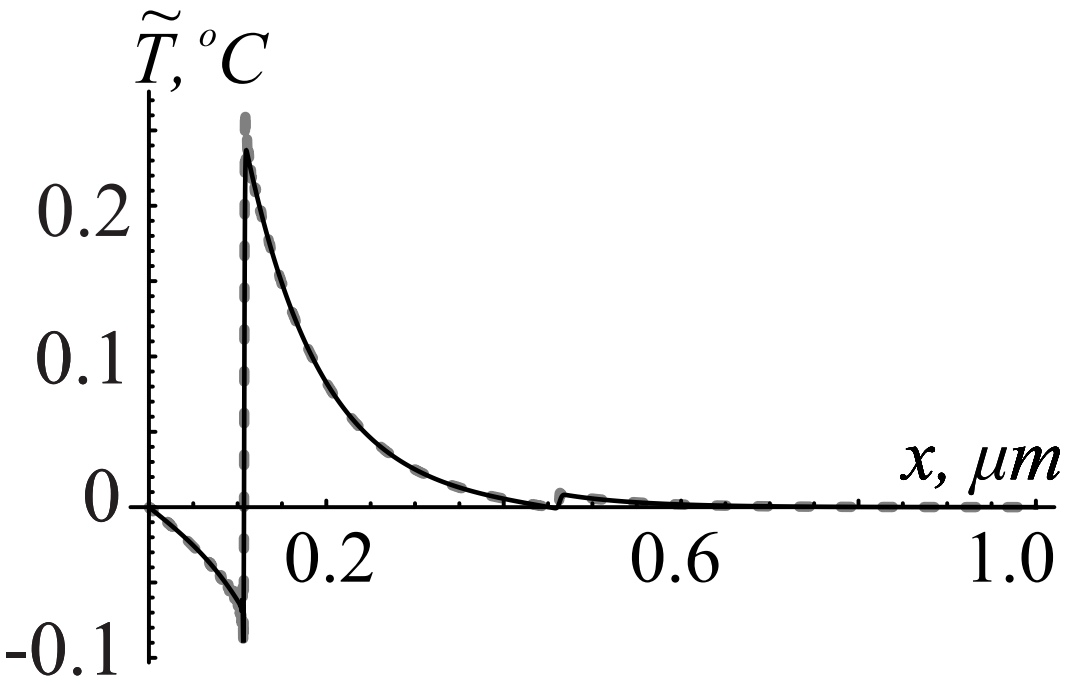

Рисунок 1.9: Температуры, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

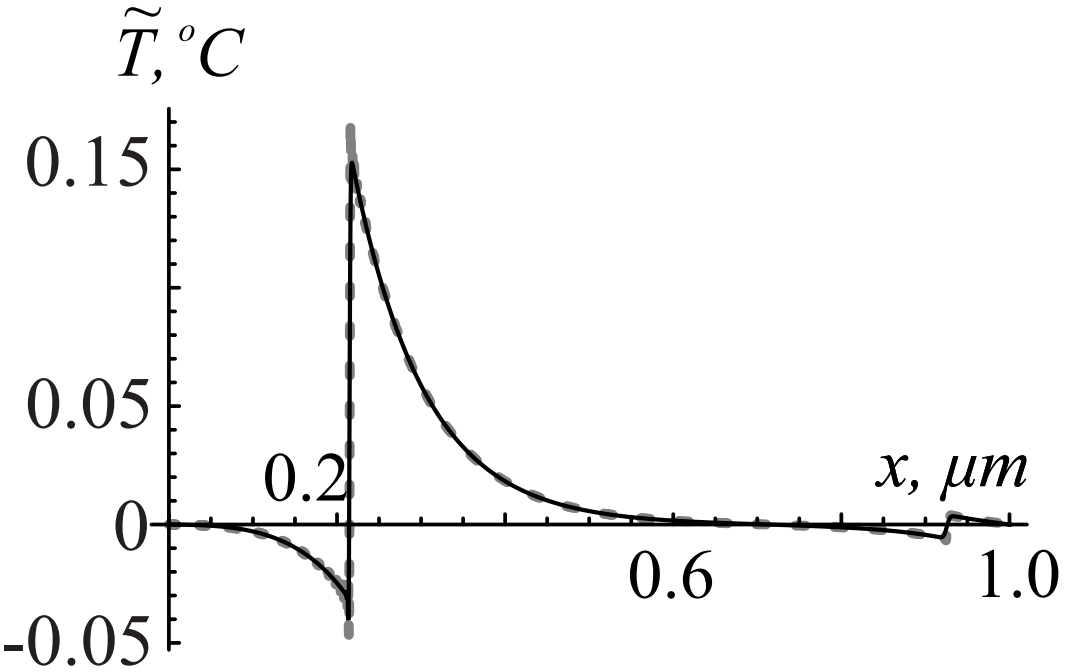

Рисунок 1.10: Температуры, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

По графикам на рис. 1.3 — 1.6 и 1.7 — 1.10 можно судить о том, что неявная схема интегрирования позволяет получить численное решение качественно совпадающие с аналитическим даже при самой грубой дискретизации, которая была использована в исследовании. Имеется совпадение количества экстремумов, а также скоростей квазитеплового и квазиакустического фронтов. Однако наблюдается различие в максимальных и минимальных значениях и отклонение фронтов от вертикальной линии. При измельчении сетки эти отличия уменьшаются, о чем можно судить, сравнив графики 1.3, 1.4 с графиками 1.5 и 1.6.

Погрешность численного решения определялась как отношение эвклидовой нормы разности численного и аналитического решения к норме аналитического решения:

$$P\left(f_{num}, f_{an}\right) = \frac{||f_{an} - f_{num}||}{||f_{an}||} \cdot 100\%, \tag{1.43}$$

где f_{an} — величина, найденная в результате аналитического решения задачи, f_{num} -- величина, найденная численным методом.

Норма $||\cdot||$ функции f в момент времени t^*, вычисляется следующим образом:

$$||f|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i^2\left(x^*, t^*\right)}. \tag{1.44}$$

Зависимость погрешности от шага интегрирования по пространству и времени при использовании явной и неявной схемы интегрирования показана на рис. 1.15 — 1.17. При расчетах явной схемой использовалось условие Куранта (1.41) с коэффициентом 0.1, т.е. шаг по времени $\Delta t = 0.1 \cdot h/c_{ac}$. Для того, чтобы сравнить погрешность вычислений двумя разными схемами интегрирования для неявной схемы использовалось то же соотношение размеров шага по пространству и времени, что и для явной.

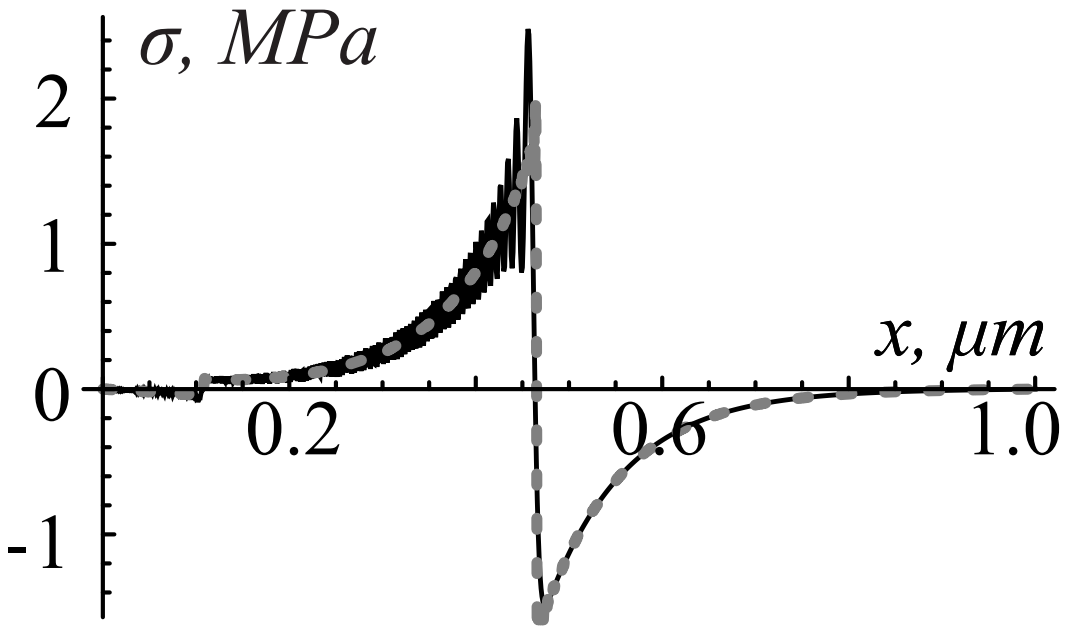

Рисунок 1.11: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования явной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

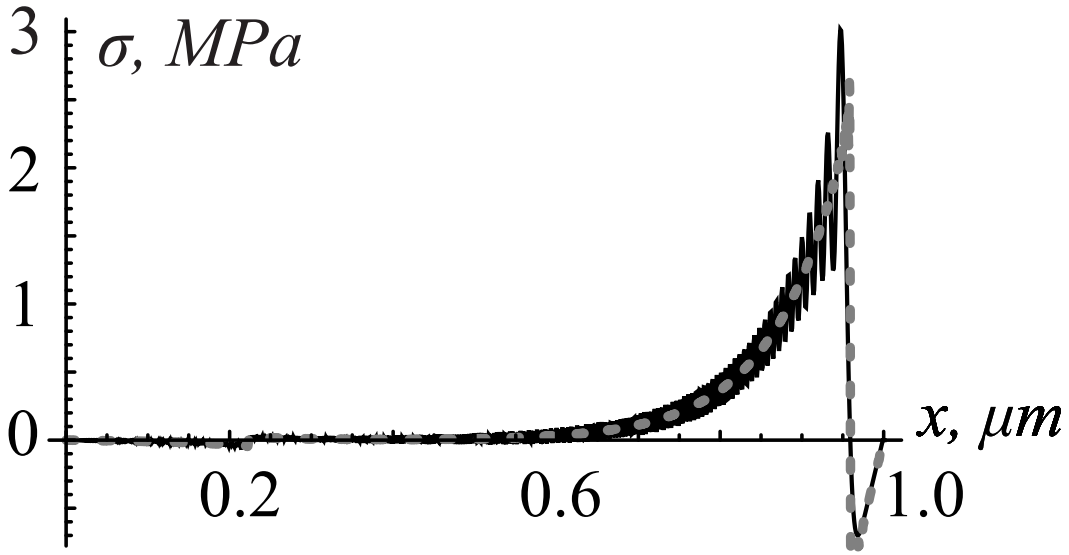

Рисунок 1.12: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования явной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

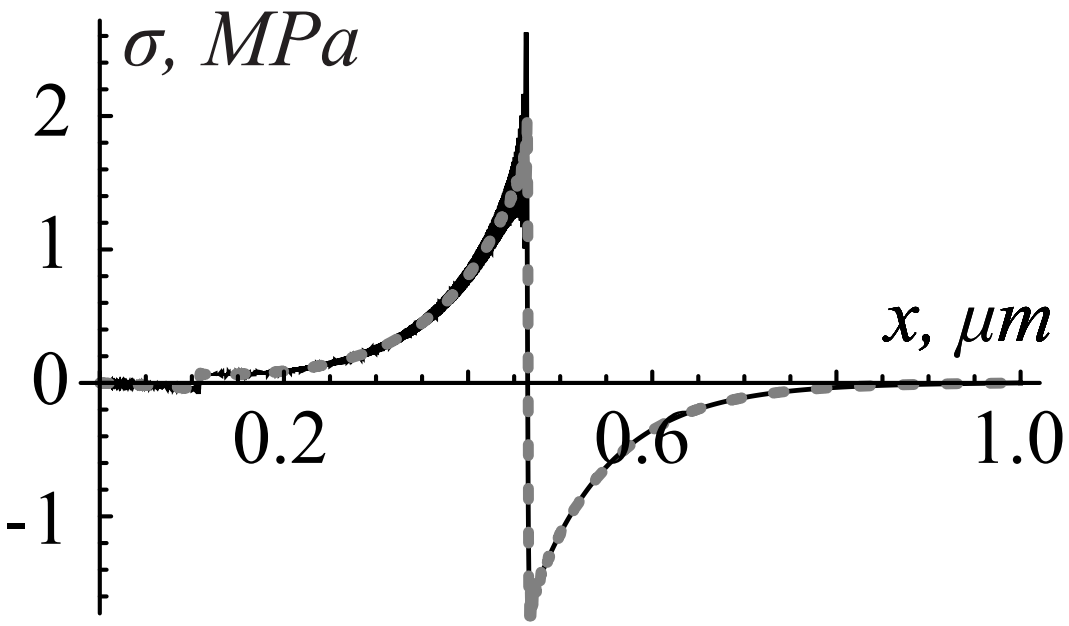

Рисунок 1.13: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования явной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

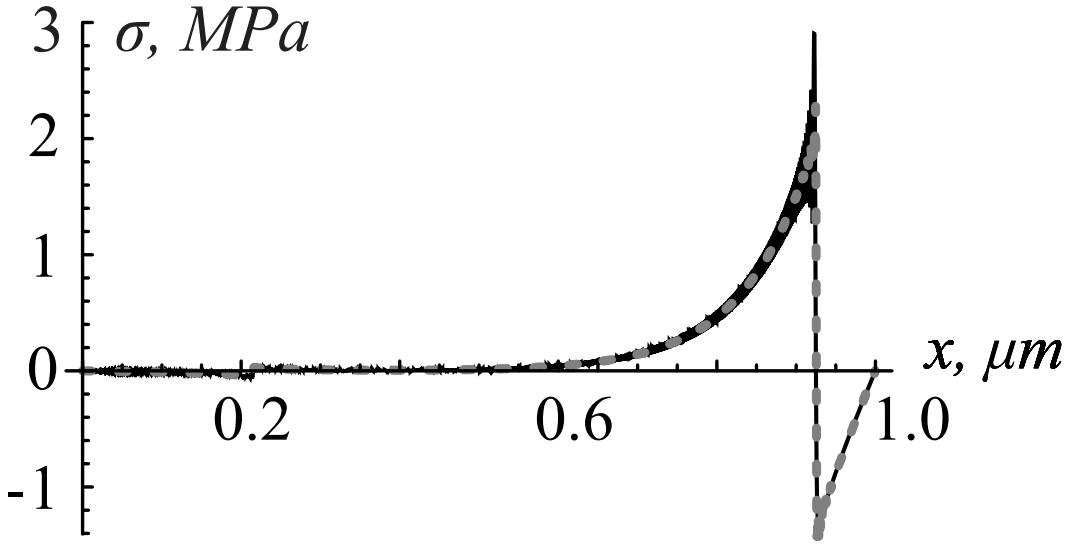

Рисунок 1.14: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования явной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

Измельчение шага интегрирования позволяет добиться уменьшение погрешности численного счета (рис. 1.15 — 1.17). Наименьшая погрешность наблюдается при нахождении температур, а наибольшая — при нахождении напряжений.

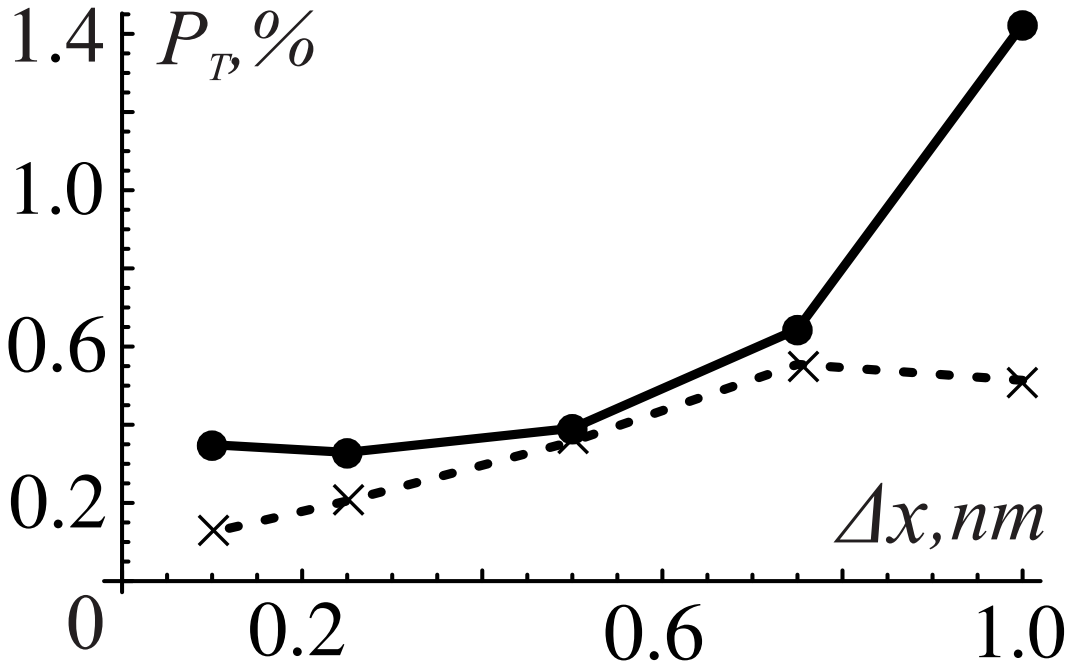

Рисунок 1.15: Погрешность определения температур в зависимости от шага по пространству. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной.

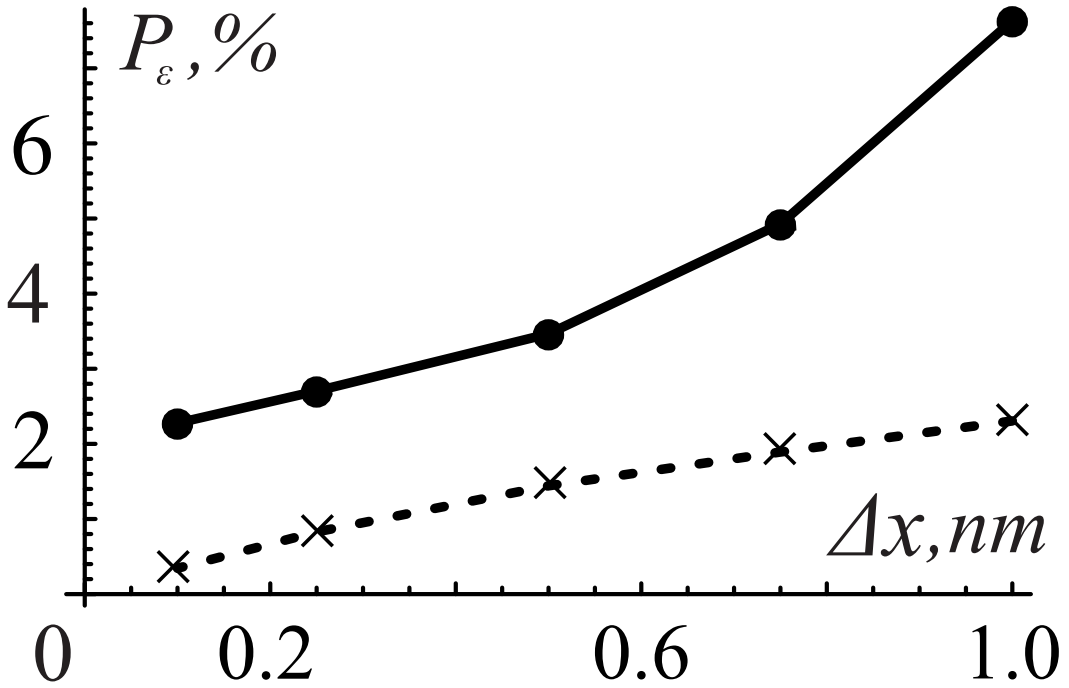

Рисунок 1.16: Погрешность определения деформаций в зависимости от шага по пространству. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной.

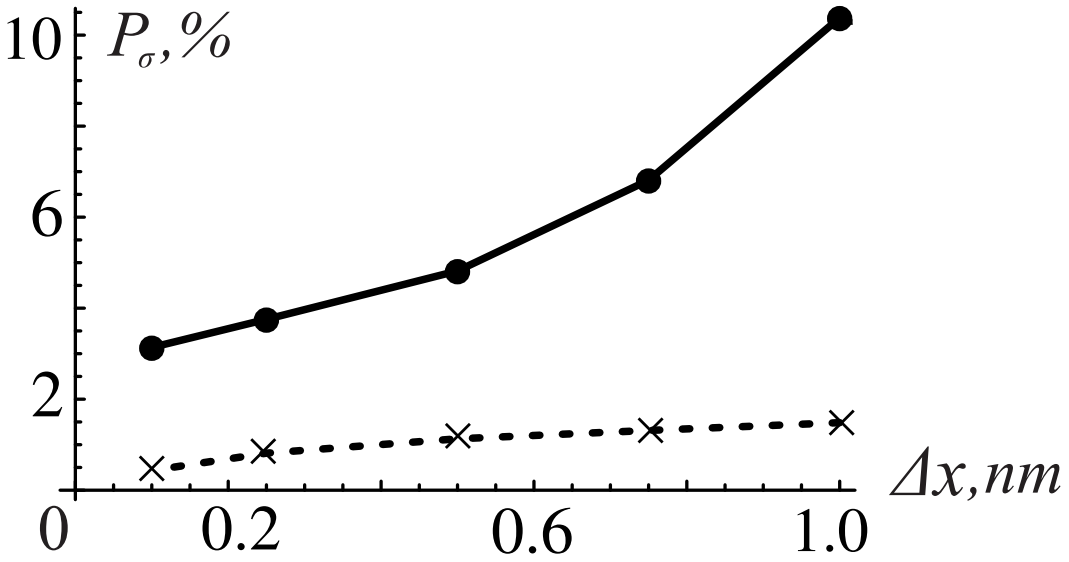

Рисунок 1.17: Погрешность определения напряжений в зависимости от шага по пространству. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной

Неявная схема позволяет находить температуры с меньшей погрешностью при всех рассмотренных шагах интегрирования. С другой стороны при определении напряжений и деформаций погрешность, получаемая при интегрировании явной и неявной схемой при самых мелких и самых грубых шагах практически равна. Интегрирование явной схемой приводит к возникновению сильных осцилляций в окрестности скачка (см. рис. 1.11 — 1.14), которые вносят существенный вклад в погрешность решения. При измельчении шага интегрирования амплитуда осцилляций уменьшается, а их частота — увеличивается, что приводит к уменьшению погрешности. Неявная схема позволяет избавиться от этих осцилляций, однако при грубых шагах имеется худшее совпадение амплитуд с аналитическим решением, по сравнению с результатами, получаемыми интегрированием явной схемой. При мелких шагах по пространству и по времени при использовании явной схемы осцилляции вносят вклад в погрешность соизмеримый с тем вкладом, который дает отличие амплитуд численного решения неявной схемой от аналитического.

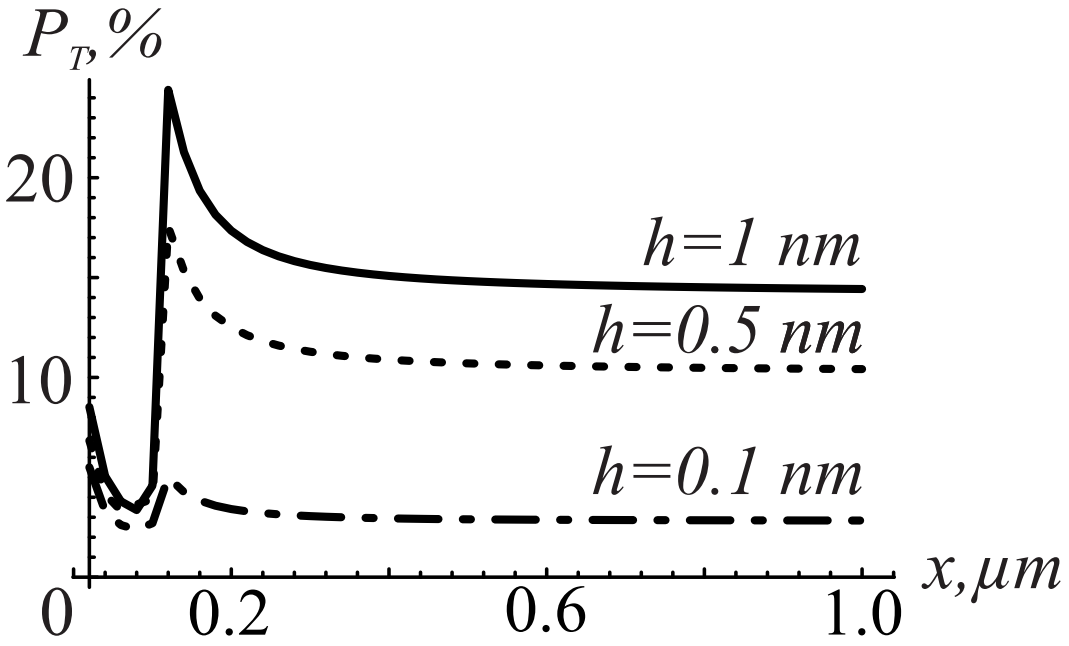

Рисунок 1.18: Погрешность определения температур в зависимости от координаты. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной

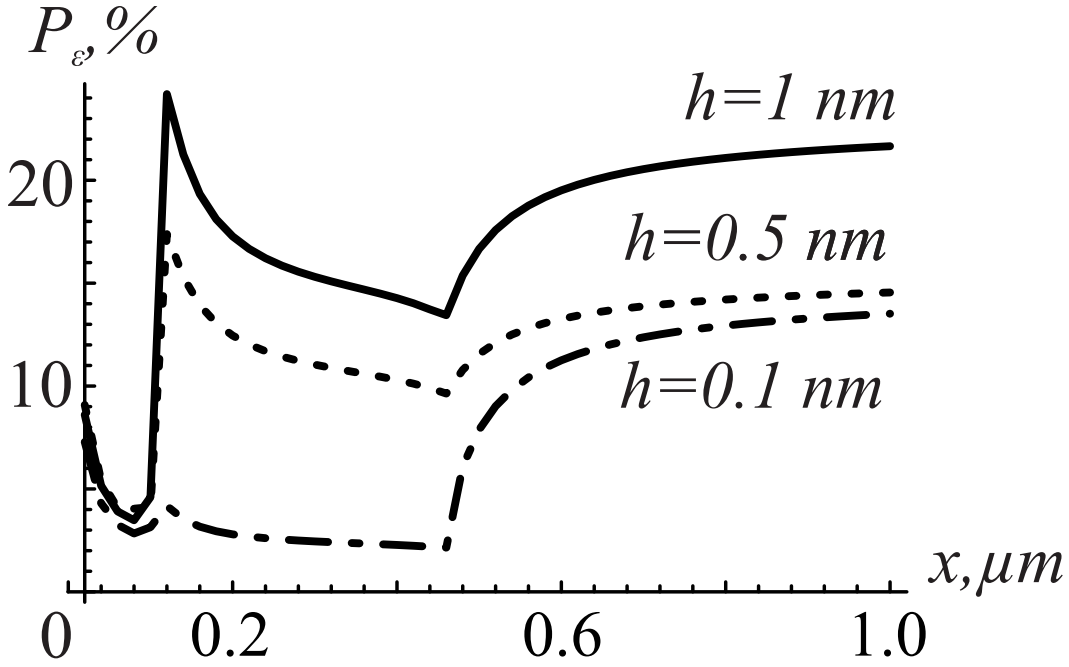

Рисунок 1.19: Погрешность определения деформаций в зависимости от координаты. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной

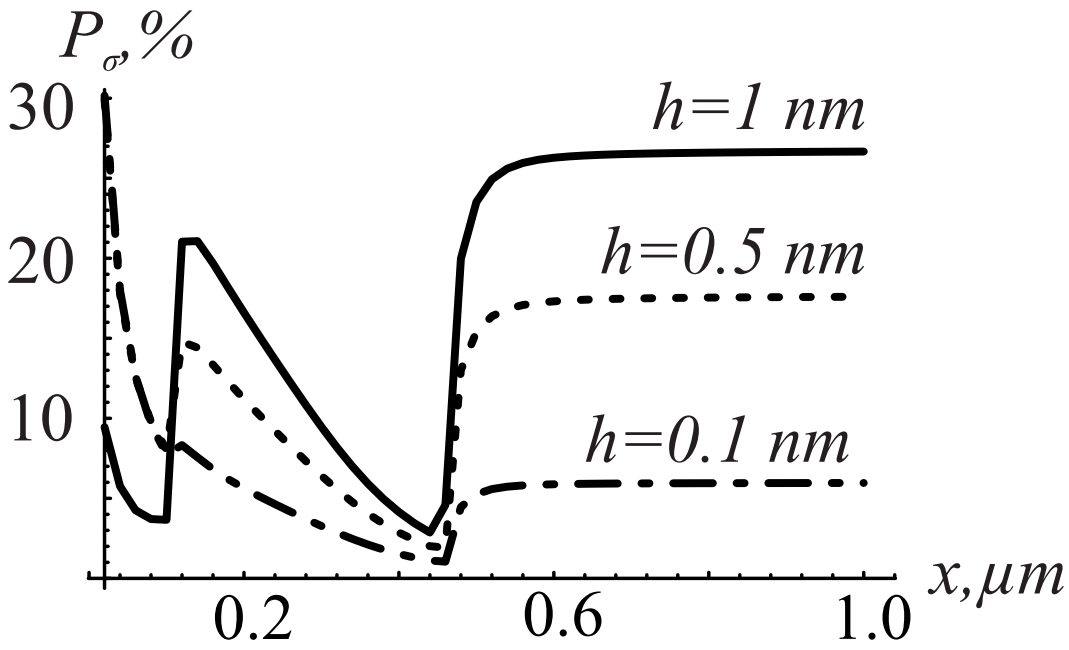

Рисунок 1.20: Погрешность определения напряжений в зависимости от координаты. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной

Как видно из рис. 1.18, 1.19, 1.20 наибольшая погрешность возникает в окрестности теплового и акустического фронтов, т.к. в окрестности этих фронтов возникает скачок, для точного описания которого необходимо измельчение сетки. Грубая сетка сглаживает остроту пика, уменьшая его амплитуду, что и приводит к увеличению погрешности.

Рассмотрена задача гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана, найдено ее численное решение в случае лазерного воздействия на бесконечный слой со свободными границами и постоянной температурой на них. Численное решение получено с помощью явной и неявной схемы интегрирования метода конечных разностей. Произведено сравнение этих решений с аналитическим, а также вычислена погрешность. Было выяснено, что в рассмотренной задаче обе схемы интегрирования позволяют найти качественно совпадающее с аналитическим решение. Лазерное воздействие приводит к возникновению сильных осцилляций в окрестности температурных и акустических фронтов при интегрировании явной схемы. Эти осцилляции вносят существенный вклад в погрешность при грубых шагах интегрирования. Измельчение сетки позво-

ляет существенно уменьшить погрешность, вносимую осцилляциями. Неявная схема даже при грубых шагах интегрирования позволяет получить решение без осцилляций, однако погрешность тем не менее остается существенной из-за сглаживания пиков на фронтах, что приводит к значительному отклонению амплитуд численного решения от аналитического. В целом же неявная схема интегрирования позволяет получить решение с меньшей погрешностью, однако при одинаковых шагах по времени и пространству неявная схема и метод прогонки затрачивает существенно больше времени на расчет, нежели явная. Таким образом, в том случае, когда рассматриваются задачи не требующие для получения достоверного решения серьезного измельчения сетки, целесообразно использовать неявную схему интегрирования и метод прогонки. В противном случае более подходящим будет явная схема интегрирования, либо более оптимальные, чем метод прогонки, методы решения СЛАУ.

1.5 Решение тестовой задачи о распространении термоупругих волн в полупространстве

Произведем оценку погрешности, которую имеет результат численного расчета, полученный с помощью написанной программы. Для этого сравним численное решение тестовой задачи с ее аналитическим решением.

Рассмотрим термоупругое полупространство, на границе которого создается гармоническое возмущение и поддерживается постоянная температура T^* (температура, при которой определены параметры). Граничные условия имеют вид:

$$\tilde{T}\left(0,t\right)=0, \qquad u\left(0,t\right)=u_0\sin\left(\Omega t\right). \tag{1.45}$$

Подвод тепла от внешних источников отсутствует. Распространение термоупругих волн в полупространстве описывается системой (2.1), где источниковый член q в уравнении теплопроводности равен нулю.

Установившееся решение данной задачи имеет вид [49, 68]:

$$\begin{gathered} u\left(x,t\right)=u_0e^{-\gamma_a x}\left(a_1\cos\left(\Omega t-\delta_h x\right)+a_2\sin\left(\Omega t-\delta_h x\right)\right) \\ +u_0e^{-\gamma_h x}\left(a_3\cos\left(\Omega t-\delta_a x\right)+a_4\sin\left(\Omega t-\delta_a x\right)\right), \\ \tilde{T}\left(x,t\right)=u_0e^{-\gamma_a x}\left(b_1\cos\left(\Omega t-\delta_h x\right)+b_2\sin\left(\Omega t-\delta_h x\right)\right) \\ -u_0e^{-\gamma_h x}\left(b_2\cos\left(\Omega t-\delta_a x\right)+b_1\sin\left(\Omega t-\delta_a x\right)\right). \end{gathered} \tag{1.46}$$

где γ_a, γ_h — коэффициенты затухания, a_i, b_i, δ_a, δ_h $\left(i=\overline{1,2}\right)$ — константы, определенные в [49].

Для нахождения численного решения данной задачи, полупространство представим в виде бесконечной полосы, с произвольными граничными условиями на правом конце. Начальные условия будем считать однородными.

Проведем сравнение численного решения с аналитическим. Поскольку аналитическое решение (1.46) является установившемся и получено для полупространства, а численное находится при заданных начальных условиях в полосе конечной толщины, далее рассматриваются такие времена расчета, при которых можно считать, что влияние начальных условий несущественно, и волны не успели дойти до правой границы.

Введем относительную погрешность численного решения:

$$P\left(f_{num},f_{an}\right)=\frac{||f_{an}-f_{num}||}{||f_{an}||}\cdot 100\%, \tag{1.47}$$

где f_{an} — величина, найденная в результате аналитического решения задачи, f_{num} — соответствующая величина, найденная численным методом.

Определим норму $||\cdot||$ функции f в момент времени t как евклидову норму вектора, компоненты которого равны значениям функции в узлах сетки:

$$||f||=\sqrt{\sum_i f_i^2\left(x^*,t^*\right)}. \tag{1.48}$$

Как видно из рис. 1.22, численный алгоритм дает погрешность порядка 2% при шагах по пространству $h\approx 10$ нм. Измельчение сетки приводит к снижению погрешности лишь до определенного предела. Анализ решения позволяет сделать вывод о высокой степени точности совпадения амплитуд численного

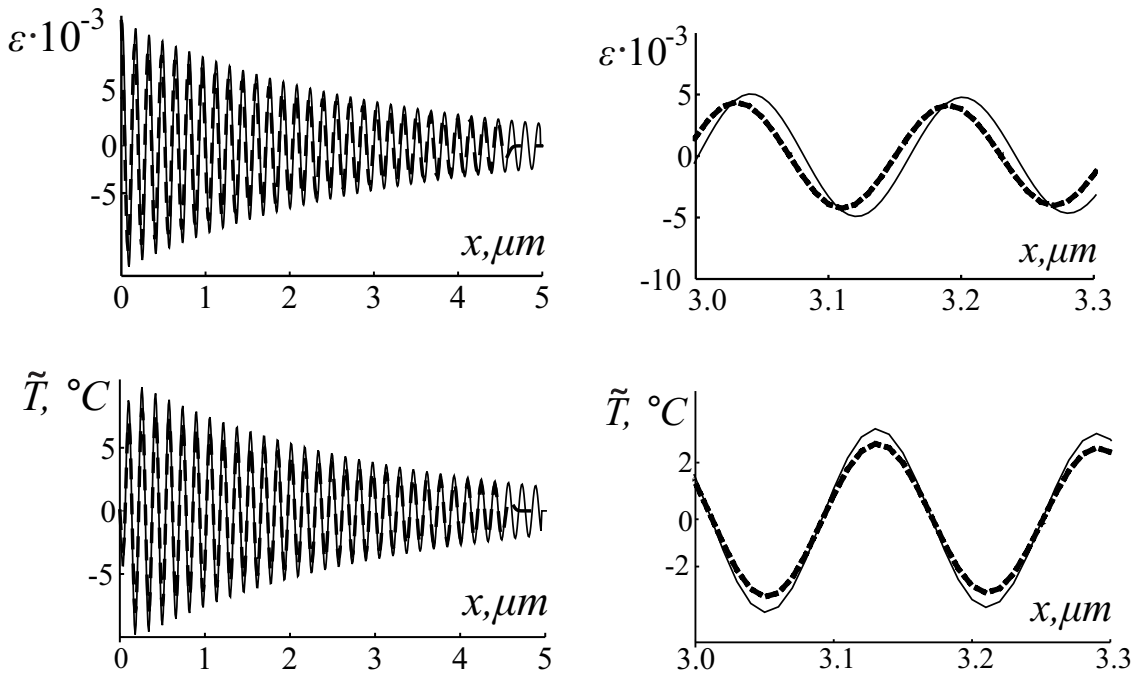

Рисунок 1.21: Распределение деформации и температуры в слое, полученное численно и аналитически, в момент времени $t = 1$ нс. Пунктирная линия — численное решение, сплошная линия — аналитическое.

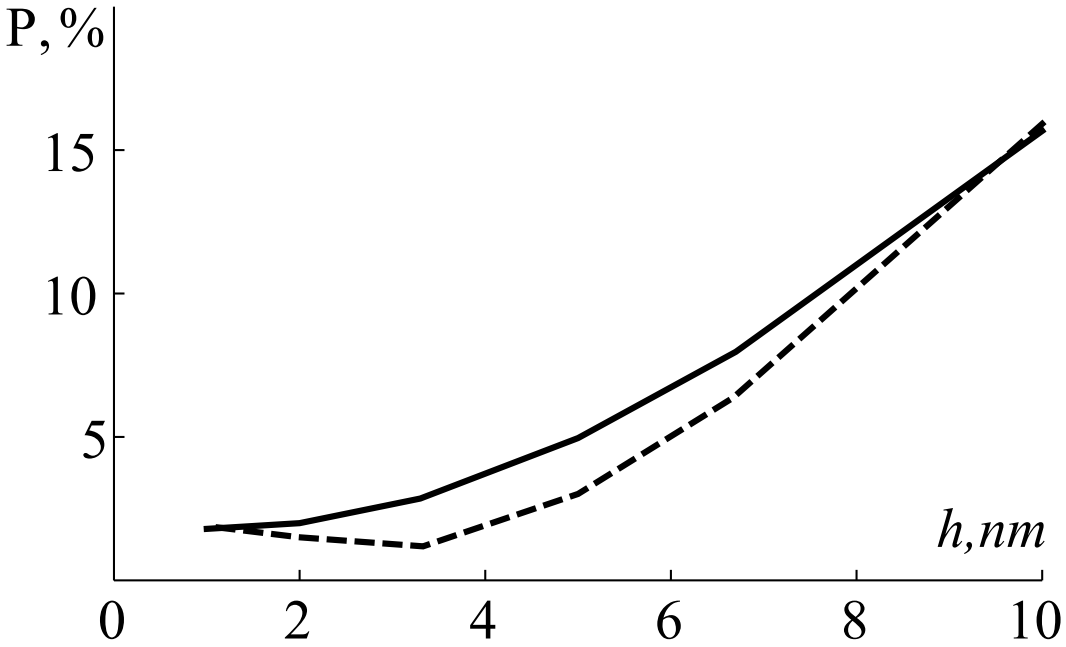

Рисунок 1.22: Зависимость полной относительной погрешности вычисления деформаций и температуры от шага по пространству. Сплошная линия — погрешность деформаций, пунктирная — погрешность температур.

и аналитического решения. Однако разница в фазе оказывается заметной, и именно она вносит основной вклад в погрешность. Такая разница возникает

по той причине, что аналитическое решение (1.46) является установившемся, а численное решение при малых временах расчета существенно зависит от начальных условий. Наблюдается тенденция: при увеличении времени расчета разность фаз между аналитическим и численным решением уменьшается. Таким образом, можно заключить, что численный алгоритм позволяет получить решение связанной задачи гиперболической термоупругости с достаточной степенью точности.

1.6 Решение задачи со свободными границами, на которых поддерживается постоянная температура

Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_*\left(0,t_*\right)=\tilde{T}_*\left(l_*,t_*\right)=0; \qquad \sigma_*\left(0,t_*\right)=\sigma_*\left(l_*,t_*\right)=0;\\ &\tilde{T}_*\left(s_*,0\right)=\dot{\tilde{T}}_*\left(s_*,0\right)=0; \qquad \sigma_*\left(s_*,0\right)=\dot{\sigma}_*\left(s_*,0\right)=0; \end{aligned} \tag{1.49}$$

Преобразуем уравнения (1.27) к следующему виду:

$$\sigma_*''-\ddot{\sigma}_*-D_1\ddot{\tilde{T}}=0 \tag{1.50}$$

$$\tilde{T}''-\left(\dot{\sigma}_*+D_3\ddot{\sigma}_*\right)-\left(\dot{\tilde{T}}+D_3\ddot{\tilde{T}}\right)=-D_2e^{-\gamma_*x_*}\left(\delta(D_4t_*)+D_3\dot{\delta}(D_4)\right) \tag{1.51}$$

где введены обозначения:

$$x_*=x\lambda\sqrt{3\rho(4G+3K_{iz})}/r; \quad t_*=3t\lambda\rho/r; \quad \sigma_*=\sigma r/(3\gamma K_{iz}T^*);$$

$$D_1=3\gamma^2K_{iz}^2T^*/r; \quad D_2=3I_0\lambda\rho^2(4G+3K_{iz})/r^2;$$

$$D_3=\tau r/(3\lambda\rho); \quad D_4=3\lambda\rho/r; \quad \gamma_*=\gamma r/(\lambda\sqrt{3\rho(4G+3K_{iz})});$$

$$r=4G\rho c_v+3K_{iz}\left(\rho c_v+\gamma^2K_{iz}T^*\right);$$

Здесь σ — напряжения на площадке, перпендикулярной оси x. В таком случае аналитическое решение задачи (1.50) — (1.49), полученное по методу Гринберга,

имеет вид [80]:

$$\tilde{T}_*(s_*,t_*) = \frac{2}{l_*}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{T}_n \sin\left(s_*\sqrt{\lambda_n}\right); \quad \sigma_*(s_*,t_*) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{*n}\sin\left(s_*\sqrt{\lambda_n}\right); \quad (1.52)$$

Выражения для трансформант $\tilde{T}_n(t_*)$ и $\sigma_n(t_*)$ выглядят так:

$$\tilde{T}_n = \frac{\zeta_n \mathrm{H}(t_*)}{(D_1-1)\,D_3 D_4}\sum_{i=1}^{4}\frac{(-1)^i\left(R_i^2+\lambda_n\right)(D_3R_i+1)\exp(t_*R_i)}{{}^{j\neq i}\prod_{j=1}^{4}(R_i-R_j)} \quad (1.53)$$

$$\sigma_{*n} = \frac{D_1\zeta_n \mathrm{H}(t_*)}{(1-D_1)\,D_3}\sum_{i=1}^{4}\frac{(-1)^i R_i^2(D_3R_i+1)\exp(t_*R_i)}{{}^{j\neq i}\prod_{j=1}^{4}(R_i-R_j)} \quad (1.54)$$

где для краткости записи введены обозначения:

$$\zeta_n = \pi l_* n\left(1-(-1)^n e^{-\gamma_* l_*}\right)/(\gamma_*^2 l_*^2+\pi^2 n^2); \quad \lambda_n = \pi^2 n^2/l_*^2$$

R_1, R_2, R_3, R_4 — корни уравнения четвертой степени:

$$(D_1-1)\,D_3R^4 + (D_1-1)\,R^3 - (D_3+D_2)\,\lambda_n R^2 - \lambda_n R - D_2\lambda_n^2 = 0$$

Построить временные профили температуры и напряжений, используя аналитическое решение (1.52), при реальных физических параметрах затруднительно, т.к. это требует учета большого количество членов ряда. Поэтому анализ решения задачи (1.50) — (1.49) при реальных физических параметрах проводился на основании численных расчетов, произведенных с помощью программы, описанной в п. 1.3. Для расчетов использовались термомеханические параметры меди и полиэтилена. Рассматриваются времена релаксации теплового потока $\tau > \tau_0$. В таком случае акустический фронт распространяется быстрее теплового. Поэтому время расчета и ширины полосы были выбраны такими, что акустический фронт не успевал за это время дойти до правой границы расчетной области: ширина полосы l, в которой производится расчет, равняется 1 мкм, а время расчета равно 10^{-10} с. Интенсивность лазерного импульса $I_0 = 23,4$ кВт/м^2. Коэффициент затухания сигнала γ равнялся 11,7 мкм$^{-1}$. В таком случае возбуждающий сигнал полностью затухает к правой границе полосы.

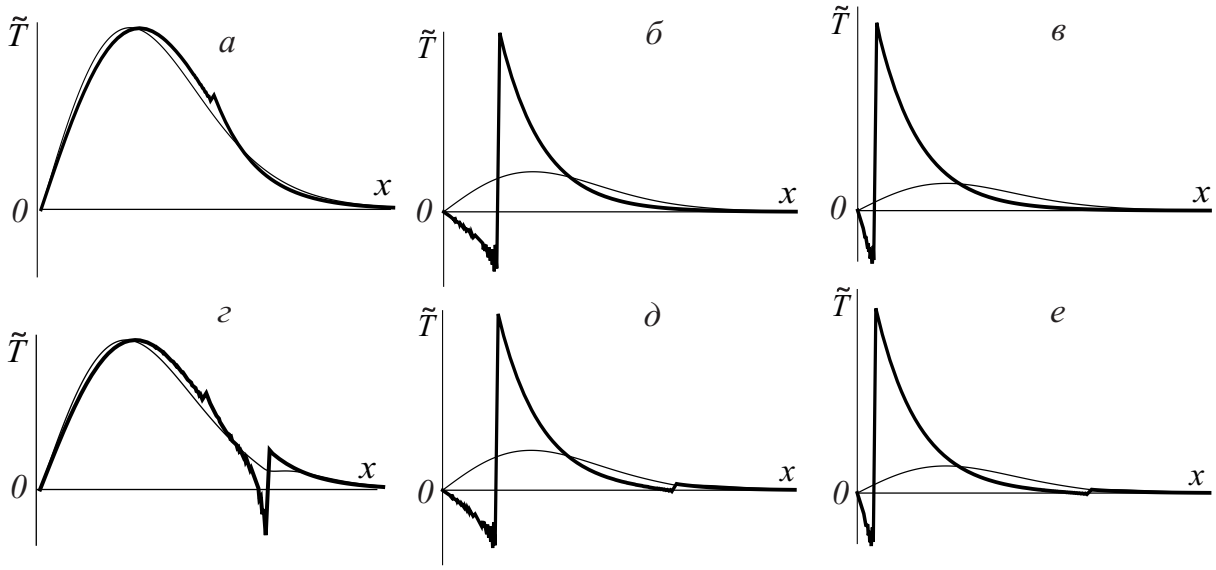

Рисунок 1.23: Характерные профили распределения температуры $\tilde{T}$ в медном слое в зависимости от координаты $x \in [0, 10^{-6}]$ м в момент времени порядка 10^{-10} с при τ равных τ^* (*а, г*), $10\tau^*$ (*б, д*), $100\tau^*$ (*в, е*), при некотором $\tau^* = 10^{-11}$ с, $\tau^* > \tau_0$. Затухание сигнала $\gamma = 11,7$ мкм$^{-1}$, интенсивность импульса $I_0 = 23,4$ кВт/м^2. Графики *а, б, в* соответствуют задачам термоупругости в несвязанной постановке, графики *г, д, е* — задачам в связанной постановке. Тонкими линиями показаны графики классической термоупругости, толстыми линиями показаны графики гиперболической термоупругости

В [80] опубликованы формулы, позволяющие определить скорость распространения волн, возбуждаемых бесконечно коротким импульсом. В численных расчетах использовались длительности импульса порядка шага по времени (10^{-14} с). Этим объясняется разница между скоростями, полученными численно и аналитически (см. табл. 1.1).

На рис. 1.25 приведено сравнение численного и аналитического решений для температур и перемещений в момент времени $t = 0.1$ нс при значении времени релаксации теплового потока $\tau = 0.1$ нс. Анализ графиков на рис. 1.25 позволяет сделать вывод, что численное решение качественно совпадает с аналитическим. Для определения степени количественного совпадения найдем погрешность численного счета.

t, пс	τ, с	V_{heat}^{an}, м/с	V_{heat}, м/с	H_{heat}^{1}, °C	H_{heat}^{2}, °C	H_p, °C
1	10^{-12}	10852	10960	0,141	0,477	0,349
10	10^{-11}	3368	3300	0,052	0,354	0,188
100	10^{-10}	1085	1070	-0,110	0,246	0,053
100	10^{-9}	343	342	-0,152	0,378	0,053
100	10^{-8}	108	111	-0,075	0,463	0,053
100	10^{-7}	34	37	-0,030	0,500	0,053
100	10^{-6}	11	14	-0,004	0,512	0,053
100	10^{-2}	0,1	3	-	0,516	0,053

Таблица 1.1: Характеристики распределения квазитермической составляющей температуры $\tilde{T}$ в меди в момент времени t. Затухание сигнала $\gamma = 11,7$ мкм$^{-1}$, интенсивность импульса $I_0 = 23,4$ кВт/м^2. Скорости пиков, найденные численно для гиперболической термоупругости, обозначены V_{heat}, высота первого пика — H_{heat}^{1}, высота второго — H_{heat}^{2}; скорости, найденные аналитически — V_{heat}^{an}; высота пика в параболической термоупругости — H_p

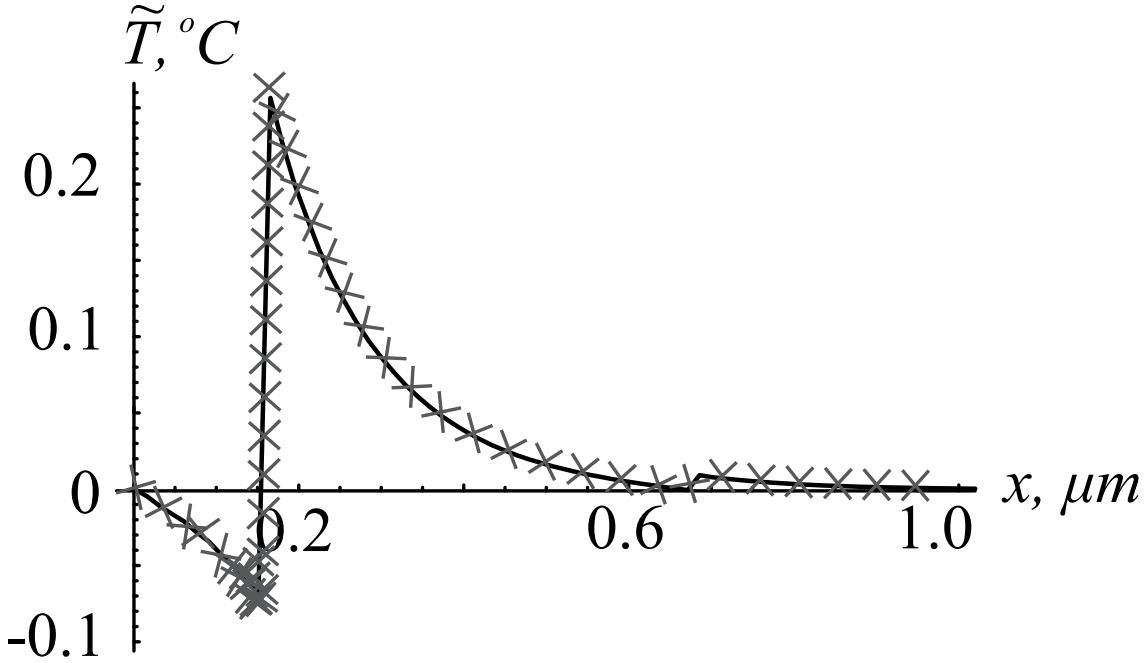

Рисунок 1.24: Сравнение температур, полученных в результате численного и аналитического решения связанной задачи термоупругости. Сплошная линия обозначает аналитическое решение

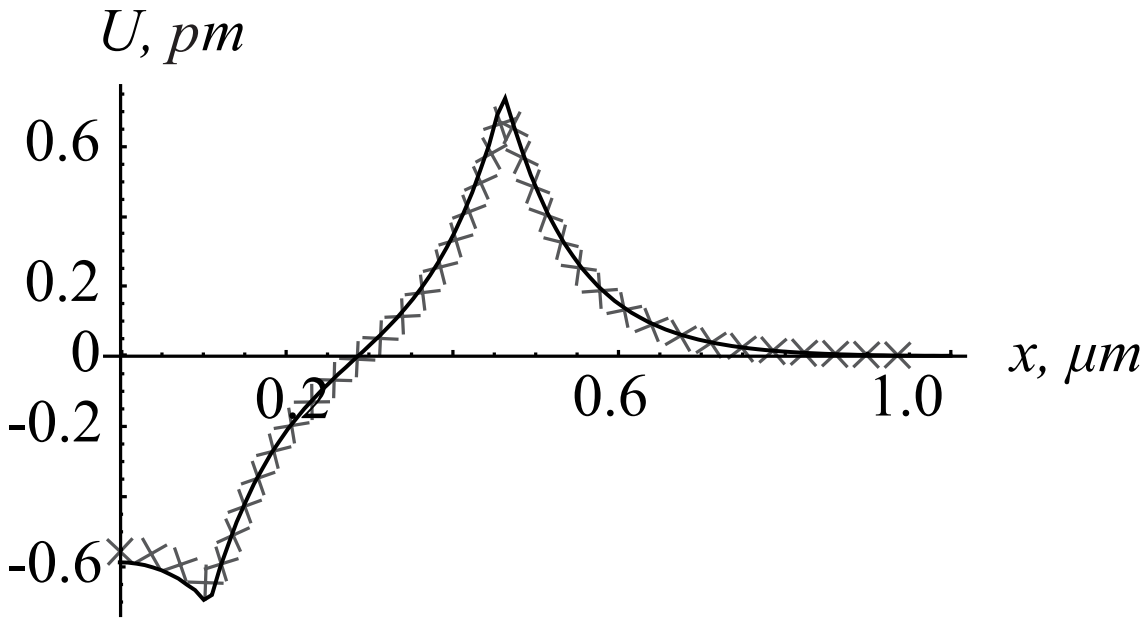

Рисунок 1.25: Сравнение перемещений, полученных в результате численного и аналитического решения связанной задачи термоупругости. Сплошная линия обозначает аналитическое решение

Погрешность будем искать с помощью следующей формулы

$$P\left(f_{num}, f_{an}\right) = \frac{||f_{an} - f_{num}||}{||f_{an}||} \cdot 100\%, \tag{1.55}$$

где f_{an} — величина, найденная в результате аналитического решения задачи, f_{num} — соответствующая величина, найденная численным методом.

Определим норму $||\cdot||$ функции f в момент времени t как евклидову норму вектора, компоненты которого равны значениям функции в узлах сетки:

$$||f|| = \sqrt{\sum_i f_i^2\left(x^*, t^*\right)}. \tag{1.56}$$

На рис. 1.26 представлена погрешность численного решения при различных шагах по пространству h. При измельчении конечно-разностной сетки наблюдается уменьшение погрешности. Наибольшая погрешность возникает в окрестности скачка температур, что обусловлено разрывом производной.

Анализ численного решения показывает, что гиперболические эффекты в меди и в полиэтилене начинают проявляться при $\tau \sim 10^{-11}$ с. При данном τ появляется волновой фронт квазитермической составляющей, а при увеличении τ

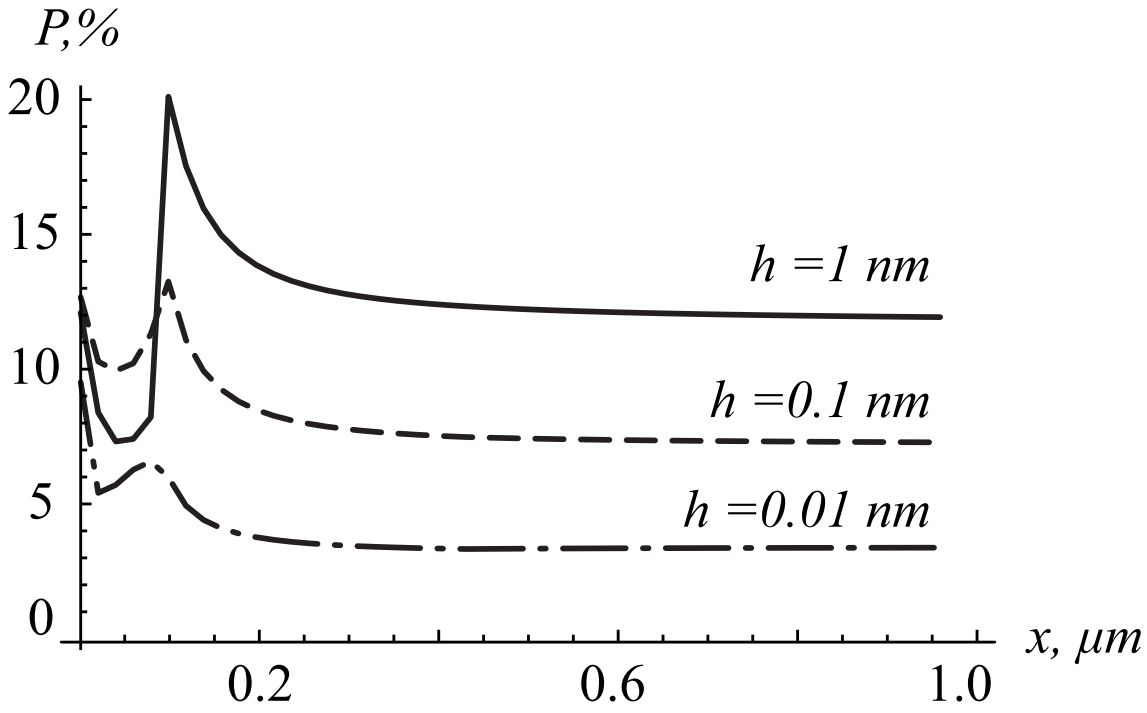

Рисунок 1.26: Погрешность численного решения

растет высота его пиков. При меньших значениях времени релаксации теплового потока решение системы гиперболической термоупругости ведет себя также, как и в случае классической термоупругости — вклад от вторых производных в уравнении теплопроводности является незначительным. Волновой фронт в связанной задаче имеет две составляющие — квазитермическую и квазиакустическую (1.23, 1.27, г, д, е). При решении задачи термоупругости в несвязанной постановке в температуре отсутствует квазиакустическая компонента, в то время как в напряжениях и деформациях присутствуют обе компоненты. Квазитермическая составляющая температуры достаточно быстро затухает: высота ее пика в меди уменьшается в два раза при отдалении на 100 нм от границы, на которой произошло возбуждение. В то же время затухание квазиакустической составляющей на исследуемом расстоянии 1 мкм практически незаметно.

При увеличении τ уменьшается скорость волнового фронта и вырастает величина пиков квазитермической составляющей. Данный рост объясняется тем, что при меньшей скорости в один и тот же момент времени волна успевает распространиться на меньшее расстояние и, как следствие, меньше затухнуть. Однако изменение τ мало отражается на скорости распространения квазиаку-

стической составляющей и на ее затухании. Существенное изменение глубины и высоты пиков квазиакустической составляющей температуры наблюдается при $\tau \sim 10^{-11}$ с (см табл. 1.2). При τ больше или меньше данного значения зависимость высоты и глубины пиков квазиакустической составляющей температуры от времени релаксации теплового потока практически не наблюдается.

τ, с	$H^2_{heat} \cdot 10^5$	$H^1_{heat} \cdot 10^6$	$H^2_{ac} \cdot 10^5$	$H^1_{ac} \cdot 10^6$
10^{-11}	-	-	$2,2$	$-10,1$
10^{-10}	$0,85$	$-3,71$	$1,13$	$-9,0$
10^{-9}	$1,25$	$-4,99$	$1,07$	$-8,7$
10^{-8}	$1,52$	$-2,44$	$1,07$	$-8,7$
10^{-7}	$1,63$	$-0,99$	$1,07$	$-8,7$
10^{-6}	$1,68$	$-0,13$	$1,07$	$-8,7$
10^{-2}	$1,68$	-	$1,07$	$-8,7$

Таблица 1.2: Характеристики распределения деформации ε в меди в момент времени 10^{-10} с, найденные численно, для гиперболической термоупругости. Затухание сигнала $\gamma = 11,7$ мкм$^{-1}$, интенсивность импульса $I_0 = 23,4$ кВт/м^2. Высоты пиков квазитермической составляющей обозначены H_{heat}, глубины — H_{heat}; высоты пиков квазиакустической составляющей обозначены H_{ac}, глубины — H_{ac}

При малых временах релаксации теплового потока $\tau < 10^{-11}$ с, деформация в меди обладает одним ярко выраженным волновым фронтом — квазиакустическим. Квазитермический фронт также присутствует, однако величина его пиков намного меньше, чем у квазиакустической составляющей. Учет механических слагаемых в уравнении теплопроводности не приводит к качественному изменению полей деформаций. При $\tau < 10^{-11}$ с, когда решение фактически является классическим, величина пиков квазиакустической составляющей в несвязанной задаче больше примерно на 5%. При больших временах релаксации теплового потока поля деформаций этих двух решений практически повторяют друг друга.

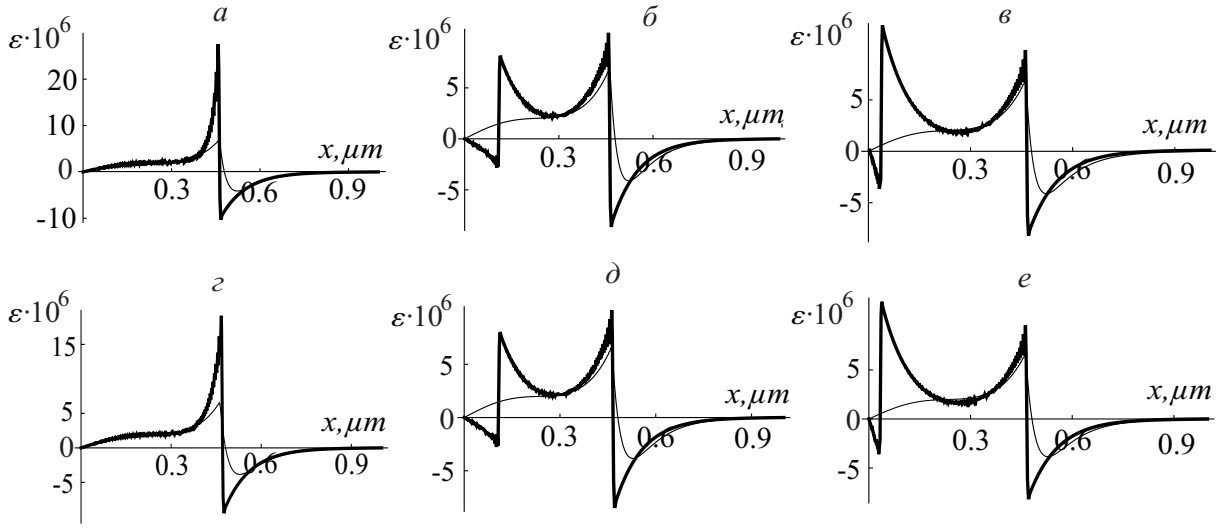

Рисунок 1.27: Профили распределения деформации ε в медном слое в зависимости от координаты $x \in [0; 10^{-6}]$ м в момент времени порядка 10^{-10} с при τ равных τ^* (*а, г*), $10\tau^*$ (*б, д*), $100\tau^*$ (*в, е*), при некотором $\tau^* = 10^{-11}$ с, $\tau^* > \tau_0$. Затухание сигнала $\gamma = 11,7$ мкм$^{-1}$, интенсивность импульса $I_0 = 23,4$ кВт/м^2. Графики *а, б, в* соответствуют задачам термоупругости в несвязанной постановке, графики *г, д, е* — задачам в связанной постановке. Тонкими линиями показаны графики классической термоупругости, толстыми линиями показаны графики гиперболической термоупругости

Напряжения выражаются на основании закона Дюамеля-Неймана (1.24) через деформацию и температуру. В полиэтилене заметна лишь квазиакустическая составляющая напряжений при любых τ. В случае меди иная ситуация. При $\tau < 10^{-11}$ с квазитермическая составляющая температуры компенсирует квазитермическую составляющую деформации. В итоге получается, что при $\tau < 10^{-11}$ с в напряжениях меди, также как и в напряжениях полиэтилена, заметна лишь квазиакустическая составляющая. Однако, при $\tau > 10^{-11}$ с квазитермическая составляющая температур быстро затухает и аналогичная составляющая деформаций оказывается ничем не скомпенсирована, что приводит к тому, что напряжения меди при таких τ обладают двумя составляющими — как квазиакустической, так и квазитермической.

Метод лазерной термометрии с помощью которого производится регистрация нестационарной температуры и теплового потока как на поверхности, так и

в объеме образца, позволяет осуществлять наблюдение за неравновесными процессами теплопереноса с высоким разрешением по времени (порядка 10^{-12}с). Разрешающая способность по температуре относительно низкая и оценивается величиной 0,3 °C [29].

Проведенное численное исследование показало, что разница высот пиков температуры $\tilde{T}$ для гиперболической и классической термоупругости для меди превышает, либо близка к 0,3 °C при всех $\tau \in [10^{-12}; 10^{-2}]$ с при временах t порядка τ, либо меньших τ (табл. 1). В полиэтилене эта разница значительно меньше чем 0,3 °C при всех рассмотреных τ. Таким образом численное исследование показало, что учет волновых слагаемых в уравнении теплопроводности приводит к росту высоты пиков температуры в меди, который может быть зафиксирован современным экспериментальным оборудованием в указанном выше диапазоне τ. В то же время в полиэтилене такого роста найдено не было.

1.7 Заключение

Задача гиперболической теплопроводности [78] о бесконечном слое обобщена на случай связанной гиперболической термоупругости. Установлено, что в отличии от задачи теплопроводности, в решении задачи термоупругости могут наблюдаться два участка охлаждения, соответствующие квазитермической и квазиакустической частям термоупругого импульса. Проведено сравнение скоростей волнового фронта составляющих термоупругого импульса на основании ряда моделей: классической связанной термоупругости, гиперболической теплопроводности и гиперболической несвязанной термоупругости.

При исследовании задачи гиперболической теплопроводности для бесконечного слоя, находящего под воздействием короткого лазерного импульса при однородных граничных условиях первого рода на температуру обнаружен участок охлаждения, возникающий вблизи облучаемой поверхности слоя. Установлено, что данный участок возникает только при определенном соотношении постоянной релаксации теплового потока и коэффициента затухания лазерного излучения в среде.

Для нахождения решения задачи гиперболической термоупругости при реальных физических параметрах была написана программа, которая позволила найти численное решение данной задачи с помощью метода конечных разностей. При коротком объемном лазерном воздействии на материал численное решение показало, что в меди, взятой в качестве примера типичного металла, разность высоты температуры $\tilde{T}$ для гиперболической и классической термоупругости превышает величину 0,3 °C при временах порядка и меньших τ (табл. 1), и, таким образом, может быть зафиксирована экспериментально. Кроме того было определено, что разница высот пиков на волновом фронте квазитермической составляющей также превышает величину 0,3 °C. Для диэлектриков, на примере полиэтилена, такой разницы обнаружено не было.

Глава 2

Анализ влияния краевых условий на решение волновых задач гиперболической термоупругости

2.1 Постановка задачи

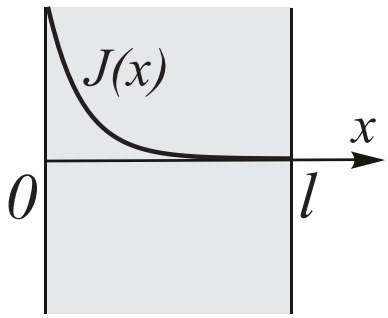

Рисунок 2.1: Бесконечный слой, находящейся под воздействием лазерного излучения

Рассмотрим задачу, в которой бесконечный медный слой (рис. 2.1) слева равномерно облучается импульсным лазерным воздействием. В таком случае систему уравнений гиперболической термоупругости (1.27), записанную в терминах деформаций, можно представить в одномерном виде:

$$\begin{gathered}\left(K_{iz}+\frac{4}{3}G\right)\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}-\alpha K_{iz}\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial x^2}=0,\\ \frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial x^2}-\frac{\rho c_v}{\lambda}\left(\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial t^2}\right)-\frac{T^*\alpha K_{iz}}{\lambda}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\tau\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\right)=-\frac{\rho}{\lambda}\left(q+\tau\frac{\partial q}{\partial t}\right).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ будет иметь три ненулевые компоненты:

$$\sigma_{xx} = \left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon - \alpha K_{iz}\tilde{T},$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(K_{iz} - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon - \alpha K_{iz}\tilde{T}, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon = \partial u/\partial x$. В дальнейшем будем рассматривать только осевые напряжения σ_{xx} и введем обозначение $\sigma = \sigma_{xx}$.

Будем считать, что в начальный момент времени слой находился в невозмущенном состоянии, а его границы свободны от нагрузок, и на них поддерживается постоянная температура. Тогда начальные условия будут однородные, а граничные имеют вид:

$$\sigma\big|_{x=0} = 0; \quad \sigma\big|_{x=l} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=0} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=l} = 0; \tag{2.3}$$

В случае слоя, ширина которого имеет порядок нанометров, глубина проникновения лазерного импульса даже для металлов может быть существенна. Таким образом, поглощение лазерного импульса в материале можно моделировать с помощью закона Бугера:

$$J(x) = J_0 e^{-\gamma x},$$

где J_0 — интенсивность лазерного воздействия, γ — коэффициент поглощения среды. Зависимость воздействия от времени выражается с помощью дельта-функции Дирака $\delta(t-0)$. В таком случае плотность внутренних источников тепла $q(x,t)$ будет иметь вид:

$$q(x,t) = \frac{E_0\gamma}{\rho}e^{-\gamma x}\delta(t-0), \qquad E_0 = J_0\delta_0, \tag{2.4}$$

где δ_0 — длительность воздействия. Аналогичный вид плотности внутренних источников в задачах с лазерным воздействием используется в ряде экспериментальных работ — см., например, [18].

Ширина полосы l принималась равной 1 мкм. В качестве термомеханических характеристик среды принимаем параметры меди: модуль Юнга $E = 127$ ГПА, коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$, плотность $\rho = 8960$ кг/м^3, коэффициент

теплопроводности $\lambda = 401$ Вт/(м·К), объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = 49.5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 390$ Дж/К, постоянная поглощения излучения средой $\gamma = 11.7$ мкм$^{-1}$

В экспериментальных [18, 19, 59] и теоретических [61–65] работах приводятся различные данные о времени релаксации теплового потока для металлов, которые находятся в пределах от 10^{-8} до 10^{-12} с. На основании этих данных примем в качестве τ среднее значение из этого интервала — 0.1 нс.

Энергия облучения E_0 принимается равной 0,15 Дж/м^2. В таком случае отклонение температуры находится в пределах от 0 до 10 °C на всем временном интервале. Это позволяет рассматривать распространение термоупругих волн в пределах линейной теории.

2.2 Границы слоя закреплены и на них поддерживается постоянная температура

Граничные условия имеют вид:

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad u\big|_{x=l} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=0} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=l} = 0; \tag{2.5}$$

На рис. 2.4 — 2.7 представлено численное решение связанной термоупругости. Медный слой находится под воздействием короткого лазерного импульса (2.4). В начальный момент времени слой находился в невозмущенном состоянии. Графики 2.4 и 2.6 построены при $t = \tau = 0.1$ нс, графики 2.5 и 2.7 при $t = 2\tau$. В гиперболической термоупругости на фронте квазитепловой составляющей волны наблюдаются минимальные значения перемещений, а на квазиакустическом фронте — максимальные. В классической термоупругости значения перемещений на квазиакустическом и квазитепловом фронтах меньше, чем в гиперболической. Максимальная разница между перемещениями в классической и гиперболической термоупругости наблюдается на квазиакустическом фронте.

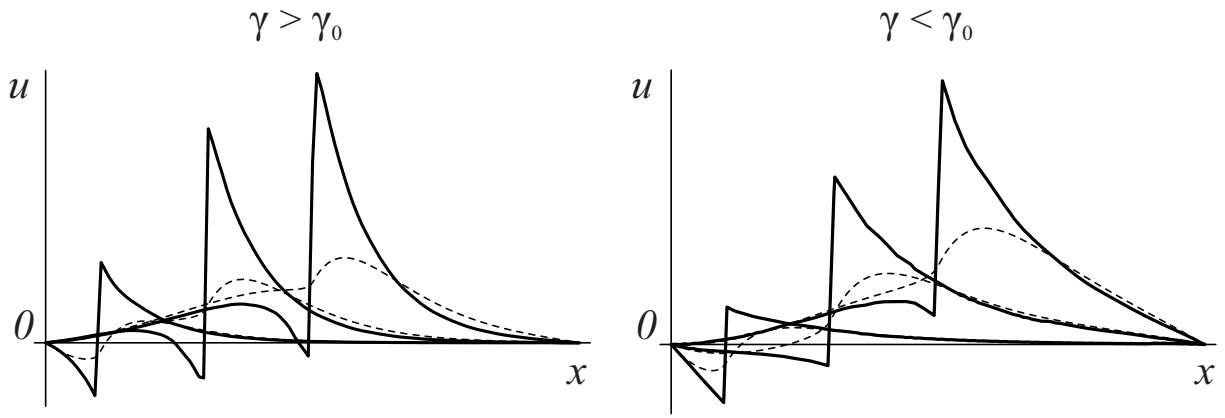

Рисунок 2.2: Аналитическое решение полусвязанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической.

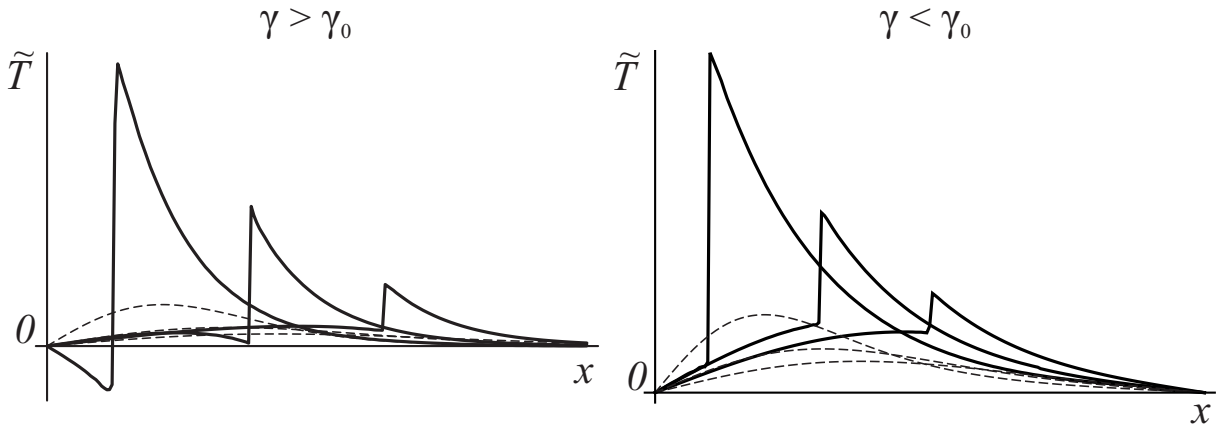

Рисунок 2.3: Аналитическое решение задачи теплопроводности при постоянной температуре на границе. Сплошными линиями изображены графики гиперболической теплопроводности, пунктирными — классической.

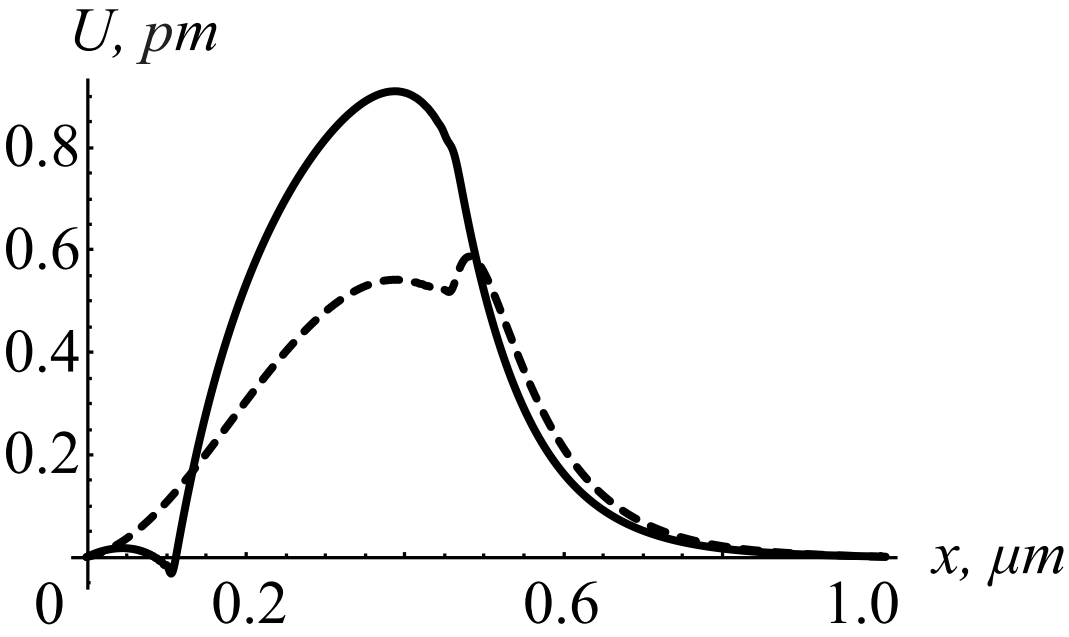

Рисунок 2.4: Перемещения, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе в момент времени $t = \tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической.

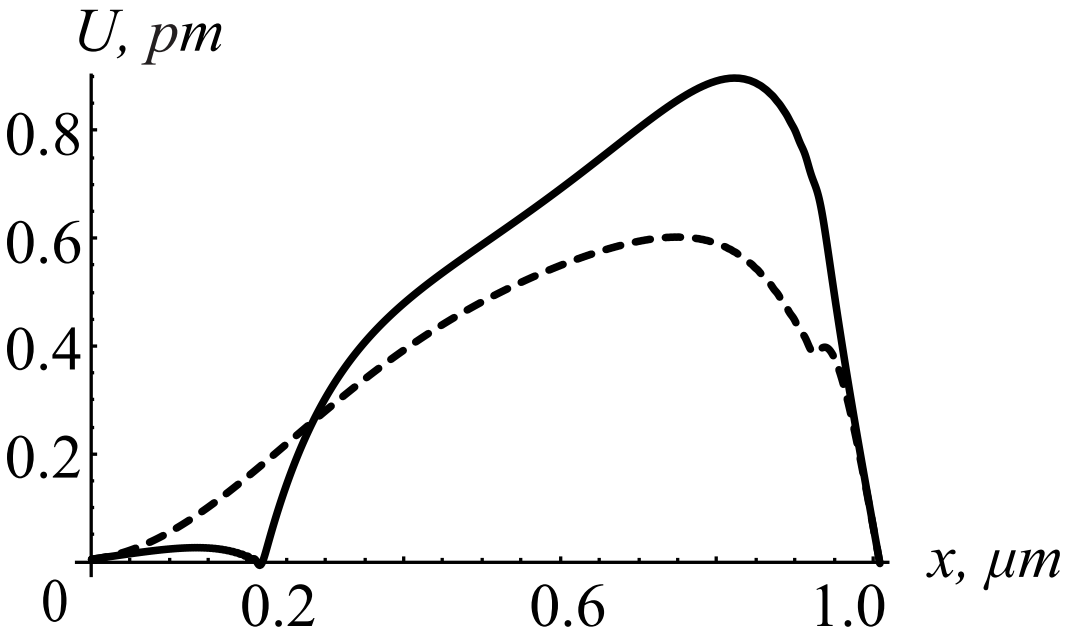

Рисунок 2.5: Перемещения, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе в момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической.

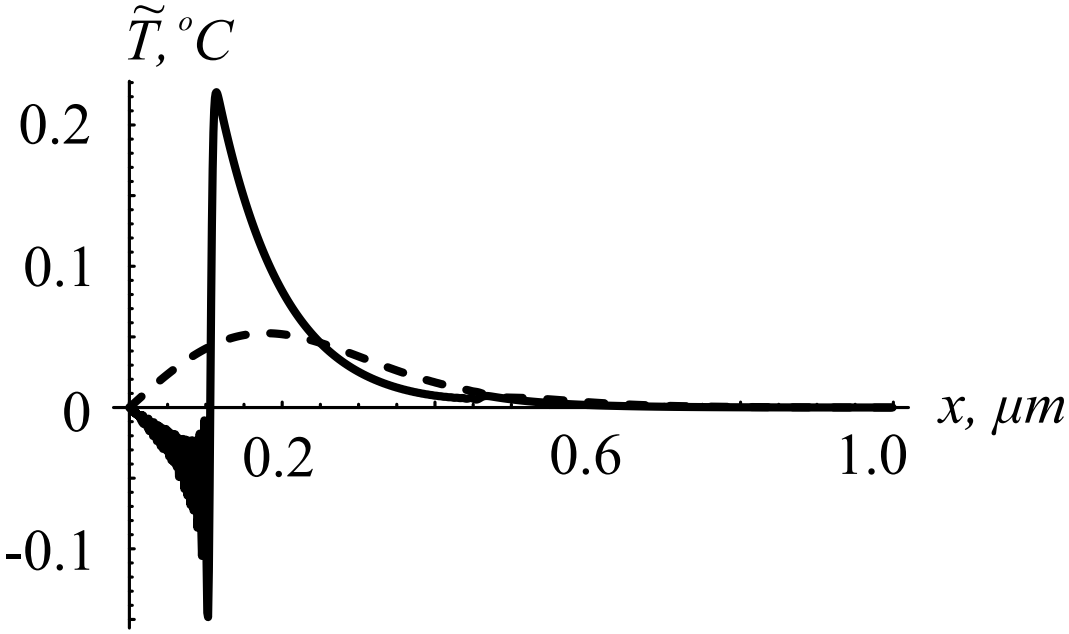

Рисунок 2.6: Температуры, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе в момент времени $t = \tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической.

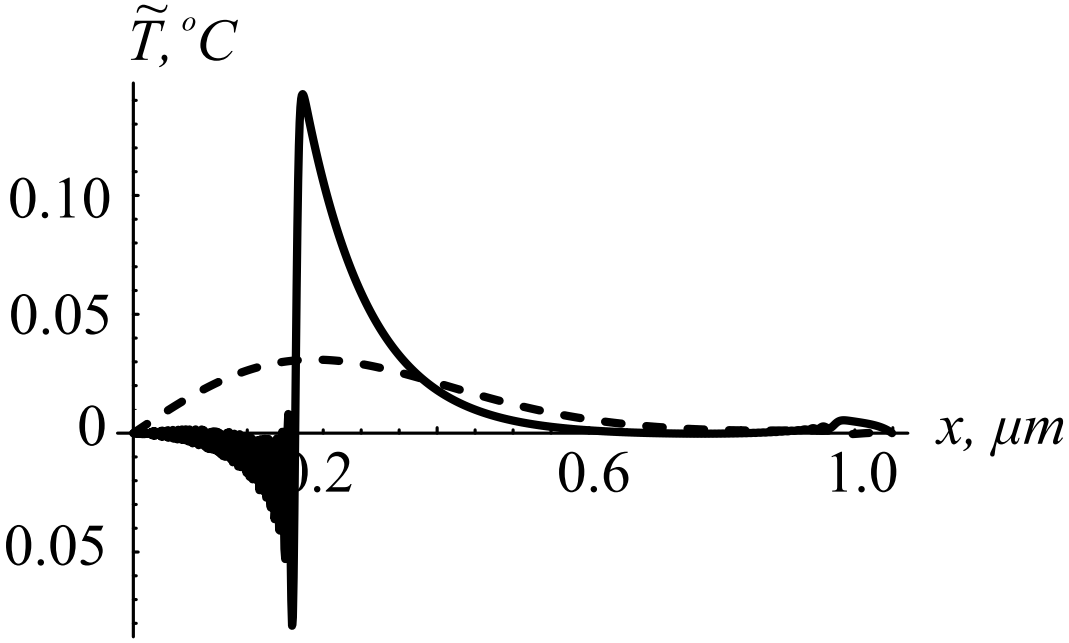

Рисунок 2.7: Температуры, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе в момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической.

t, нс	V_h, м/с	V_a, м/с	U_{max}, пм	U_{min}, пм	T_{max}, °C	T_{min}, °C
0,001	1500	4614	0,000878	-0,0147	0,514	-0,109
0,025	1141	4670	0,401	-0,0804	0,389	-0,18
0,050	110	4668	0,704	-0,038	0,317	-0,193
0,075	1096	4643	0,844	-0,0285	0,271	-0,179
0,100	1108	4584	0,901	-0,0320	0,237	-0,159
0,125	1093	4637	0,920	-0,0371	0,211	-0,138
0,150	1093	4636	0,927	-0,0304	0,190	-0,119
0,175	1085	4635	0,926	-0,0241	0,170	-0,102
0,200	1080	4611	0,886	-0,0106	0,153	-0,086

Таблица 2.1: Численное решение связанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе. t — момент времени, V_h — скорость квазитеплового фронта, V_a — скорость квазиакустического фронта, U_{max}, U_{min} — максимальное и минимальное значение перемещений соответственно, T_{max}, T_{min} — максимальное и минимальное значение температуры соответственно

Графики на рис. 2.2 показывают, что отрицательные минимумы перемещений наблюдаются дольше в гиперболической теории, чем в классической. Сравнивая графики распределения температуры по толщине слоя, построенные численно и аналитически (рис. 2.3 и рис. 2.6 — 2.7) можно заключить, что эффект локального охлаждения, наблюдаемый вблизи облучаемой границы слоя не является ошибкой численного счета и не связан с погрешностью суммирования ряда в аналитическом решении. Наличие зоны охлаждения объясняется тем, что в начальные моменты времени, когда происходит воздействие на материал, в слое возбуждается термоупругая волна, которая начинает движение налево и направо от места возбуждения. Так как источник воздействия расположен вблизи левой границы полосы, то волна, которая уходит налево отражается от границы со сменой знака вследствие граничных условий первого рода.

Областям численного решения, где в температурах наблюдаются сильные осцилляции (рис. 2.6 и 2.7) соответствует гладкий график аналитического реше-

ния (рис. 2.3). Это говорит о том, что данные осцилляции представляют собой артефакт численного счета. Причем такие осцилляции наблюдаются только в тех задачах, в которых на границах слоя поддерживается постоянная температура. Тем не менее график перемещений представляет собой гладкую функцию, потому что перемещения находилась путем интегрирования деформаций.

В табл. 2.1 приведены результаты численных расчетов, которые показывают, что при рассматриваемых параметрах перемещения являются величинами порядка долей пикометров, что лежит за пределами чувствительности экспериментального оборудования. Поэтому сами по себе перемещения не представляют практического интереса. Тем не менее, с теоретической точки зрения обсуждение характера поведения перемещений интересно, так как это позволяет лучше понять процесс перекачки энергии между механическими и тепловыми степенями свободы. Первые 0,15 нс максимальное значение перемещений, которое соответствует квазиакустическому фронту, увеличивается, а в последние 0,05 нс — уменьшается. Таким образом эффект термоупругого затухания (thermal-elastic damping) наблюдается, начиная с 0,15 нс после воздействия. Увеличение амплитуды перемещений в первые 0,15 нс можно объяснить переносом энергии температурных колебаний в механические за счет эффекта связности. Минимальное значение перемещений соответствует квазитепловому фронту и имеет отрицательную величину, которая уменьшается в три раза за время, равное 0,1 нс. За это время максимальное и минимальное значение температуры уменьшилось на 38%.

2.3 Границы слоя закреплены и теплоизолированы

Граничные условия имеют вид:

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad u\big|_{x=l} = 0; \quad h\big|_{x=0} = 0; \quad h\big|_{x=l} = 0; \tag{2.6}$$

Численное решение связанной задачи для медного слоя представлено на рис. 2.10 — 2.13. Графики 2.10 и 2.12 построены при $t = \tau = 0.1$ нс, графики

2.11 и 2.13 при $t = 2\tau$. Наибольшая разница достигается между перемещениями гиперболической термоупругости и классической термоупругости на квазитемпературном фронте, скорость которой приведена в [81].

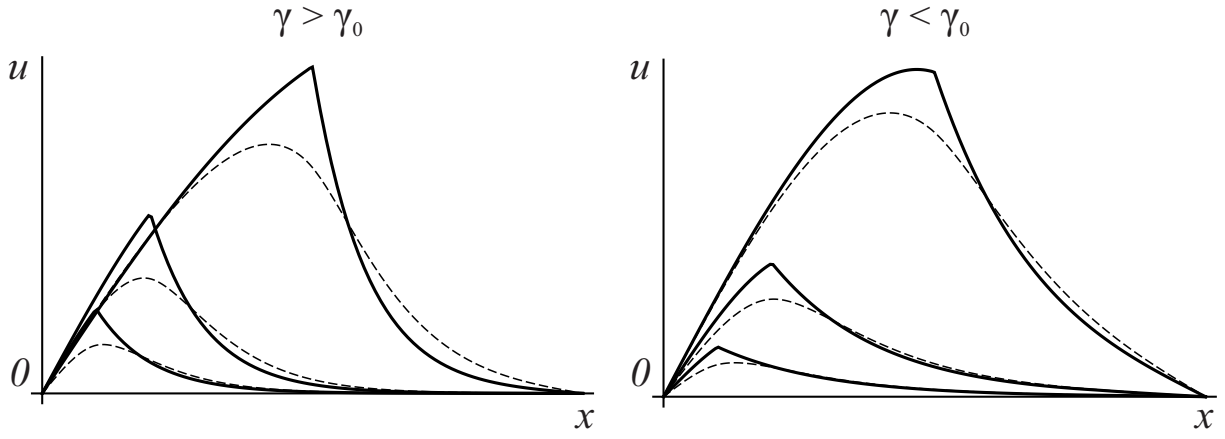

Рисунок 2.8: Аналитическое решение полусвязанной задачи термоупругости с теплоизолированными и закрепленными границами. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

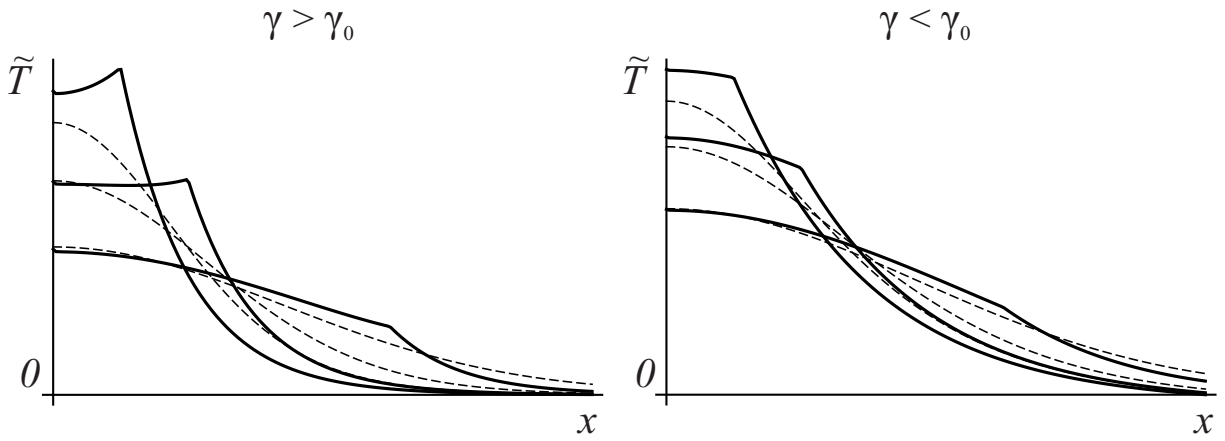

Рисунок 2.9: Аналитическое решение задачи теплопроводности с теплоизоляцией на границе. Сплошными линиями изображены графики гиперболической теплопроводности, пунктирными — классической.

Результаты численного расчета, приведенные в таблице 2.2, показывают, что за 1 нс максимальное значение перемещений увеличилось на 15%, а максимальное значение температуры уменьшилось на 38%.

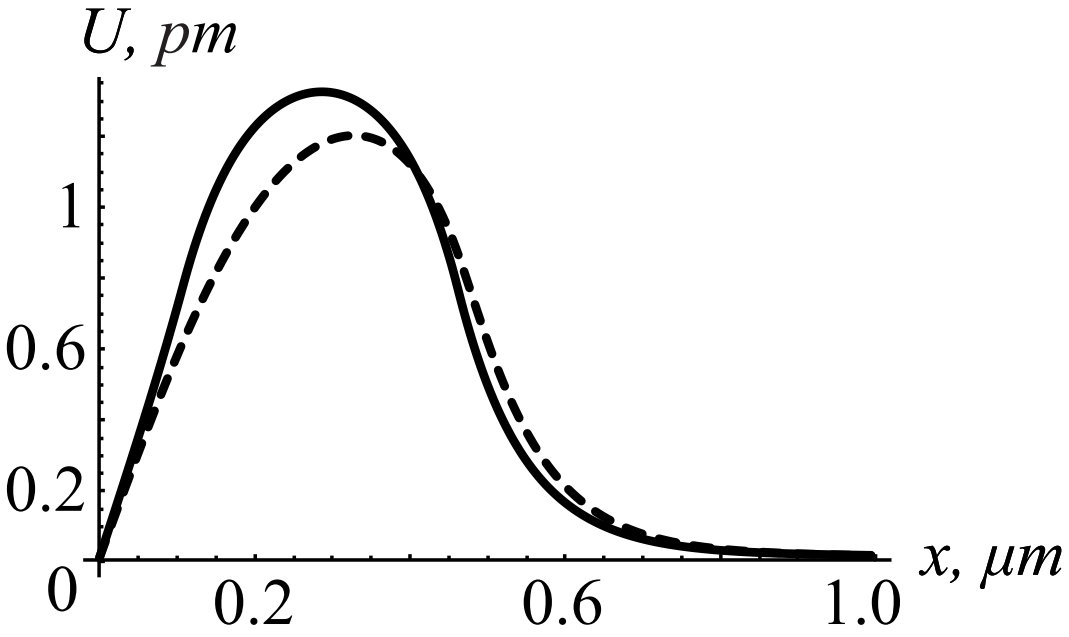

Рисунок 2.10: Перемещения, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и теплоизоляцией на границе в момент времени $t = \tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

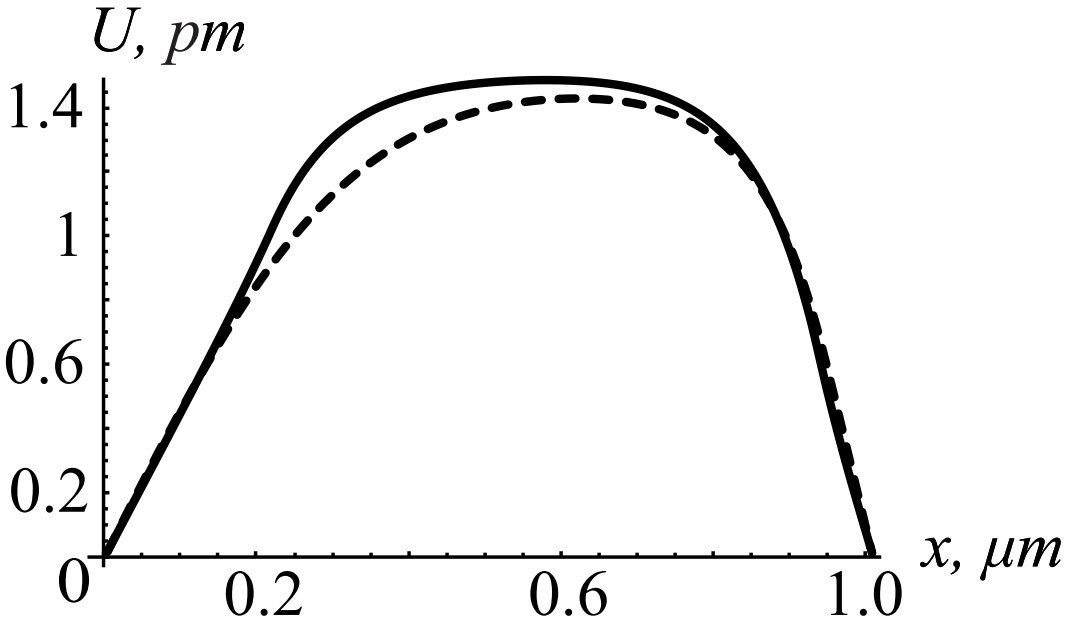

Рисунок 2.11: Перемещения, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и теплоизоляцией на границе в момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

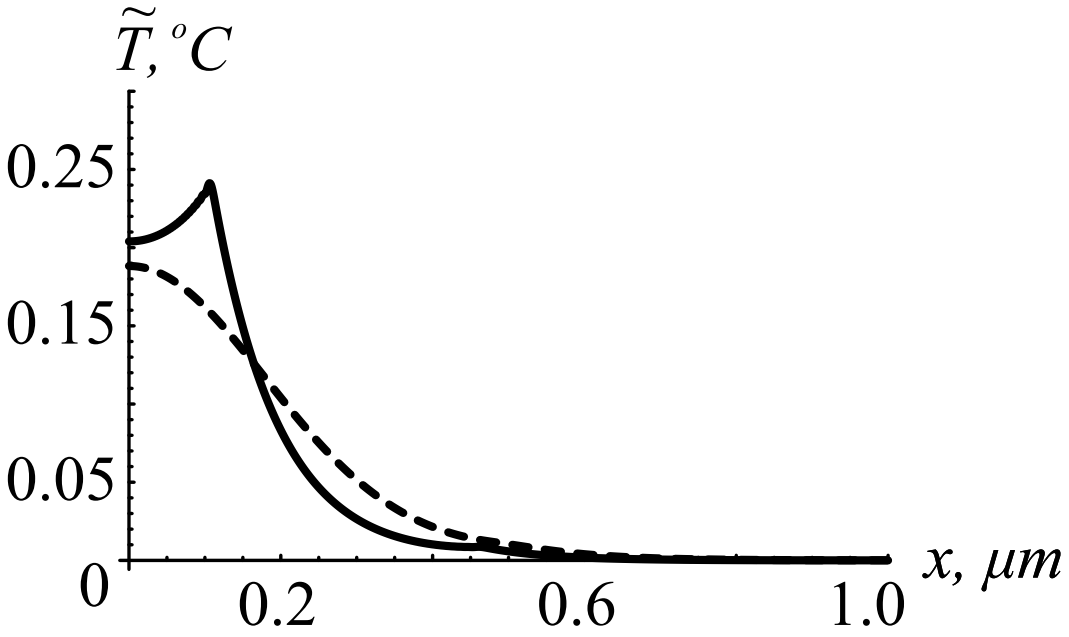

Рисунок 2.12: Температуры, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и теплоизоляцией на границе в момент времени $t = \tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

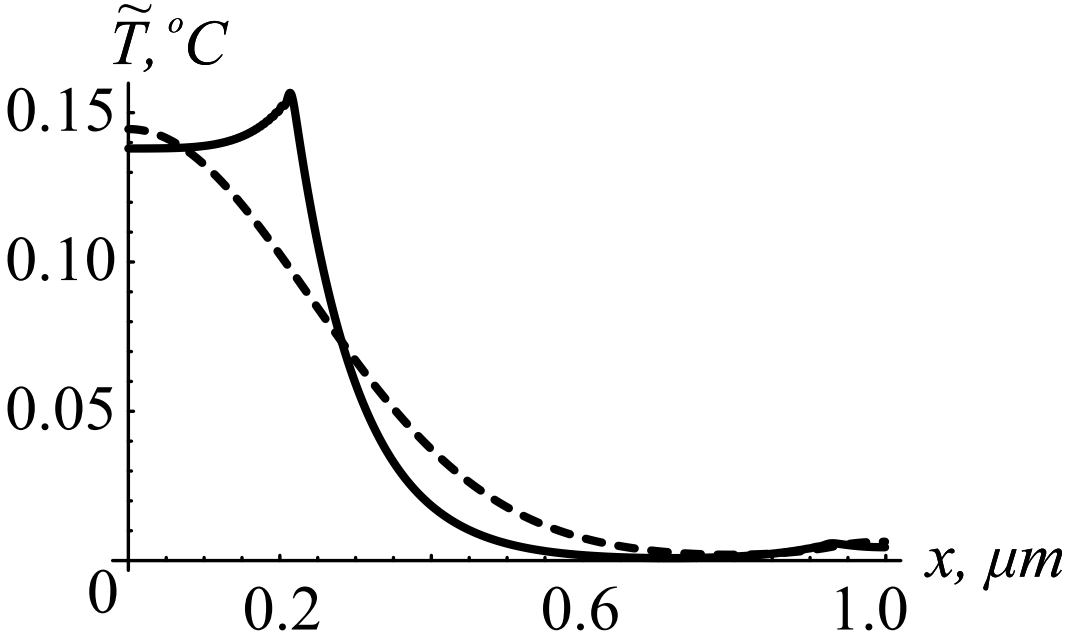

Рисунок 2.13: Температуры, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости с заделкой и теплоизоляцией на границе в момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

t, нс	V_h, м/с	V_a, м/с	U_{max}, пм	T_{max}, °C
0,001	909	3714	0.0023	0,519
0,025	1056	4640	0.448	0,397
0,050	1056	4620	0,925	0,324
0,075	1069	4613	1,181	0,277
0,100	1070	4586	1,324	0,243
0,125	1072	4617	1,397	0,217
0,150	1076	4607	1,437	0,195
0,175	1074	4619	1,458	0,175
0,200	1070	4595	1,467	0,157

Таблица 2.2: Численное решение связанной задачи термоупругости с заделкой и теплоизоляцией на границе. t — момент времени, V_h — скорость квазитеплового фронта, V_a — скорость квазиакустического фронта, U_{max} — амплитуда перемещений, T_{max} — амплитуда температуры

Графики на рис. 2.9 и 2.12 — 2.13 показывают, что с течением времени температура на облучаемой границе в гиперболической задаче термоупргости может быть как больше, так и меньше, чем в классической. Однако разность температур в этих случаях невелика. Перемещения, полученные в результате решения задачи связанной гиперболической термоупругости качественно не отличаются от решения классической задачи и имеют малые количественные отличия.

2.4 Границы слоя свободны от нагрузок и теплоизолированы

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma\big|_{x=0} = 0; \quad \sigma\big|_{x=l} = 0; \quad h\big|_{x=0} = 0; \quad h\big|_{x=l} = 0; \tag{2.7}$$

Численное решение аналогичной задачи для медного слоя представлено на рис. 2.15 — 2.18. Графики 2.15 и 2.17 построены в момент времени $t = \tau = 0.1$

нс, графики 2.16 и 2.18 при $t = 2\tau$. Наибольшая разница между перемещениями гиперболической термоупругости и классической термоупругости достигается, как и в предыдущей задаче, на квазитемпературном фронте. Как видно из сравнения рис. 2.10 — 2.13 и 2.15 — 2.18, механические граничные условия слабо влияют на распределение температуры в слое, что объясняется малостью коэффициента теплового расширения.

Как можно видеть на рис. 2.14, при данных граничных условиях разница между решениями, полученными в рамках классической и гиперболической теории проявляется меньше, чем в других рассмотренных задачах.

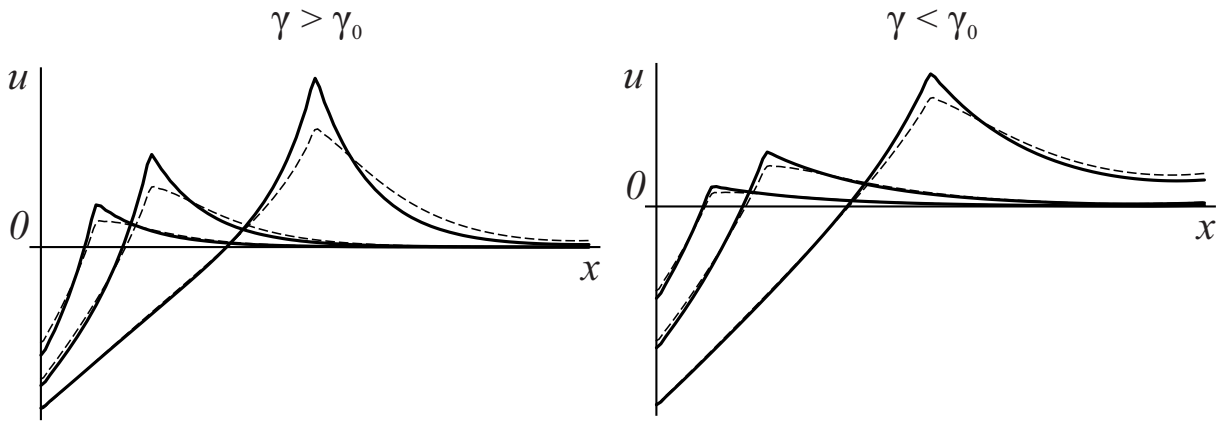

Рисунок 2.14: Аналитическое решение полусвязанной задачи термоупругости с теплоизолированными и свободными границами. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

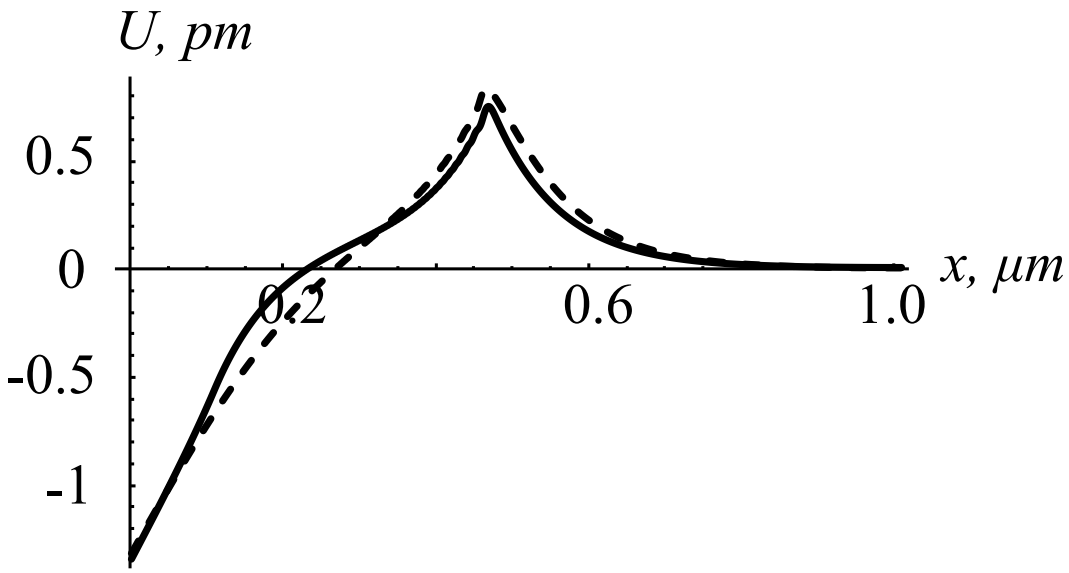

Рисунок 2.15: Перемещения, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости со свободными краями и теплоизоляцией на границе во момент времени $t = \tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

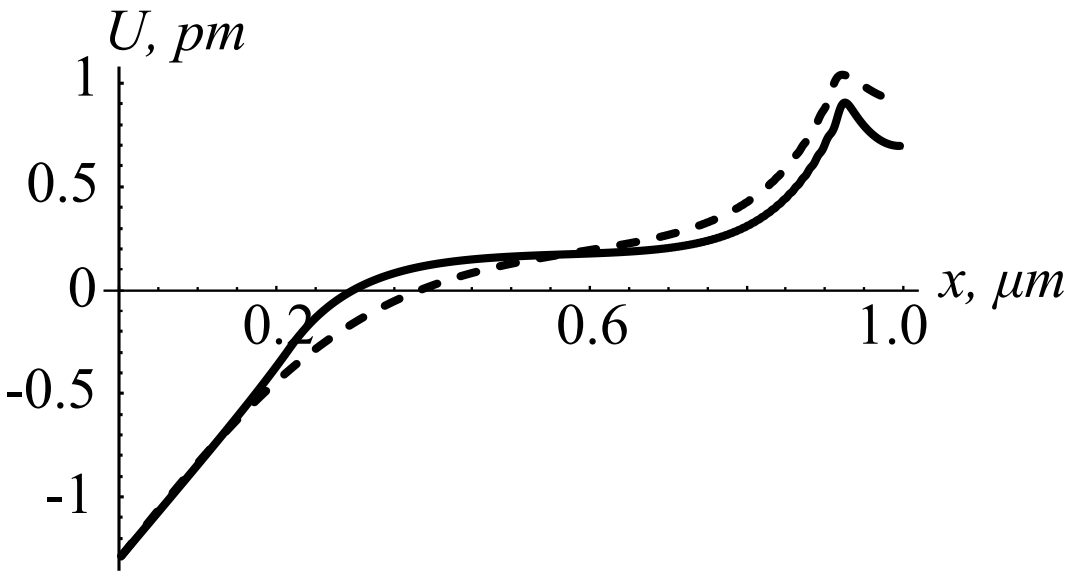

Рисунок 2.16: Перемещения, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости со свободными краями и теплоизоляцией на границе во момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

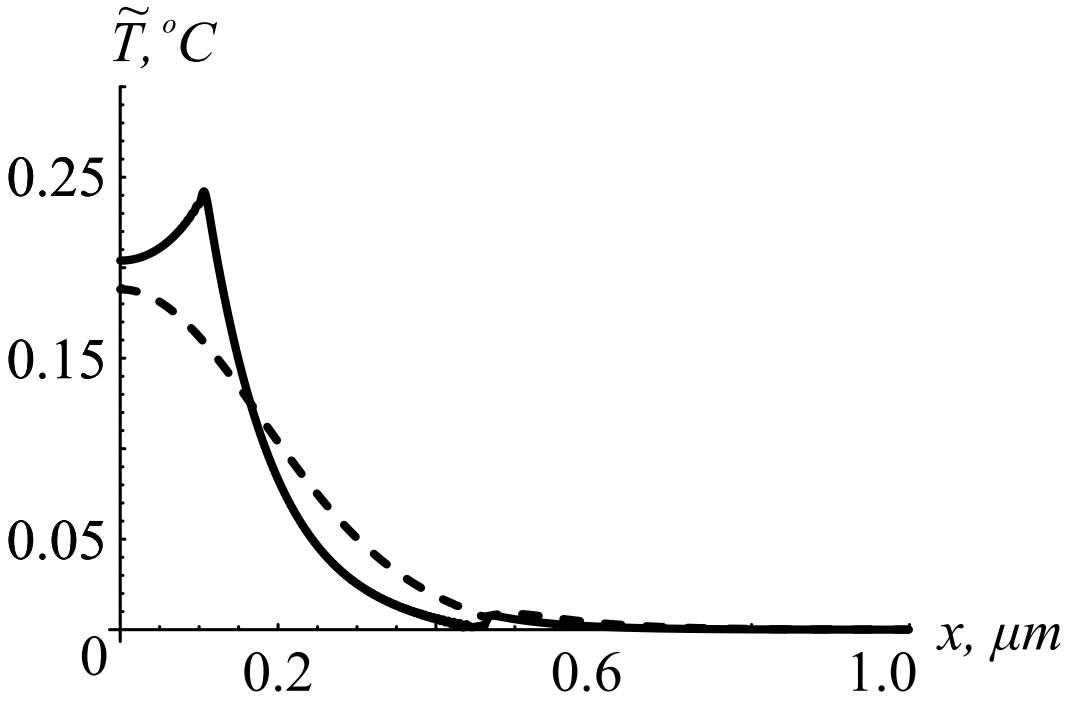

Рисунок 2.17: Температуры, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости со свободными краями и теплоизоляцией на границе во момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

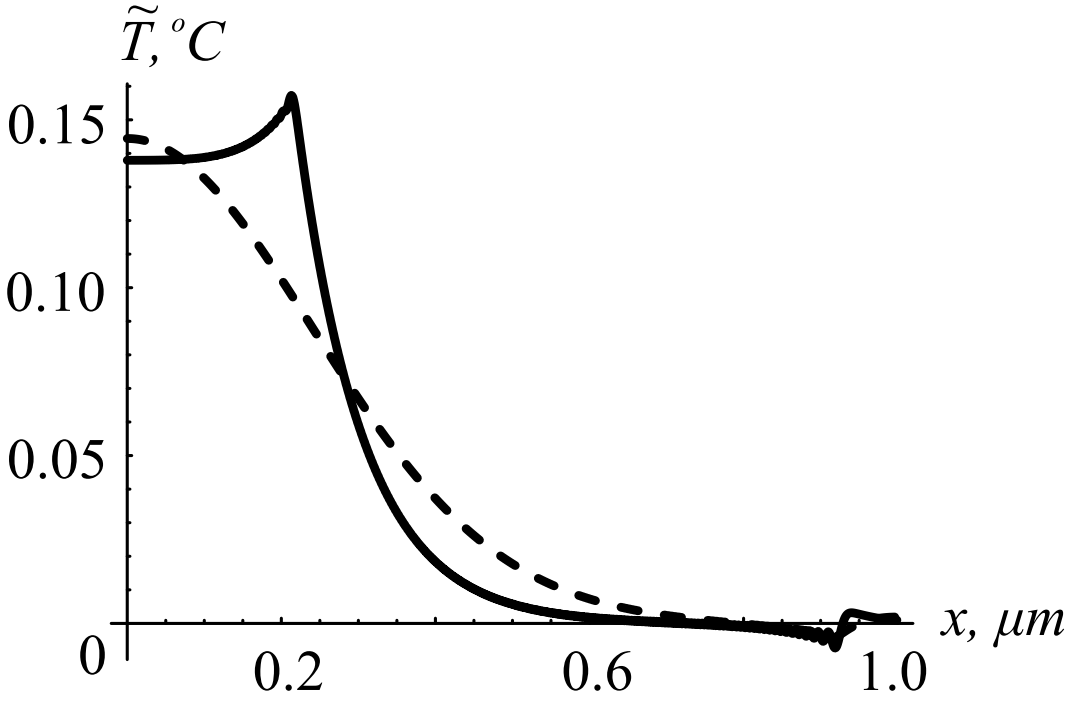

Рисунок 2.18: Температуры, полученные в результате численного решения связанной задачи термоупругости со свободными краями и теплоизоляцией на границе во момент времени $t = 2\tau$. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

В численном решении связанной задачи и аналитическом решении полусвязанной задачи наблюдается отрицательный пик перемещений, который пропадает с течением времени. Это означает, что в начальные моменты времени точки слоя, близкие к облучаемой границе, движутся в сторону источника облучения. Такой же эффект наблюдается и в решении классической задачи.

В решении полусвязанной задачи величина пиков перемещений гиперболической термоупругости (рис. 2.14, сплошные линии) больше, чем в классической термоупругости (рис. 2.14, пунктирные линии). В решении связанной задачи наоборот, пики перемещений меньше в гиперболической термоупругости (рис. 2.15 — 2.18). Это объясняется тем, что на графике рис. 2.14 представлено решение задачи, полученное при условии равенства скоростей квазитепловой и квазиупругой составляющей термоупругой волны и пики этих волн складываются. Однако в связанной задаче эти скорости не могут быть равны, потому в данном случае численное решение лучше отражает реальное поведение материала.

t, нс	V_h, м/с	V_a, м/с	U_{max}, пм	U_{min}, пм	T_{max}, °C	T_{min}, °C
0,001	918	4613	0,00235	-0.078	0,512	0
0,025	1096	4668	0,410	-1,03	0,396	0
0,050	1076	4620	0,641	-1,27	0,325	0
0,075	1075	4640	0,712	-1,31	0,278	0
0,100	1071	4604	0,748	-1,32	0,244	-0,003
0,125	1080	4640	0,747	-1,31	0,218	-0,006
0,150	1075	4633	0,749	-1,31	0,196	-0,007
0,175	1074	4637	0,759	-1,31	0,176	-0,007
0,200	1071	4610	0,922	-1,30	0,158	-0,008

Таблица 2.3: Численное решение связанной задачи термоупругости со свободными краями и теплоизоляцией на границе. t — момент времени, V_h — скорость квазитеплового фронта, V_a — скорость квазиакустического фронта, U_{max}, U_{min} — максимальное и минимальное значение перемещений соответственно, T_{max}, T_{min} — максимальное и минимальное значение температуры соответственно

Численные результаты из таблицы 2.3 показывают, что минимальное значение перемещений стабилизируется спустя 0,1 нс и достигает величины $-1,3$ пм. В то же время максимальное и минимальное значение температуры уменьшается.

2.5 Анализ напряжений

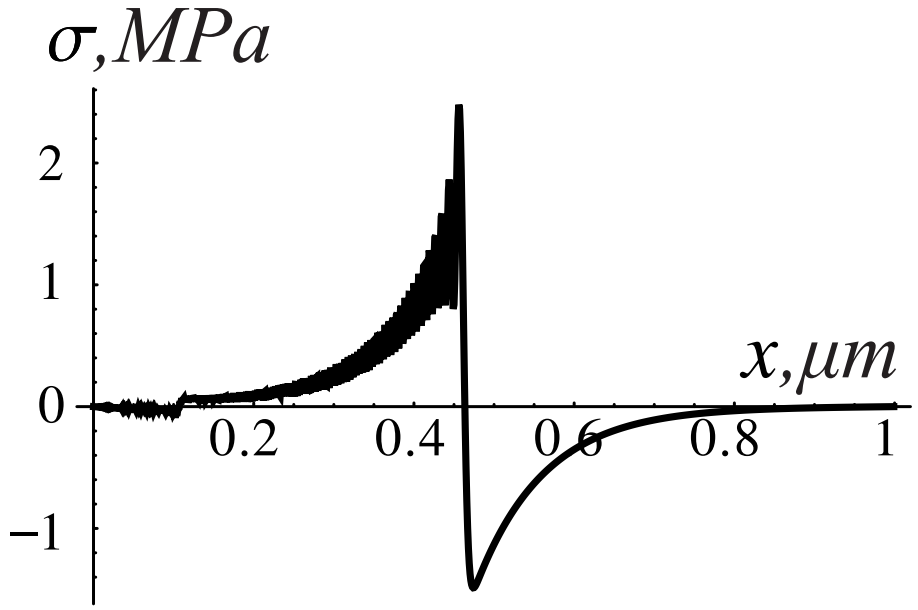

Рисунок 2.19: Напряжения, полученные в результате численного решения задачи о слое под воздействием лазерного импульса со свободными границами и постоянной температурой на них в момент времени $t = \tau = 0{,}1$ нс

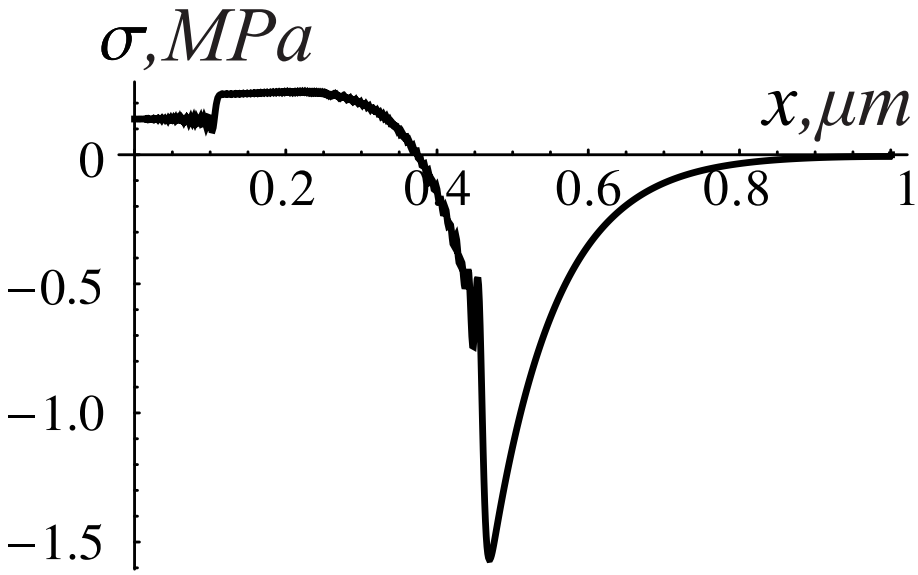

Рисунок 2.20: Напряжения, полученные в результате численного решения задачи о слое под воздействием лазерного импульса с закрепленными границами и постоянной температурой на них в момент времени $t = \tau = 0{,}1$ нс

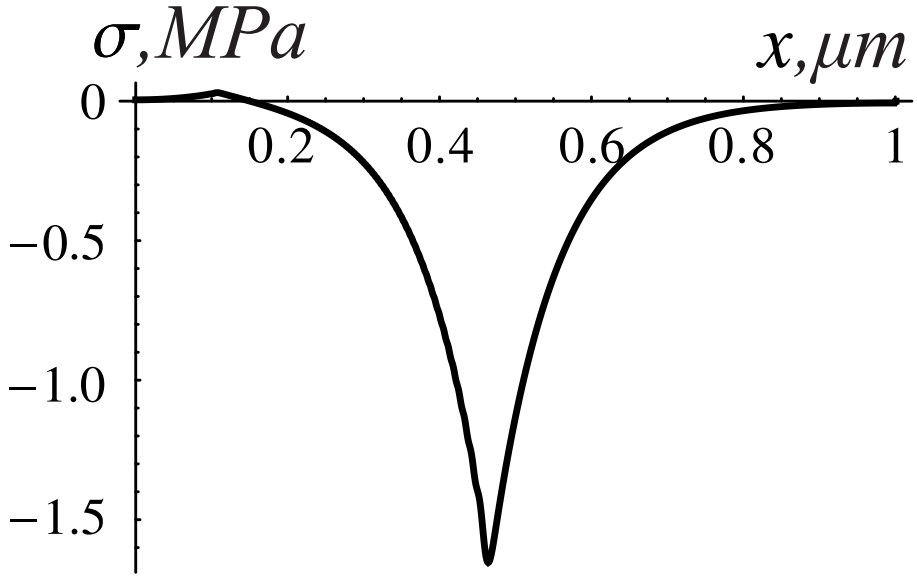

Рисунок 2.21: Напряжения, полученные в результате численного решения задачи о слое под воздействием лазерного импульса с закрепленными и теплоизолированными границами в момент времени $t = \tau = 0{,}1$ нс

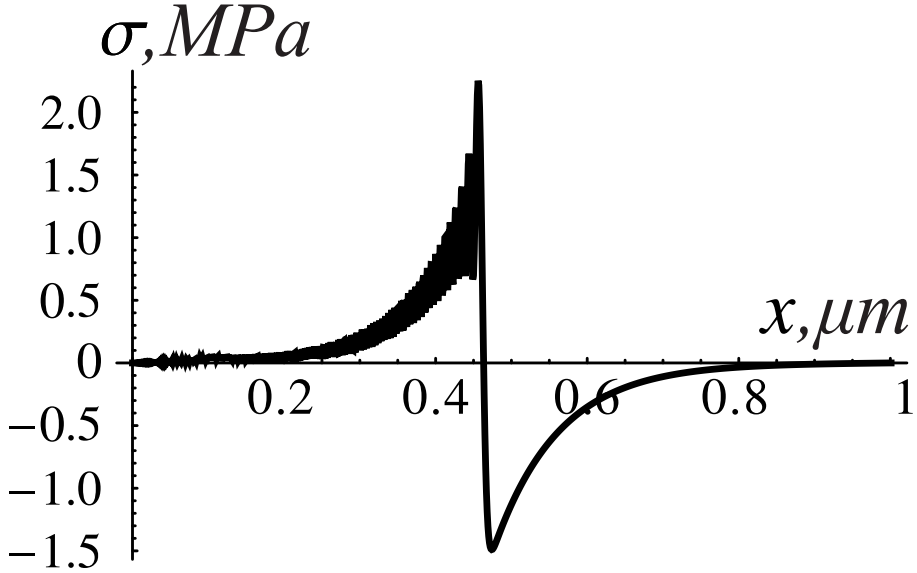

Рисунок 2.22: Напряжения, полученные в результате численного решения задачи о слое под воздействием лазерного импульса со свободными и теплоизолированными границами в момент времени $t = \tau = 0{,}1$ нс

Несмотря на то, что исходная система уравнений термоупругости сформулирована в напряжениях, подробно исследовалось поведение перемещений. Это связано с тем, что в напряжения вносят вклад как механические, так и тепловые слагаемые. Поэтому анализ напряжений не дает полного представ-

ления о взаимном влиянии механических и тепловых процессов. Однако без рассмотрения напряжений исследование нельзя считать завершенным.

Был проведен анализ поведения напряжений в отдалении от границ слоя и получены следующие результаты. При свободных границах на акустическом фронте возникает скачок (рис. 2.19 и 2.22). При этом слева от фронта наблюдается зона сжатия, а справа — зона растяжения. Если границы слоя закреплены, то на акустическом фронте наблюдается точка излома кривой, а в окрестности фронта — зона сжатия (рис. 2.20 и 2.21). Скачок на тепловом фронте наблюдается когда на границе поддерживается постоянная температура. Напряжения на тепловом фронте существенно меньшие, чем на акустическом. Выводы о поведении теплового фронта делались исходя из предположения, что оба фронта находятся на достаточном удалении друг от друга. Если на границе задана теплоизоляция, то на тепловом фронте наблюдается излом (рис. 2.21 и 2.22). Напряжения на этом фронте меняют свой знак только в задаче со свободными границами и постоянной температурой на них (рис. 2.19). Во всех остальных рассмотренных задачах в окрестности теплового фронта наблюдаются растягивающие напряжения. При закрепленных границах и постоянной температуре на них (рис. 2.20) между акустическим и тепловых фронтом появляется дополнительный локальный максимум растягивающих напряжений.

2.6 Заключение

Во всех рассмотренных задачах гиперболические эффекты внесли качественные и количественные изменения в напряженное-деформированное состояние слоя. Наибольшие количественные отличия решения гиперболической задачи от классической возникают в задаче с закрепленными границами и постоянной температурой на них. Наименьшие — в задаче со свободными границами и теплоизоляцией. Температура на облучаемой теплоизолированной границе в гиперболической термоупругости может быть как больше, так и меньше, чем в классической.

Наибольшая разница между решениями уравнения движения в гиперболической и классической задачах термоупругости наблюдается в промежутке между акустическим и тепловым фронтом. При уменьшении расстояния между этими фронтами разница увеличивается. Численные расчеты показали, что во всех рассмотреных задачах первые 0.025 нс наблюдается рост скоростей квазиакустического и квазитеплового фронтов. В последующие моменты времени значения скоростей отклоняются от некоторого среднего значения не более, чем на 5 %, что находится в пределах погрешности численного счета.

Сравнение аналитического решения полусвязанной задачи и численного решения связанной показывает их качественное совпадение. Это значит, что для изучения характера распространения волн в задаче гиперболической термоупругости можно использовать решение в полусвязанной постановке.

Глава 3

Асимптотический анализ дисперсионных соотношений в задаче гиперболической термоупругости Лорда–Шульмана

3.1 Анализ дисперсионных соотношений задачи теплопроводности Максвелла–Каттанео

Известно, что линейное уравнение теплопроводности можно использовать при условии, что температура отклоняется от того значения T_*, при котором определены термодинамические параметры, не более чем на десять градусов. В связи с этим представляется удобным переписать уравнение теплопроводности, сделав замену переменных $\tilde{T} = T - T_*$. Кроме того, предположим, что подвод тепла от внешнего источника отсутствует, а температура изменяется только в направлении одной пространственной координаты x. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau c_r^2}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{1}{c_r^2}\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2} = 0, \qquad c_r^2 = \frac{\lambda}{\rho c_v \tau}\,. \tag{3.1}$$

Здесь c_r — скорость распространения тепловых волн. Нетрудно видеть, что в уравнении (3.1) коэффициент при первой производной температуры по времени не зависит от параметра τ. Действительно, $\tau c_r^2 = \lambda/(\rho c_v)$.

Начнем с анализа дисперсионных соотношений. Для этого представим решение уравнения (3.1) в форме

$$T_a(x,t) = T_0\, e^{-i\delta x}\, e^{(-\alpha + i\omega)\, t}, \tag{3.2}$$

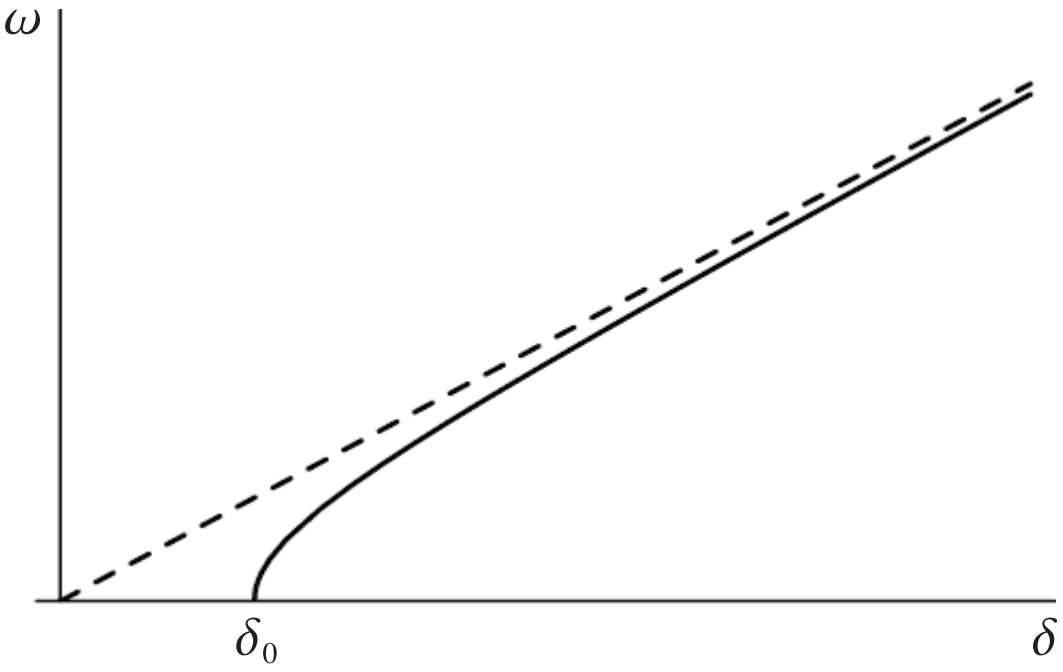

Рисунок 3.1: Зависимость частоты от волнового числа

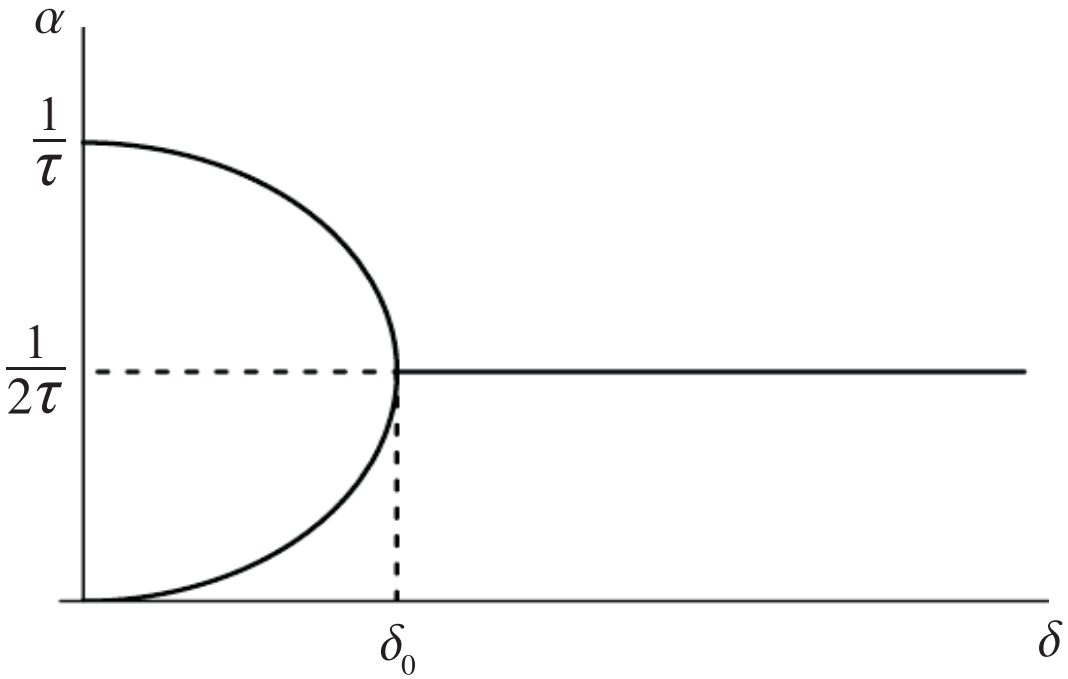

Рисунок 3.2: Зависимость характеристики затухания колебаний от волнового числа

где δ — волновое число, ω — частота, α — характеристика скорости затухания колебаний. Подставив (3.2) в (3.1) и выделив в полученном уравнении действительную и мнимую часть, придем к следующим дисперсионным соотношениям, связывающим между собой величины δ, ω и α:

$$\begin{aligned} &\omega \neq 0: \qquad \alpha = \frac{1}{2\tau}, \qquad \omega = \sqrt{c_r^2\,\delta^2 - \frac{1}{4\tau^2}}, \qquad \delta \geq \delta_0 = \frac{1}{2c_r\tau}; \\ &\omega = 0: \qquad \alpha^{(1,2)} = \frac{1}{2\tau} \mp \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - c_r^2\,\delta^2}, \qquad \delta \leq \delta_0 = \frac{1}{2c_r\tau}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Дисперсионные кривые, соответствующие уравнениям (3.3), представлены на рисунках 3.1, 3.2. На рис. 3.1 представлена зависимость частоты колебаний ω от волнового числа δ. Пунктирной линией на этом графике изображена асимптота $\omega = c_r\delta$. На рис. 3.2 представлена зависимость характеристики затухания колебаний α от волнового числа δ. На участке $0 \leq \delta \leq \delta_0$, где колебания отсутствуют: $\omega = 0$ (см. рис. 3.1), каждому значению δ в соответствуют два значения α. Одна дисперсионная кривая начинается в точке $\alpha = 0$ и возрастает с ростом δ, вторая берет свое начало в точке $\alpha = 1/\tau$ и убывает с ростом δ. Обе кривые сходятся в точке $\delta = \delta_0$, где α принимает значение $\alpha = 1/(2\tau)$. На участке $\delta \geq \delta_0$, где есть колебания: $\omega \neq 0$ (см. рис. 3.1), α не зависит от δ: на рис. 3.2 этот участок дисперсионной кривой представлен прямой линией $\alpha = 1/(2\tau)$. Если бы инерционное слагаемое в уравнении (3.1) отсутствовало, дисперсионное соотношение между α и δ представляло бы собой параболу $\alpha = \tau c_r^2\,\delta^2$, которая хорошо аппроксимирует дисперсионную кривую, идущую из нуля (см. рис. 3.2). Таким образом, при волновых числах, меньших волнового числа отсечки, уравнение (3.1) проявляет свойства классического уравнения теплопроводности, а при волновых числах, больших волнового числа отсечки, уравнение (3.1) проявляет свойства волнового уравнения.

На основании формулы (3.3) можно получить выражения для фазовой C_f и групповой C_g скорости:

$$C_f = \frac{\omega}{\delta}, \qquad C_f(\omega) = \frac{c_r}{\sqrt{1+\frac{1}{4\omega^2\tau^2}}}, \qquad C_f(\delta) = c_r\sqrt{1-\frac{1}{4\tau^2c_r^2\delta^2}},$$
$$C_g = \frac{d\omega}{d\delta}, \qquad C_g(\omega) = c_r\sqrt{1+\frac{1}{4\omega^2\tau^2}}, \qquad C_g(\delta) = \frac{c_r}{\sqrt{1-\frac{1}{4\tau^2c_r^2\delta^2}}}. \tag{3.4}$$

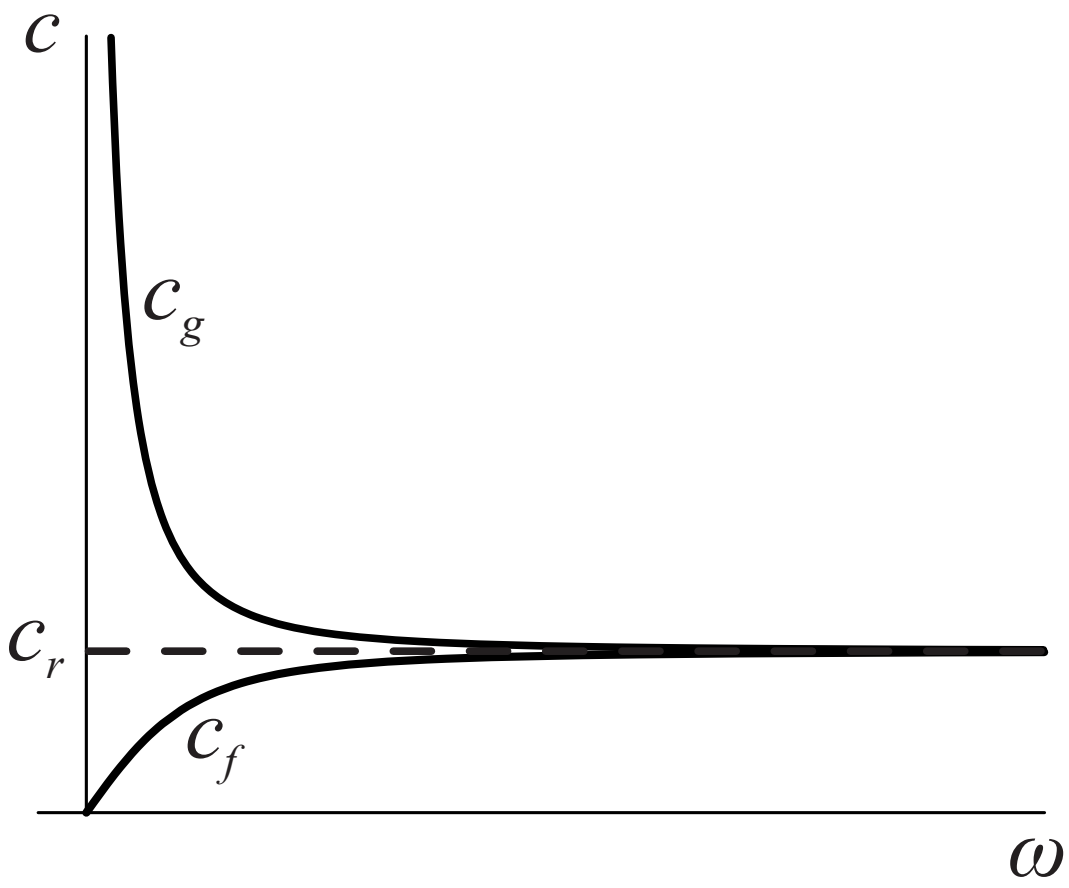

Рисунок 3.3: Зависимость фазовой и групповой скорости от частоты

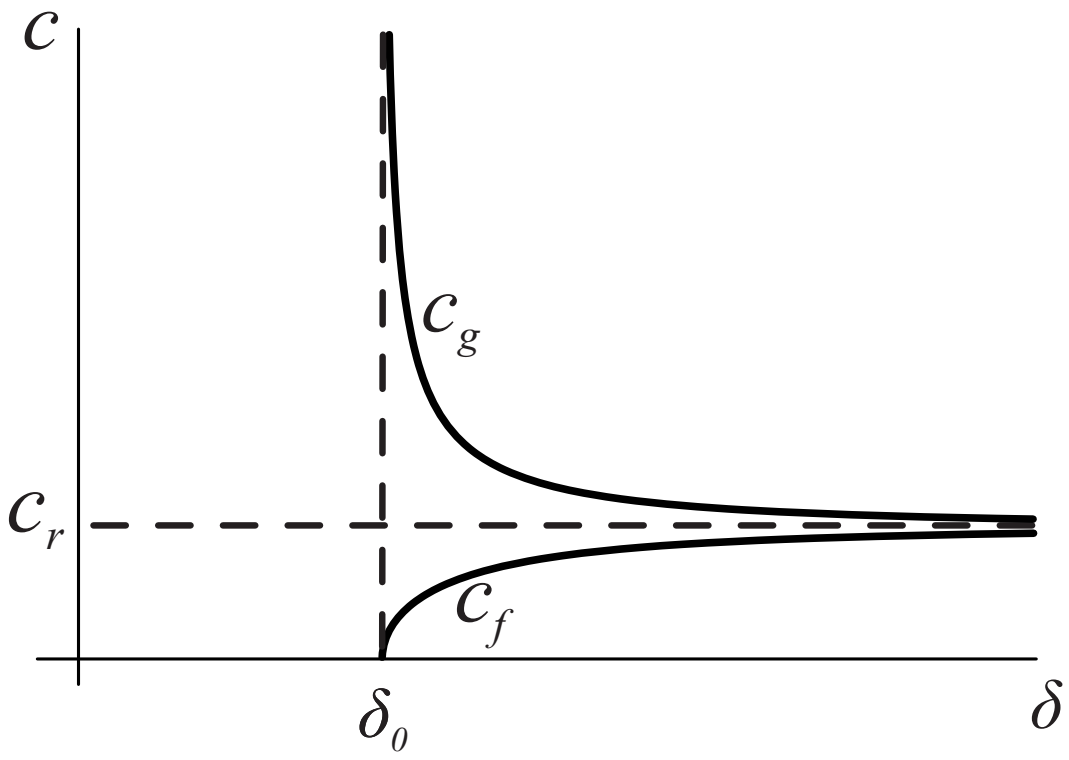

Рисунок 3.4: Зависимость фазовой и групповой скорости от волнового числа

Фазовая и групповая скорость обладает двумя асимптотами (см. рис. 3.3 и 3.4). Когда частота ω обращается в нуль, групповая скорость C_g стремится к $+\infty$, а фазовая C_f обращается в нуль (см. рис. 3.3). С увеличением частоты (или волнового числа) C_f и C_g стремятся к скорости распространения тепловых волн c_r. При $\delta = \delta_0$ групповая скорость C_g стремится к $+\infty$, а C_f обращается в нуль (см. рис. 3.4).

Волновое решение уравнения (3.1) можно представить в виде суммы прямой и обратной бегущих волн:

$$\tilde{T}(x,t) = \left[A_1 \sin\left(\frac{1}{c_r}\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}}\,x - \omega t\right) + \right.$$
$$\left. + A_2 \sin\left(\frac{1}{c_r}\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}}\,x + \omega t\right)\right] e^{-t/(2\tau)}, \quad (3.5)$$

или суммы двух стоячих волн

$$\tilde{T}(x,t) = \left[B_1 \sin\left(\frac{1}{c_r}\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}}\, x\right)\cos(\omega t) + \right.$$
$$\left. + B_2 \cos\left(\frac{1}{c_r}\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}}\, x\right)\sin(\omega t)\right] e^{-t/(2\tau)}. \quad (3.6)$$

Не волновое решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$\tilde{T}(x,t) = C_1 \sin(\delta x)\left(e^{-\alpha^{(1)}t} + e^{-\alpha^{(2)}t}\right) + C_2 \cos(\delta x)\left(e^{-\alpha^{(1)}t} - e^{-\alpha^{(2)}t}\right). \quad (3.7)$$

Величины A_i, B_i, C_i — произвольные постоянные. Представление решения в форме (3.6), (3.7) удобно в тех случаях, когда исследуются тепловые процессы в теле, имеющем ограниченные размеры, а возмущения вызваны начальными условиями.

3.2 Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости

Для анализа дисперсионных соотношений рассмотрим одномерную задачу о распространении термоупругих волн в направлении координаты s, при условии, что внешние воздействия и подвод тепла от внешнего источника считаются равными нулю:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c_v}{\lambda}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) = \frac{\alpha K T_*}{\lambda}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tau\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right), \quad (3.8)$$

$$\left(K + \frac{4}{3}G\right)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \alpha K\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} = \rho\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Путем несложных преобразований систему (3.8), (3.9) можно привести к одному дифференциальному уравнению относительно переменной ε (или точно такому же уравнению относительно переменной T):

$$\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} - (A_1 + A_2)\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial t^2 \partial x^2} - A_3\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t \partial x^2} + A_1 A_3(1 - A_4)\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t^3} + A_1 A_2(1 - A_4)\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial t^4} = 0, \quad (3.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{\rho}{K + \frac{4}{3}G}, \qquad A_3 = \frac{1}{\lambda}\left(\rho c_v + \frac{\alpha^2 K T_*}{1 + \frac{4}{3}GK^{-1}}\right),$$
$$A_2 = \tau A_3, \qquad A_4 = \frac{1}{1 + \rho c_v(1 + \frac{4}{3}GK^{-1})/(\alpha^2 K T_*)}. \tag{3.11}$$

Все величины (3.11) строго положительны. Параметр A_4 изменяется в пределах от 0 до 1, причем для твердых тел и жидкостей $A_4 \ll 1$, а значения $A_4 > 1/2$ характерны для газов. Параметр A_1 характеризует скорость распространения акустических волн в среде: $c_a = 1/\sqrt{A_1(1 - A_4)}$. Параметр A_2 характеризует скорость распространения тепловых волн $c_r = 1/\sqrt{A_2}$.

Классический аналог уравнения получается из (3.10) когда время релаксации теплового потока обращается в нуль, т. е. при $A_2 = 0$:

$$\frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial x^4} - A_1 \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial t^2 \partial x^2} - A_3 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t \partial x^2} + A_1 A_3 (1 - A_4) \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial t^3} = 0. \tag{3.12}$$

Различие между уравнениями (3.10) и (3.12) в том, что уравнение (3.10) содержит производную по времени четвертого порядка.

Для получения дисперсионных соотношений можно искать решение уравнения (3.10) в виде экспоненты, затухающей по координате:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 \, e^{(-\gamma + i\delta)x} \, e^{-i\omega t}, \tag{3.13}$$

где γ — характеристика скорости затухания колебаний, δ — волновое число, ω — частота. Такой подход удобен, если для оценки затухания сравниваются амплитуды колебаний в один и тот же момент времени в разных точках пространства. Подробный анализ соответствующих дисперсионных соотношений можно найти в [48, 49]. Мы будем искать решение уравнения (3.10) в виде экспоненты, затухающей по времени:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 \, e^{-i\delta x} \, e^{(-\alpha + i\omega)t}, \tag{3.14}$$

где δ — волновое число, ω — частота, α — характеристика скорости затухания колебаний. Такой подход удобен, если для оценки затухания сравниваются амплитуды колебаний в одной и той же точке пространства в разные моменты времени.

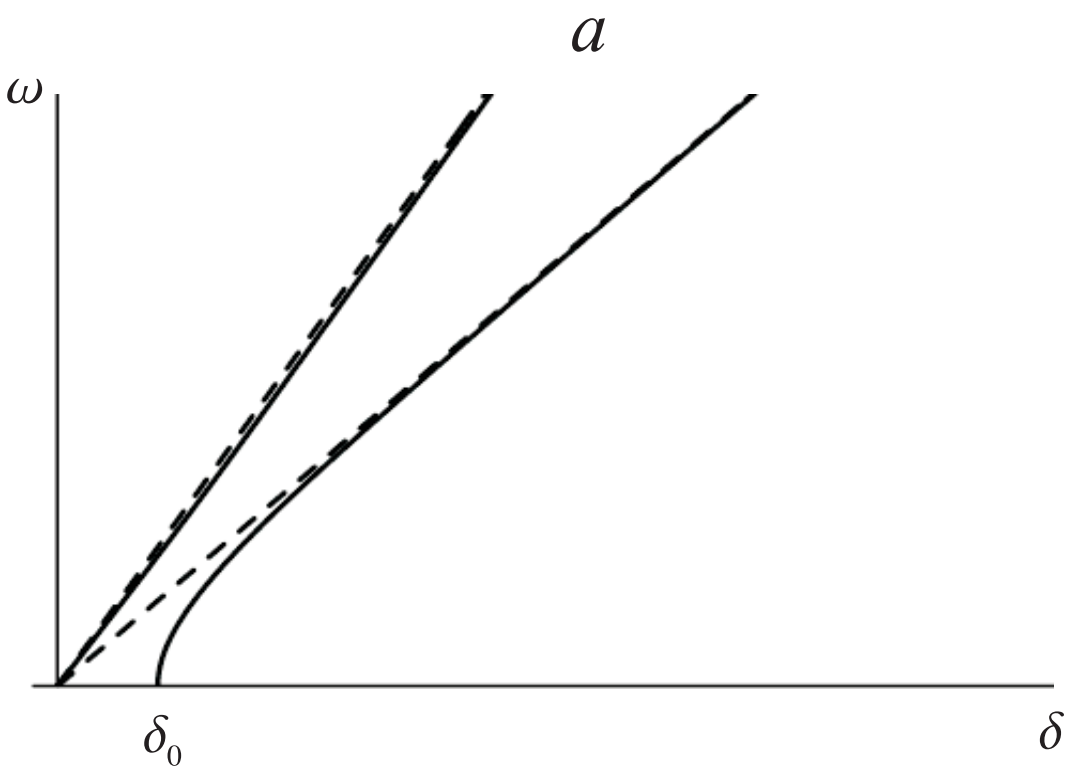

Рисунок 3.5: Зависимость частоты от волнового числа. $c_a > c_r$

Подставив (3.14) в (3.10) и выделив в полученном уравнении действительную и мнимую часть, придем к следующим дисперсионным соотношениям, связывающим между собой величины δ, ω и α:

$$\begin{aligned}
&\delta^4 + \big((A_1 + A_2)(\alpha^2 - \omega^2) - A_3\alpha\big)\,\delta^2 + \\
&\qquad + A_1(1 - A_4)\big(A_2(\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + \omega^4) + A_3\alpha(3\omega^2 - \alpha^2)\big) = 0, \\
&\omega\,\Big((2(A_1 + A_2)\alpha - A_3)\,\delta^2 + A_1(1 - A_4)\big(4A_2\alpha(\alpha^2 - \omega^2) + A_3(\omega^2 - 3\alpha^2)\big)\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Дисперсионные кривые, соответствующие уравнениям (3.15), представлены на рисунках 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14. На рис. 3.5, 3.6 представлена зависимость частоты колебаний ω от волнового числа δ. Почти прямая линия, идущая из нуля, представляет акустический спектр. Этот спектр существует и в классической термоупругости. Кривая, исходящая из волнового числа отсечки δ_0, соответствует тепловому спектру. Наличие этого спектра обусловлено учетом инерционных слагаемых в уравнении теплопроводности. В классической термоупругости тепловой спектр отсутствует. Обе дисперсионные кривые имеют асимптоты, представленные на рис. 3.5, 3.5 пунктирными лини-

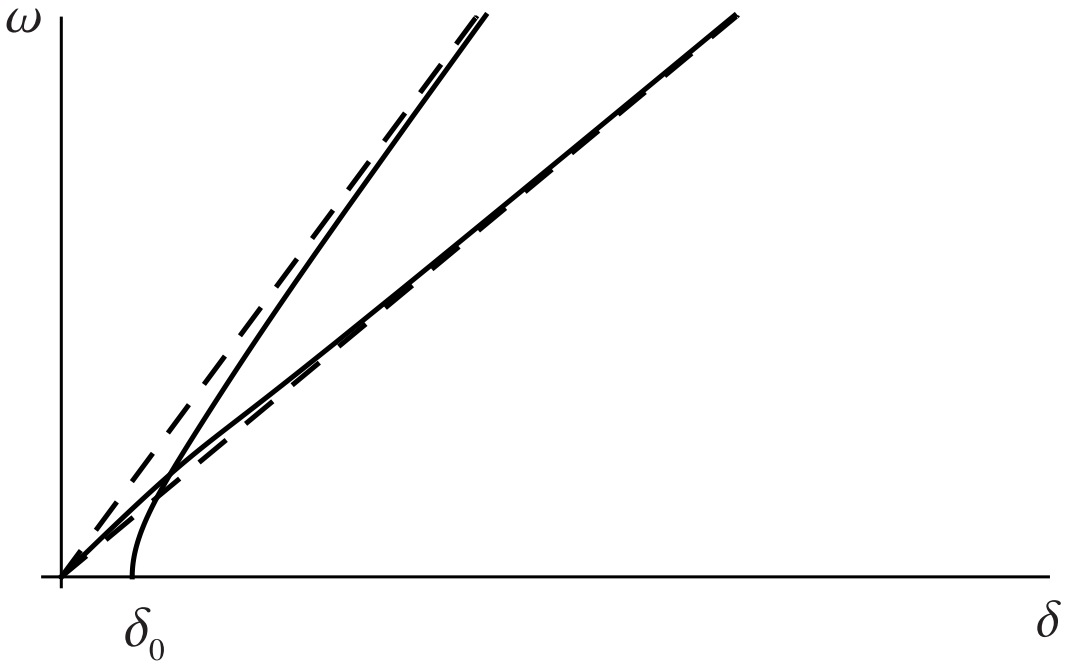

Рисунок 3.6: Зависимость частоты от волнового числа. $c_a < c_r$

ями. Значение волнового числа отсечки δ_0 приведено в (3.18), а уравнения для асимптот в (3.27). В случае, когда скорость акустических волн c_a меньше скорости тепловых c_r дисперсионные кривые имеют общую точку (см. рис. 3.6).

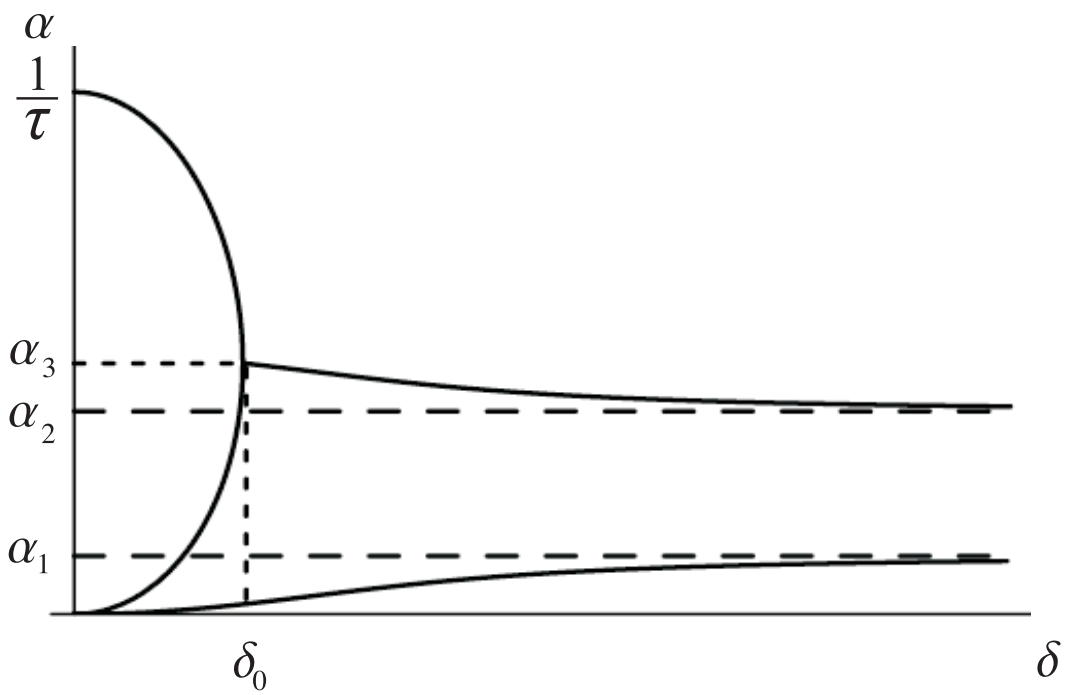

Рисунок 3.7: Зависимость характеристики затухания колебаний от волнового числа. $c_a > c_r$

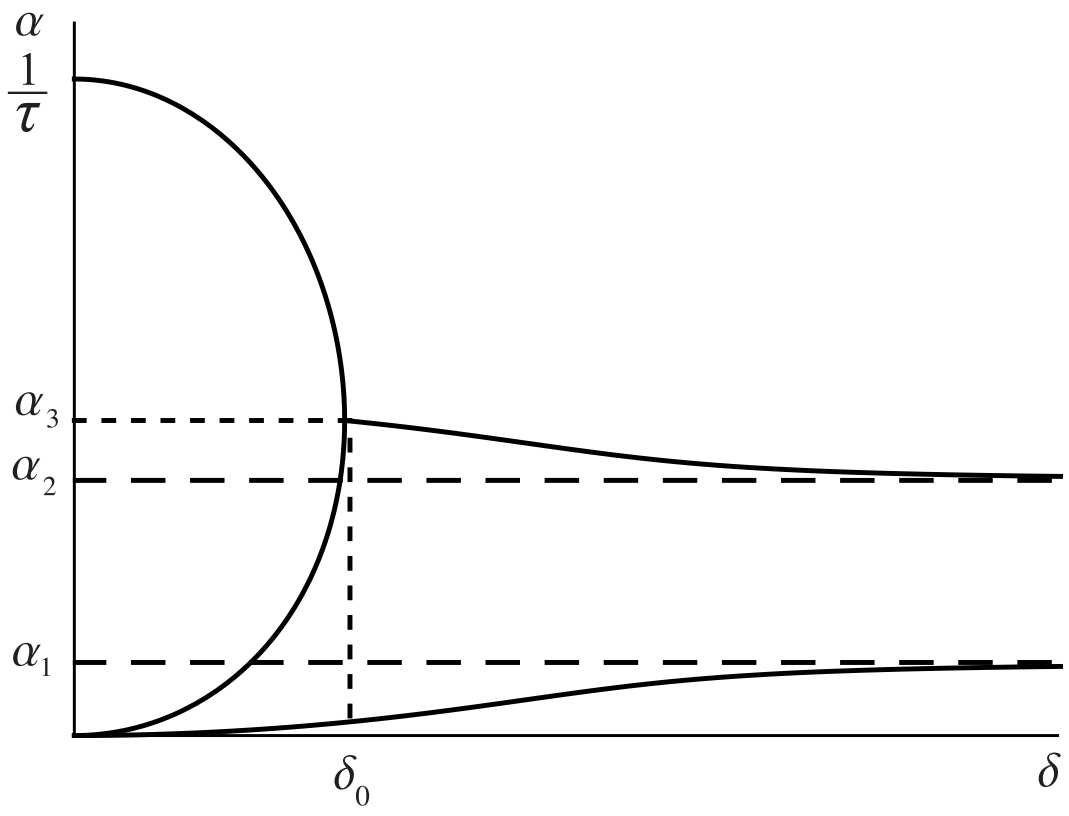

Рисунок 3.8: Зависимость характеристики затухания колебаний от волнового числа. $c_a < c_r$

На рис. 3.7, 3.8 представлена зависимость характеристики скорости затухания колебаний α от волнового числа δ. Кривая, идущая из нуля и имеющая асимптоту $\alpha = \alpha_1$ при $\delta \to \infty$, соответствует акустическому спектру. Эта кривая существует и в классической термоупругости. Остальные кривые соответствуют тепловому спектру. На участке $0 \leq \delta \leq \delta_0$, где тепловые колебания отсутствуют: $\omega = 0$ (см. рис. 3.5, 3.6), каждому значению δ в тепловом спектре соответствуют два значения α. Одна дисперсионная кривая начинается в точке $\alpha = 0$ и возрастает с ростом δ, вторая берет свое начало в точке $\alpha = 1/\tau$ и убывает с ростом δ. Обе кривые сходятся в точке $\delta = \delta_0$, где α принимает значение $\alpha = \alpha_3$. На участке $\delta \geq \delta_0$, где есть тепловые колебания: $\omega \neq 0$ (см. рис. 3.5, 3.6), зависимость α от δ представлена одной кривой, исходящей из точки $\alpha = \alpha_3$ и имеющей асимптоту $\alpha = \alpha_2$ при $\delta \to \infty$. В классической термоупругости существует только одна дисперсионная кривая, соответствующая тепловому спектру. Она начинается в нуле при $\delta = 0$ и возрастает до бесконечности при $\delta \to \infty$. Величины α_1 и α_2 представляют собой корни квадратного

уравнения:

$$4A_2\alpha^2 - 2A_3\alpha + \frac{A_1A_3^2A_4}{(A_1-A_2)^2+4A_1A_2A_4} = 0, \tag{3.16}$$

причем $\alpha_1 < \alpha_2$. Величина α_3 — это единственный вещественный корень кубического уравнения

$$4A_2\alpha^3 - 2\left(1+\frac{4A_2(A_2-A_1+2A_1A_4)}{(A_1-A_2)^2+4A_1A_2A_4}\right)A_3\,\alpha^2+ \\ +\frac{8A_2-4A_1+9A_1A_4}{(A_1-A_2)^2+4A_1A_2A_4}\,A_3^2\,\alpha - \frac{2A_3^3}{(A_1-A_2)^2+4A_1A_2A_4} = 0. \tag{3.17}$$

Волновое число отсечки δ_0 вычисляется по формуле

$$\delta_0 = \alpha_3\sqrt{\frac{A_1(3A_3-4A_2\alpha_3)(1-A_4)}{2\,\alpha_3(A_1+A_2)-A_3}}\,. \tag{3.18}$$

Соотношение акустической c_a и тепловой c_r скорости практически не влияет на характер зависимости коэффициента затухания α от волнового числа δ.

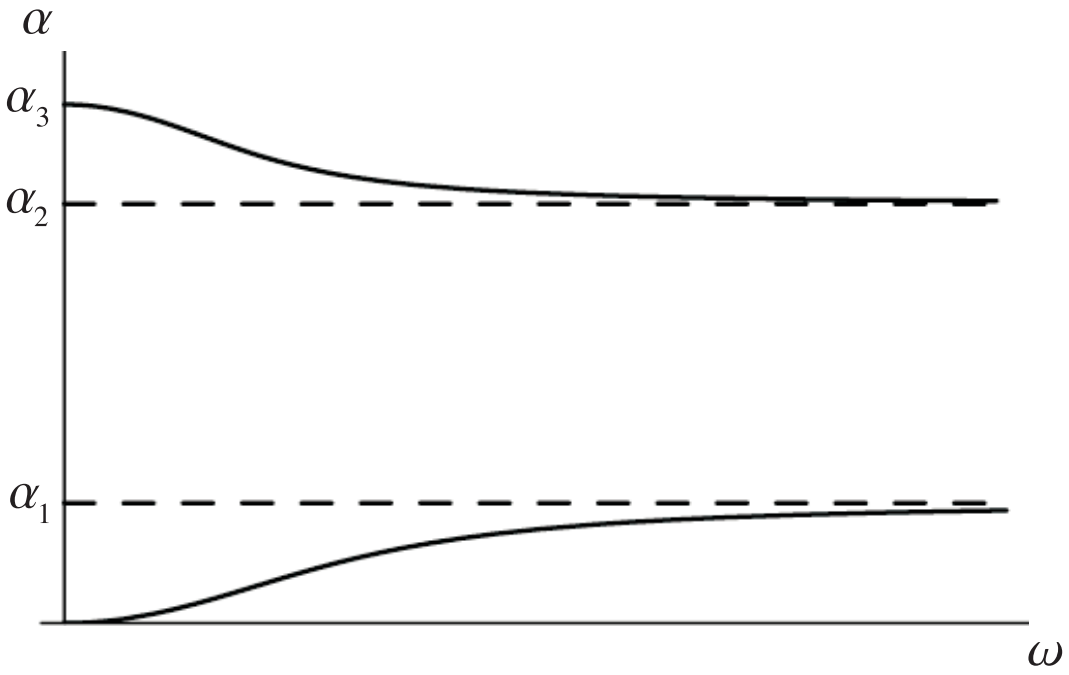

Рисунок 3.9: Зависимость характеристики затухания колебаний от частоты. $c_a > c_r$

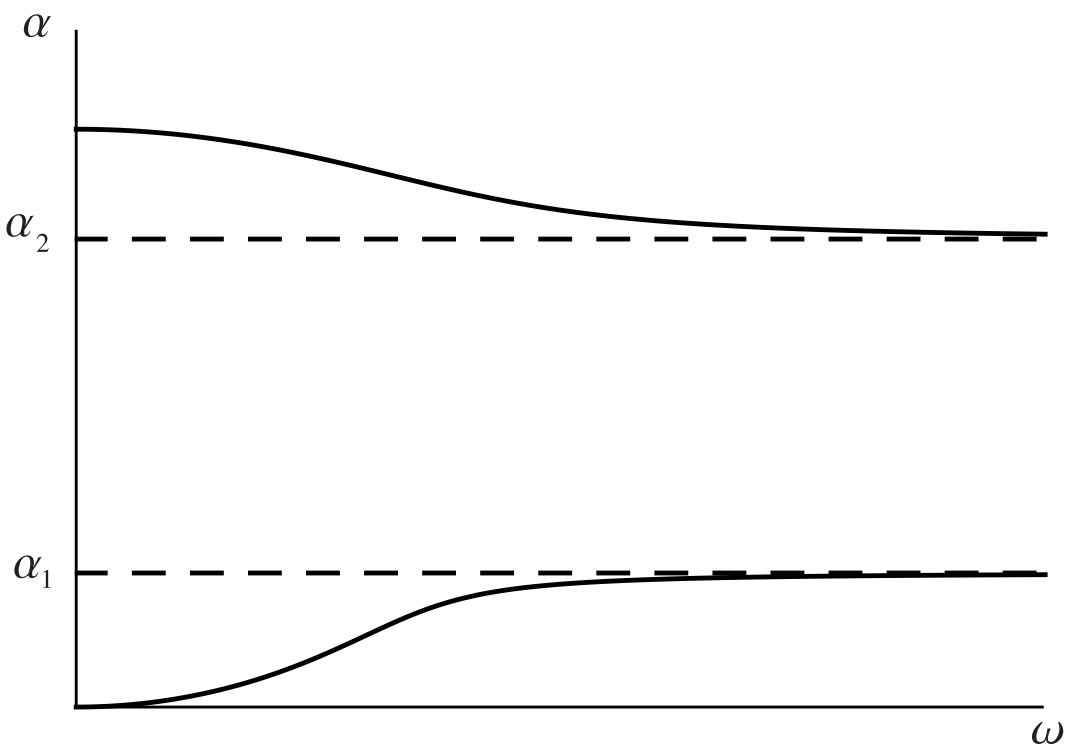

Рисунок 3.10: Зависимость характеристики затухания колебаний от частоты. $c_a < c_r$

На рис. 3.9 и 3.10 представлена зависимость характеристики скорости затухания колебаний α от частоты колебаний ω. Кривая, идущая из точки $\alpha = 0$ и имеющая асимптоту $\alpha = \alpha_1$ при $\omega \to \infty$, соответствует акустическому спектру. Эта дисперсионная кривая существует и в классической термоупругости. Кривая, исходящая из точки $\alpha = \alpha_3$ и имеющая асимптоту $\alpha = \alpha_2$ при $\omega \to \infty$, соответствует тепловому спектру. Эта дисперсионная кривая в классической термоупругости отсутствует. При скорости акустических волн c_a большей, чем скорость тепловых волн c_r кривая, соответствующая тепловому спектру, стремится к асимптоте быстрее, чем кривая, соответствующая акустическому спектру. С другой стороны, если $c_a < c_r$, к асимптоте быстрее стремится кривая, соответствующая акустическому спектру.

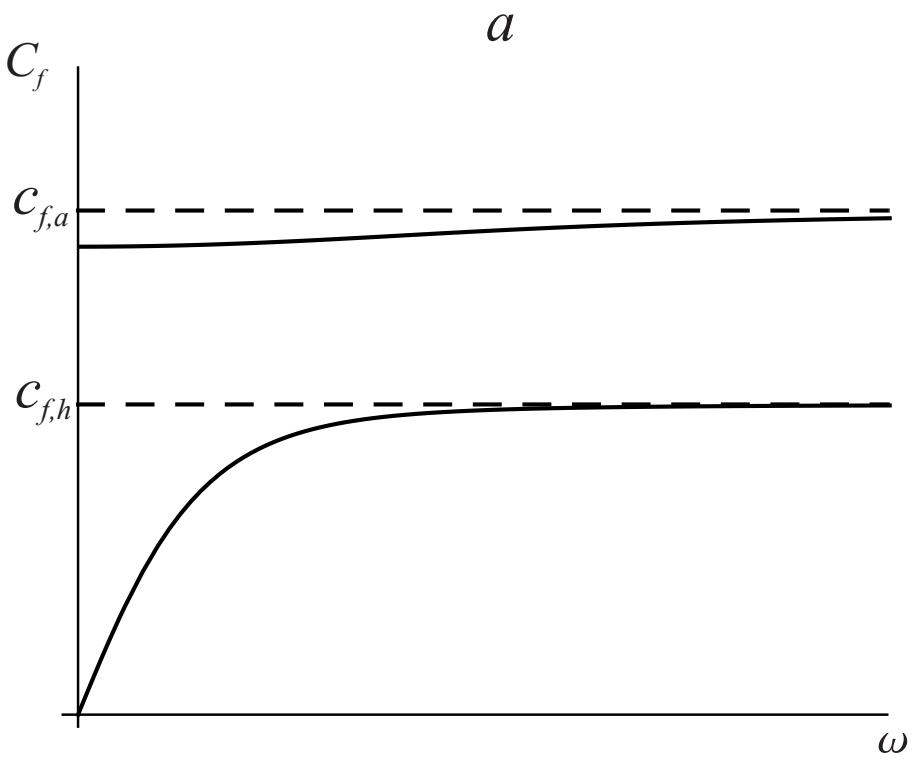

Рисунок 3.11: Зависимость фазовой скорости от частоты. $c_a > c_r$

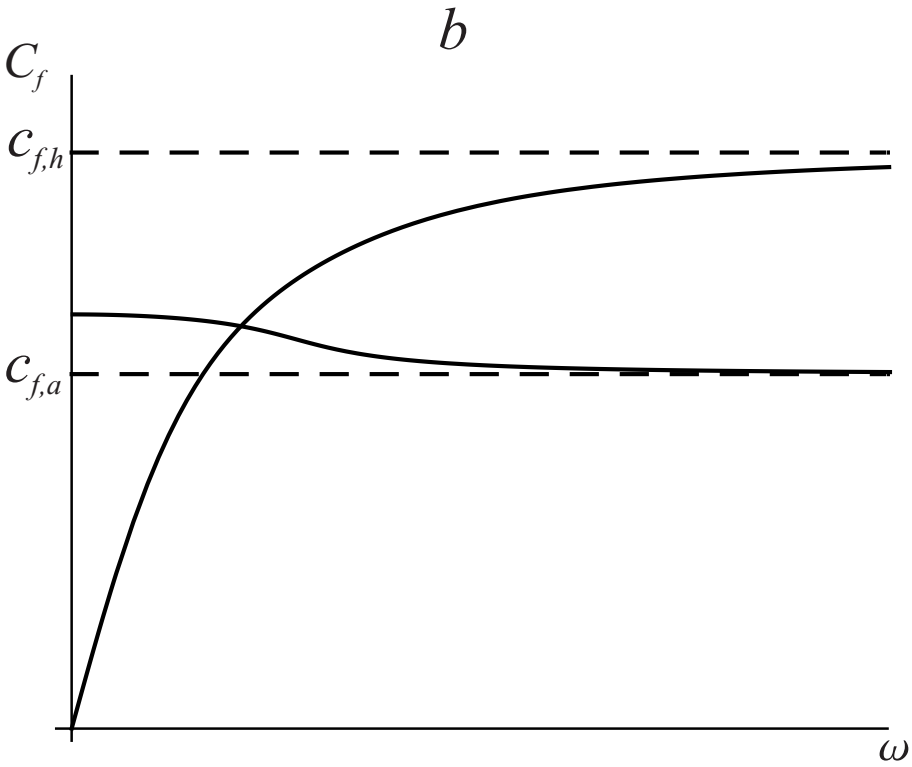

Рисунок 3.12: Зависимость фазовой скорости от частоты. $c_a < c_r$

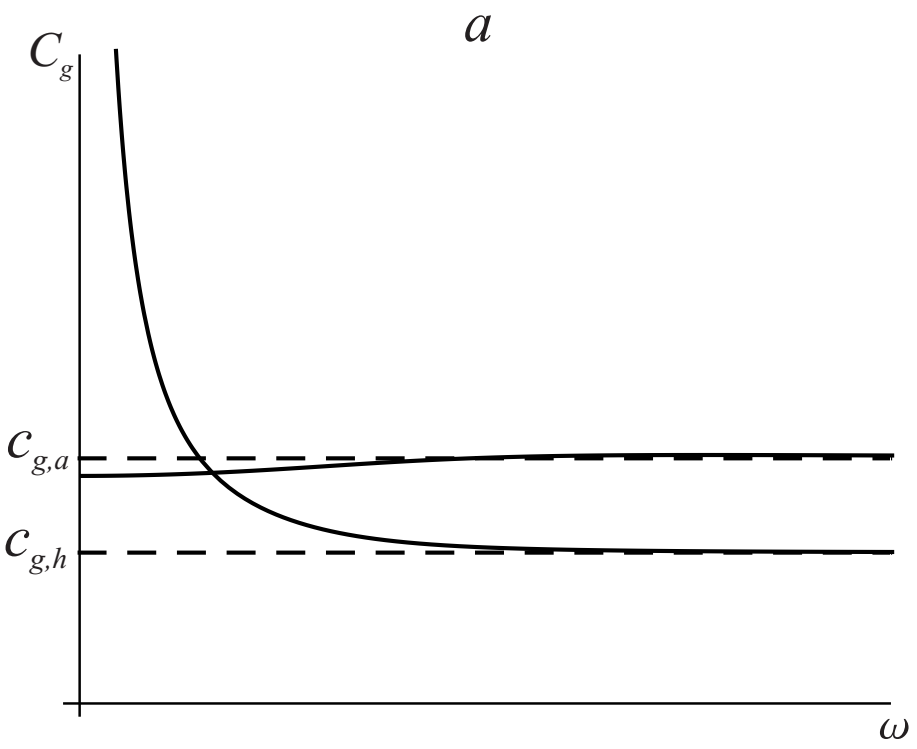

Рисунок 3.13: Зависимость групповой скорости от частоты. $c_a > c_r$

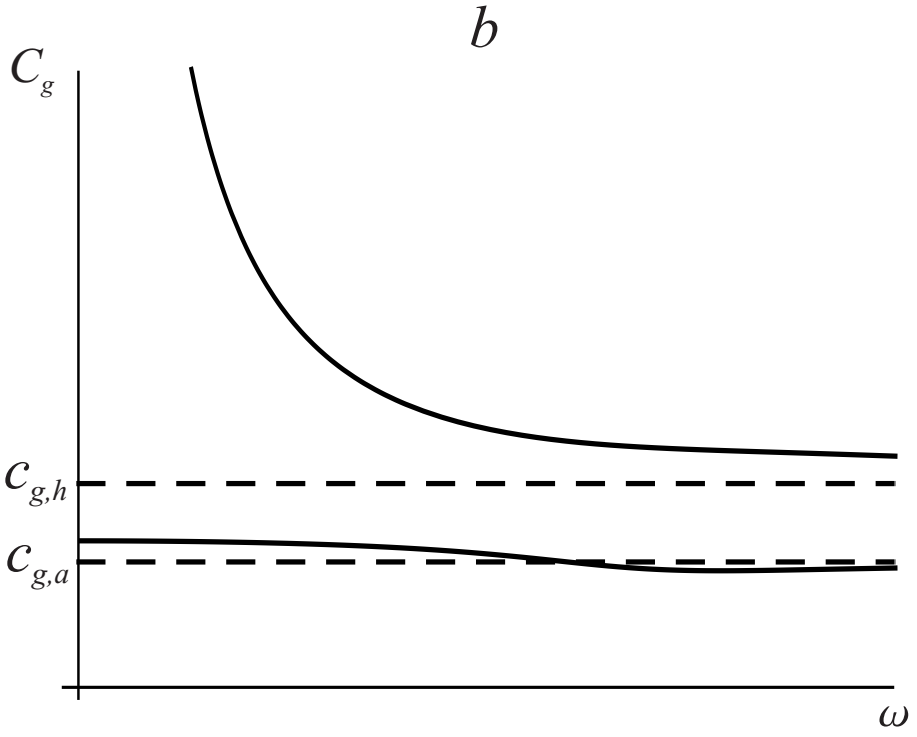

Рисунок 3.14: Зависимость групповой скорости от частоты. $c_a < c_r$

Акустическая ветвь фазовой скорости (см. рис. 3.11) при $c_a > c_r$ стремится к своей асимптоте снизу, а при $c_a < c_r$ — сверху. Поведение тепловой ветви фазовой скорости качественно не зависит от соотношения скоростей тепловых и

акустических волн: ветвь выходит из нуля и стремится к своей асимптоте снизу. По этой причине, а также учитывая что при $c_a < c_r$ акустическая асимптота находится ниже тепловой, акустическая и тепловая ветви имеют общую точку.

Акустическая и тепловая ветви групповой скорости также имеют общую точку, но только при $c_a > c_r$ (см. рис. 3.13). Акустическая ветвь стремится к асимптоте сверху при $c_a > c_r$ и снизу при $c_a < c_r$. При этом в обоих случаях тепловая ветвь выходит из бесконечности и стремится к асимптоте сверху при любом соотношении скоростей тепловых и акустических волн.

Фазовые и групповые скорости обладают одинаковыми асимптотами, которые определяются по формулам:

$$C_a^* = \sqrt{-\frac{c_1}{c}}, \qquad C_h^* = \sqrt{\frac{c_2}{c}}. \tag{3.19}$$

Здесь индексом "a" обозначен акустический спектр, индексом "h" — тепловой. Константы c_1 и c_2, в случае когда $c_a > c_r$ вычисляются по формуле:

$$c_{1,2} = \mp\frac{A_1 A_3^3 A_4 (A_2 - A_1 + 2A_1A_4)}{4A_2((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4)^{5/2}} \left[A_1 + A_2 \pm \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}\right]. \tag{3.20}$$

В случае, когда $c_a < c_r$ константы c_1 и c_2 находятся из следующего выражения:

$$c_{1,2} = \pm\frac{A_1 A_3^3 A_4 (A_2 - A_1 + 2A_1A_4)}{4A_2((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4)^{5/2}} \left[A_1 + A_2 \mp \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}\right]. \tag{3.21}$$

Константа c вычисляется по формуле:

$$c = \frac{A_1A_2(1-A_4)(c_2 - c_1)}{A_1 + A_2}. \tag{3.22}$$

Величина c_1 всегда отрицательна, как видно из формул (3.20) и (3.21), при этом c_2 всегда положительна. Таким образом подкоренные выражения в (3.19) также всегда положительны.

Дисперсионные кривые, изображенные на рис. 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 хорошо аппроксимируются приближенными формулами, полученными без предположения о малости каких-либо параметров.

Приближенные формулы, выражающие зависимость между частотой колебаний ω и характеристикой скорости затухания колебаний α (см. рис. 3.9, 3.10) для акустического и теплового спектров имеют вид:

$$\omega_a = \sqrt{\alpha\left(\frac{2A_3}{A_1A_4} + \frac{c_1\alpha}{\alpha_1^2(\alpha_1-\alpha)}\right)}, \qquad \omega_h = \sqrt{\frac{c_2(\alpha_3-\alpha)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha-\alpha_2)}}. \tag{3.23}$$

Приближенные формулы, выражающие зависимость между волновым числом δ и величиной α (см. рис. 3.7, 3.8) для акустического спектра при всех значениях δ, а для теплового спектра при $\delta \geq \delta_0$, выглядят так:

$$\delta_a = \sqrt{\alpha\left(\frac{2A_3(1-A_4)}{A_4} + \frac{c\,\alpha}{\alpha_1^2(\alpha_1-\alpha)}\right)}, \qquad \delta_h = \sqrt{\delta_0^2 + \frac{c\,(\alpha_3-\alpha)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha-\alpha_2)}}. \tag{3.24}$$

Здесь индексы “a” и “h” также обозначают акустический и тепловой спектры.

Точная формула, выражающая зависимость между волновым числом δ и величиной α для теплового спектра при $\delta \leq \delta_0$, имеет вид:

$$\delta_h = \sqrt{\frac{\alpha}{2}\left[A_3 - (A_1+A_2)\,\alpha + \sqrt{\left(A_3-(A_1+A_2)\,\alpha\right)^2 + 4A_1\alpha(A_3-A_2\alpha)(1-A_4)}\right]}. \tag{3.25}$$

Приближенные формулы, выражающие зависимость между волновым числом δ и частотой ω (см. рис. 3.5, 3.6) для акустического спектра при всех значениях δ, а для теплового спектра при $\delta \geq \delta_0$, выглядят так:

$$\delta_a = \omega_a\sqrt{-\frac{c}{c_1} + \frac{2A_3\alpha_1\big(c + c_1A_1(1-A_4)\big)}{c_1\big(2A_3\alpha_1 + A_1A_4\,\omega_a^2\big)}}, \qquad \delta_h = \sqrt{\delta_0^2 + \frac{c\,\omega_h^2}{c_2}}. \tag{3.26}$$

Уравнения для асимптот, изображенных на рис. 3.5, 3.6 пунктирными линиями, имеют вид:

$$\delta_a = \sqrt{-\frac{c}{c_1}}\,\omega_a, \qquad \delta_h = \sqrt{\frac{c}{c_2}}\,\omega_h. \tag{3.27}$$

С помощью (3.26) можно найти приближенные формулы, выражающие зависимость между C_f, C_h и ω:

$$C_{f,a}(\omega) = \sqrt{-\frac{c_1(2A_3\alpha_1 + A_1A_4\omega^2)}{2A_1A_3c_1\alpha_1(A_4-1) + A_1A_4c\omega^2}}, \qquad C_{f,h}(\omega) = \omega\sqrt{\frac{c_2}{\delta_0^2c_2 + c\omega^2}},$$

$$C_{g,a}(\omega) = -\frac{c_1(2A_3\alpha_1 + A_1A_4\omega^2)^2}{A_1(A_1A_4^2c\omega^4 + 4A_3\alpha_1(A_4c\omega^2 + A_3c_1\alpha_1(A_4-1)))C_{f,a}},$$

$$C_{g,h}(\omega) = \frac{c_2}{C_{f,h}c}. \tag{3.28}$$

Сравнительный анализ дисперсионных соотношений в задаче теплопроводности и термоупругости показал, что дисперсионные кривые имеют качественные отличия, но количественные отличия малы. Это следует из того, что значения горизонтальных асимптот α_2 и α_3 близки друг к другу и к значению горизонтальной асимптоты в задаче теплопроводности. Кроме того значение волнового числа отсечки δ_0 в задачи теплопроводности и в задаче термоупругости также имеют малое отличие. Волновое число отсечки, с помощью которого можно вычислить время релаксации теплового потока, можно определить экспериментально. Так как дисперсионные кривые в связанной задаче имеют малые количественные отличия от аналогичных кривых в задаче теплопроводности, для определения времени релаксации теплового потока можно использовать формулу для волнового числа отсечки, полученную на основании анализа дисперсионных кривых в задаче теплопроводности:

$$\tau = \frac{\rho c_v}{4\lambda\delta_0^2}. \tag{3.29}$$

Суть экспериментального метода определения времени релаксации теплового потока изложена в следующем параграфе.

3.3 Экспериментальный метод определения времени релаксации теплового потока

Рассмотрим слой теплопроводящей среды толщиной l. Будем считать, что температура твердого тела $\tilde{T}(x,t)$ является функцией времени и координаты x

в направлении толщины слоя: $0 \le x \le l$. Внешние объемные воздействия на твердое тело, как тепловые, так и механические, отсутствуют. Границы слоя находятся в тепловом контакте с внешней средой, которая поддерживается при температуре T_*. В начальный момент времени задана температура твердого тела $T_0(x)$ и скорость ее изменения $\dot{T}_0(x)$. Для переменной $\tilde{T}$ граничные условия являются однородными:

$$\tilde{T}\big|_{x=0} = 0, \qquad \tilde{T}\big|_{x=l} = 0. \tag{3.30}$$

Начальные условия имеют вид:

$$\tilde{T}\big|_{t=0} = \tilde{T}_0(x), \qquad \dot{\tilde{T}}\big|_{t=0} = \dot{\tilde{T}}_0(x). \tag{3.31}$$

Решение задачи (3.1), (3.30), (3.31) представим в виде ряда по собственным формам:

$$\tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{T}_k \, \sin\frac{\pi k x}{l} \, e^{(-\alpha_k + i\,\omega_k)\,t}, \tag{3.32}$$

где ω_k — частота, α_k — характеристика скорости затухания колебаний. Нетрудно убедиться, что выражение (3.32) тождественно удовлетворяет граничным условиям (3.30). Подставив (3.32) в (3.1) и проведя несложные преобразования, получим следующие выражения для α_k и ω_k:

$$\begin{aligned} &k < k_* : \qquad \omega_k = 0, \qquad \alpha_k^{(1,2)} = \frac{1}{2\tau} \mp \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \left(\frac{\pi k c_r}{l}\right)^2}; \\ &k \ge k_* : \qquad \alpha_k = \frac{1}{2\tau}, \qquad \omega_k = \sqrt{\left(\frac{\pi k c_r}{l}\right)^2 - \frac{1}{4\tau^2}}, \qquad k_* = 1 + \left[\frac{l}{2\pi c_r \tau}\right], \end{aligned} \tag{3.33}$$

где квадратные скобки в выражении для k_* обозначают целую часть величины.

Запишем ряд (3.32) с учетом (3.33):

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{k_*-1} \left(\tilde{T}_k^{(1)} \, e^{-\alpha_k^{(1)} t} + \tilde{T}_k^{(2)} \, e^{-\alpha_k^{(2)} t}\right) \sin\frac{\pi k x}{l} + \\ + e^{-t/(2\tau)} \sum_{k=k_*}^{\infty} \left(\tilde{T}_k^{(1)} \, \cos(\omega_k t) + \tilde{T}_k^{(2)} \, \sin(\omega_k t)\right) \sin\frac{\pi k x}{l}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Определим коэффициенты ряда (3.34), воспользовавшись начальными условиями (3.31). Предположим сначала, что $\dot{\tilde{T}}_0(x) \ll \tilde{T}_0(x)/\tau$. В этом случае коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_k^{(1)} \approx \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{T}_0(x)\,\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx; \\ &k < k_*: \quad \tilde{T}_k^{(2)} \approx 0, \qquad k \geq k_*: \quad \tilde{T}_k^{(2)} \approx \frac{1}{2\tau\omega_k}\tilde{T}_k^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Предположим теперь, что $\dot{\tilde{T}}_0(x) \sim \tilde{T}_0(x)/\tau$. В этом случае коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} &k < k_*: \quad \tilde{T}_k^{(2)} \approx \frac{2}{l\alpha_k^{(2)}}\int_0^l \dot{\tilde{T}}_0(x)\,\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx, \\ &\tilde{T}_k^{(1)} \approx -\tilde{T}_k^{(2)} + \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{T}_0(x)\,\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx; \\ &k \geq k_*: \quad \tilde{T}_k^{(1)} = \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{T}_0(x)\,\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx, \\ &\tilde{T}_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_k}\left[\frac{1}{2\tau}\tilde{T}_k^{(1)} + \frac{2}{l}\int_0^l \dot{\tilde{T}}_0(x)\,\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx\right]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Таблица 3.1: Медь: зависимость решения от масштабного фактора при $\tau = 0.1$ нс

l (мкм)	k_*	$l/(\pi k_*)$ (мкм)	ω_{k_*} (рад/с)	$\alpha_{k_*}/\omega_{k_*}$	$\alpha_{k_*}/\alpha_1^{(1)}$
10^6	1466586	0.217	2890	1732.9	$4.30 \cdot 10^{12}$
1000	1467	0.217	11.9	42.07	$4.30 \cdot 10^6$
100	147	0.217	34.1	14.65	4307.0
10	15	0.212	1.07	4.66	429.67
5	8	0.199	2.18	2.29	107.04
4	6	0.212	1.07	4.66	68.32
3	6	0.185	3.03	1.65	52.19
1	2	0.159	4.64	1.079	3.72
0.1	1	0.0318	0.337	0.1483	—
0.01	1	0.00318	0.0341	0.0147	—

Таблица 3.2: Медь: зависимость решения от масштабного фактора при $\tau = 1$ ns

l (μm)	k_*	$l/(\pi k_*)$ (μm)	ω_{k_*} (rad/ns)	$\alpha_{k_*}/\omega_{k_*}$	$\alpha_{k_*}/\alpha_1^{(1)}$
10^6	463776	0.686	96400	518.43	$4.30 \cdot 10^{11}$
1000	464	0.686	156	32.11	$4.30 \cdot 10^{05}$
100	47	0.677	822	6.08	4301.25
10	5	0.637	20.1	2.48	42.51
5	3	0.531	41.0	1.22	10.23
4	2	0.637	20.1	2.48	6.34
3.5	2	0.557	36.0	1.39	4.71
1	1	0.318	95.5	0.523	—
0.1	1	0.0318	0.18	0.0464	—
0.01	1	0.00318	0.0108	0.0046	—

Таблица 3.3: Медь: зависимость решения от масштабного фактора при $\tau = 10$ ns

l (μm)	k_*	$l/(\pi k_*)$ (μm)	ω_{k_*} (rad/ns)	$\alpha_{k_*}/\omega_{k_*}$	$\alpha_{k_*}/\alpha_1^{(1)}$
10^6	146659	2.17	12000	415.66	$4.30 \cdot 10^{10}$
1000	147	2.17	3410	14.65	$4.30 \cdot 10^4$
100	15	2.12	107	4.66	429.67
10	2	1.59	464	1.08	3.72
5	1	1.59	464	1.08	—
4	1	1.27	690	0.72	—
3.5	1	1.11	836	0.60	—
1	1	0.318	33.7	0.148	—
0.1	1	0.0318	3.41	0.0147	—
0.01	1	0.00318	0.341	0.0015	—

Таблица 3.4: Медь: зависимость решения от масштабного фактора при $\tau = 100$ ns

l (μm)	k_*	$l/(\pi k_*)$ (μm)	ω_{k_*} (rad/ns)	$\alpha_{k_*}/\omega_{k_*}$	$\alpha_{k_*}/\alpha_1^{(1)}$
10^6	46378	6.86	229000	218.37	$4.30 \cdot 10^9$
1000	47	6.77	82200	6.08	$4.30 \cdot 10^3$
100	5	6.37	2010	2.48	42.51
10	1	3.18	9550	0.52	—
5	1	1.59	210	0.24	—
4	1	1.27	265	0.19	—
3.5	1	1.11	304	0.16	—
1	1	0.318	10.8	0.046	—
0.1	1	0.0318	1.08	0.0046	—
0.01	1	0.00318	0.108	0.0005	—

Проведем анализ решения задачи о свободных колебаниях в зависимости от масштабного фактора. Как видно из формул (3.33), значение номера гармоники k_*, начиная с которого решение носит колебательный характер, и значение собственной частоты ω_{k_*} зависят от толщины слоя l. В таблицах 3.1 — 3.4 приведены следующие результаты. Первый столбец — толщина слоя. Второй столбец — значения номера первой колебательной гармоники k_*. Третий столбец — значения величины, обратной волновому числу, которая при данных граничных условиях вычисляется по формуле $l/(\pi k_*)$. Четвертый столбец — значения частоты ω_{k_*}. Пятый столбец — отношения коэффициента затухания $\alpha_{k_*} = 1/(2\tau)$ к частоте колебаний ω_{k_*}. Шестой столбец — отношения коэффициента затухания α_{k_*} к коэффициенту затухания первой собственной формы $\alpha_1^{(1)}$. Вычисления проводились при различных значениях толщины слоя для меди. По разным теоретическим и экспериментальным оценкам значения времени релаксации теплового потока τ для металлов лежит в диапазоне от 0.01 до 10 нс.

Поэтому анализ решения от масштабного фактора был проведен для четырех значений τ: 0.01, 0.1, 1 и 10 нс.

Результаты вычислений показали, что на макроуровне колебательные процессы не представляют интереса, так как появляются при очень больших k_*. Чем больше время релаксации теплового потока τ — тем больше толщина слоя и меньше число k_*, при котором появляются колебательные решения. При $\tau = 100$ нс (см. табл. 3.4) колебательные решения возникают при небольших значениях k_*, если толщина слоя l не превышает величины порядка 0.01 мкм. При $\tau = 0.1$ нс (см. табл. 3.1) небольшие значения k^* достигаются только тогда, когда толщина слоя меньше 5 мкм. Однако, колебательный процесс успевает развиться во времени только тогда, когда отношение коэффициента затухания α_{k_*} к собственной частоте ω_{k_*} меньше единицы. Таким образом колебательный характер решения уравнения теплопроводности может проявиться только при толщине слоя $l \sim 0.1$ мкм (см. табл. 3.4) если $\tau = 100$ нс и при $l \sim 0.1$ мкм (см. табл. 3.1) если $\tau = 0.1$ нс.

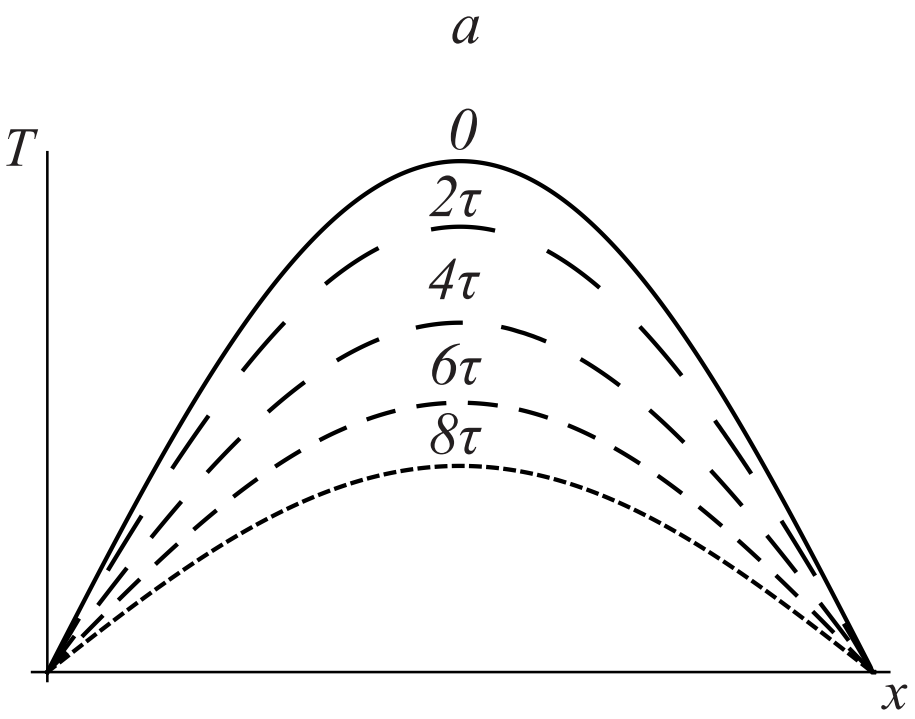

Рисунок 3.15: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 0.1$ нс, $l = 1$ мкм, $k = 1$

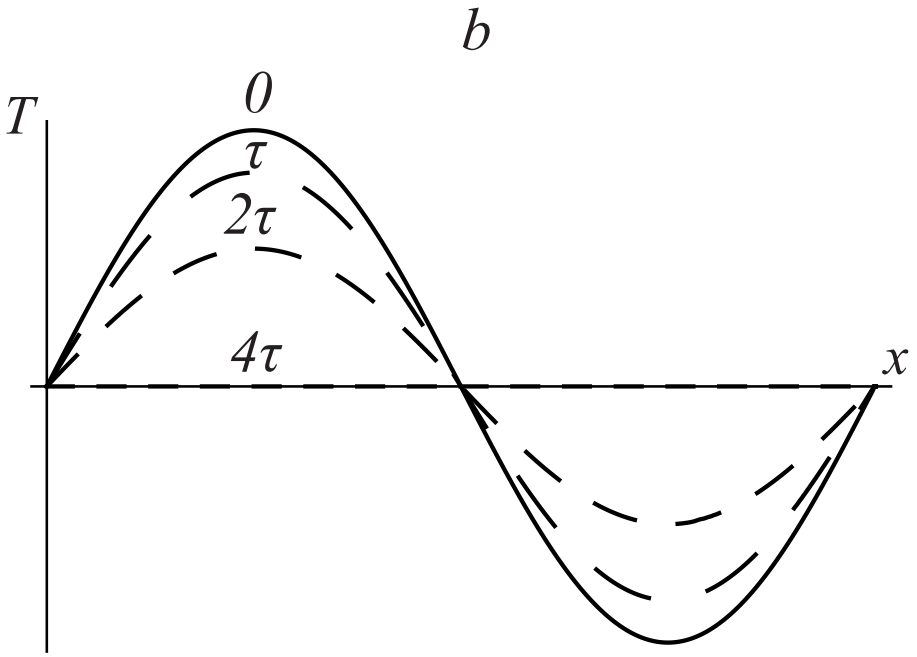

Рисунок 3.16: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 0.1$ нс, $l = 1$ мкм, $k = 2$

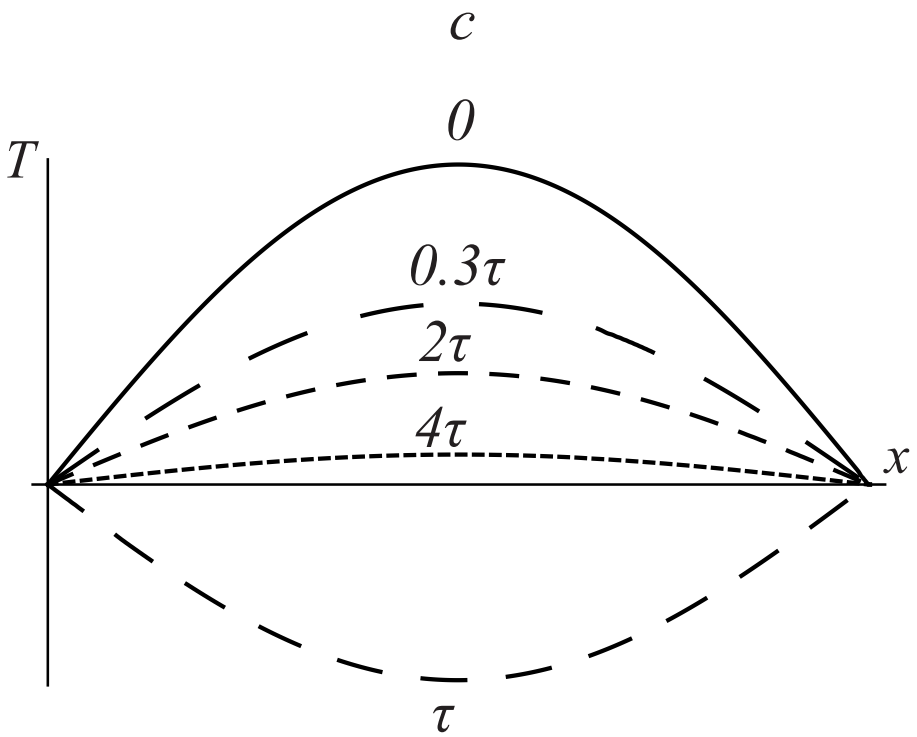

Рисунок 3.17: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 0.1$ нс, $l = 0.1$ мкм, $k = 1$

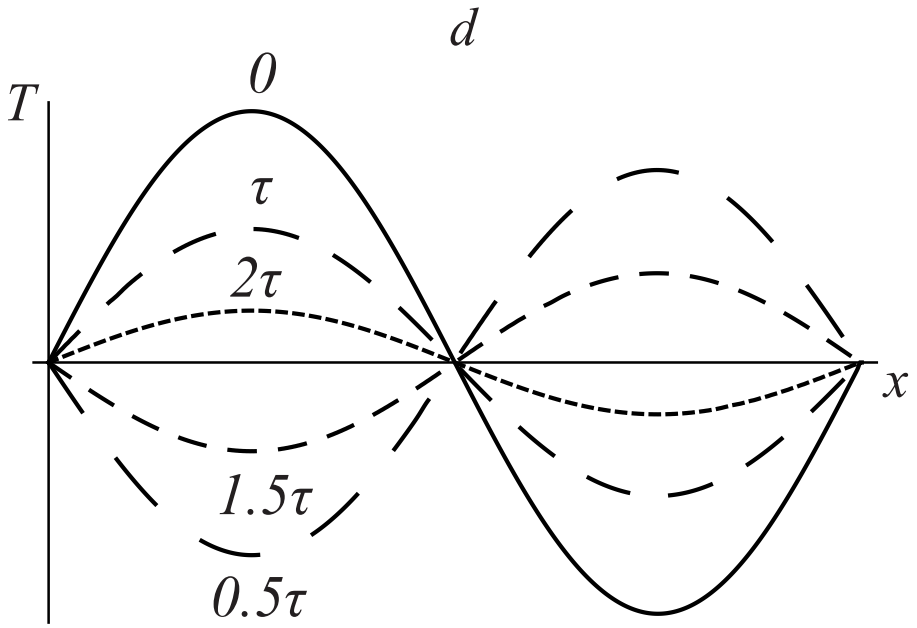

Рисунок 3.18: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 0.1$ нс, $l = 1$ мкм, $k = 2$

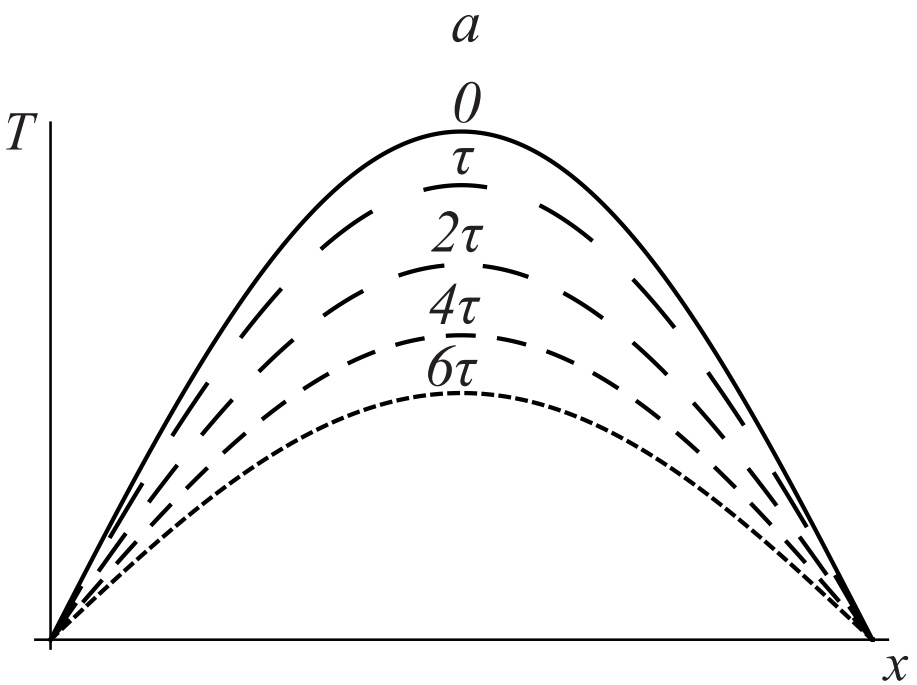

Рисунок 3.19: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 1$ нс, $l = 3.5$ мкм, $k = 1$

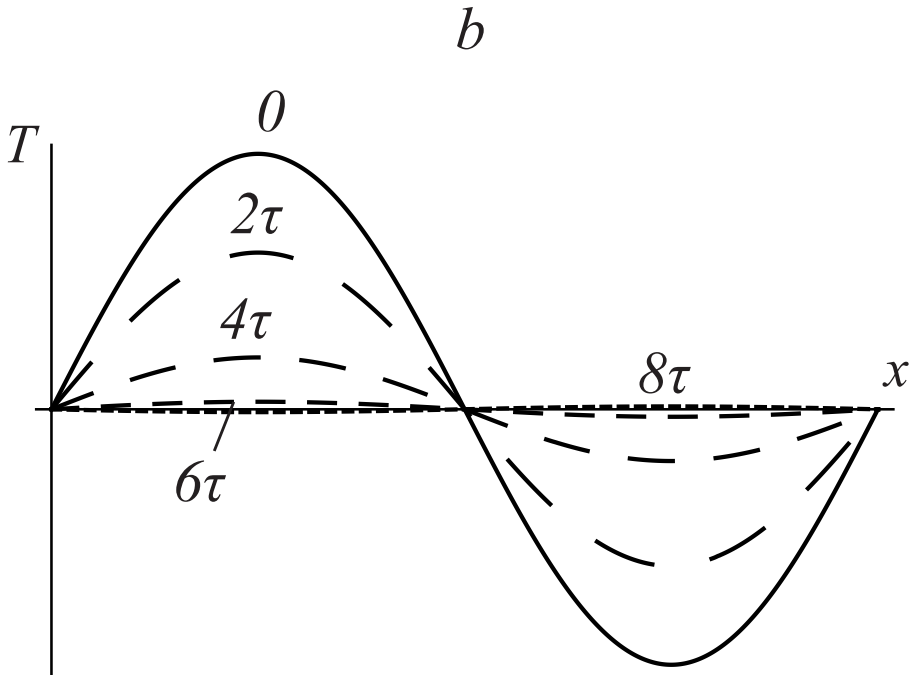

Рисунок 3.20: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 1$ нс, $l = 3.5$ мкм, $k = 2$

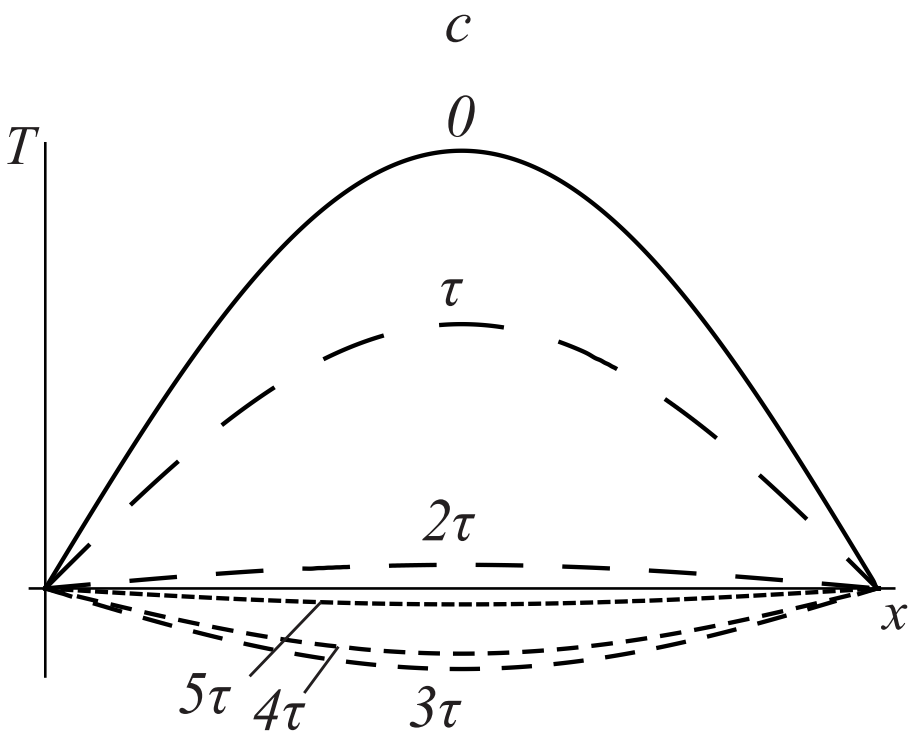

Рисунок 3.21: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 1$ нс, $l = 1$ мкм, $k = 1$

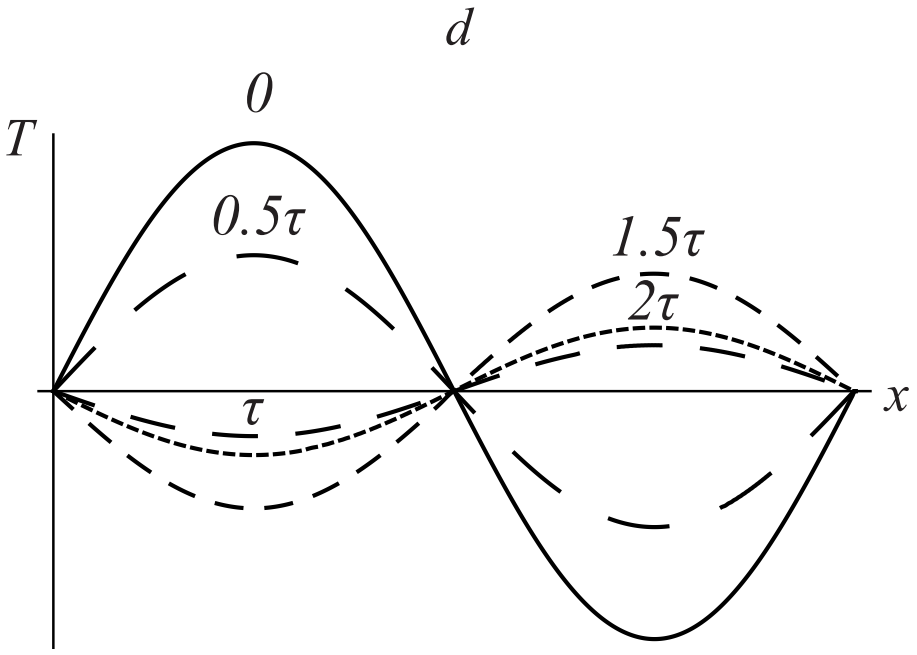

Рисунок 3.22: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 1$ нс, $l = 1$ мкм, $k = 2$

Графики на рис. 3.15 — 3.22 иллюстрируют численное решение задачи гиперболической теплопроводности Максвелла-Каттанео (3.1), (3.30), (3.31), аналитическое решение которой представлено выше. Рассматривался медный слой с начальным распределением температуры $\tilde{T}_0(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}$ и первой производной от температуры по времени $\dot{\tilde{T}}_0(x)$ в начальный момент равной нулю. Решение находилось с помощью явной схемы интегрирования метода конечных разностей. Для этого была написана программа на языке Delphi. Графики на рис. 3.15, 3.17 и 3.19, 3.21 получены при $k = 1$, а рис. 3.16, 3.18 и 3.20, 3.22 соответствуют случаю, когда $k = 2$. Расчет проводился для двух значений времени релаксации теплового потока $\tau = 0.1$ нс (рис. 3.15 — 3.18) и $\tau = 1$ нс (рис. 3.19 — 3.22) и трех толщин слоя. На рис. 3.15, 3.16 и рис. 3.19, 3.20 толщина $l = 1$ мкм, на рис. 3.17, 3.18 $l = 0.1$ мкм, а на рис. 3.19, 3.20 $l = 3.5$ мкм.

Графики на рис. 3.15 — 3.18 показывают, что в медном слое при $\tau = 0.1$ нс переход от монотонно затухающего решения к затухающему с колебаниями происходит при ширине слоя l, находящейся в диапазоне от 0.1 до 1 мкм. Причем, как и показано в таблице 3.1, при $l = 1$ мкм имеется чисто затухающее решение для первой формы ($k = 1$, см. рис. 3.15) и затухающее с колебаниями

для второй формы ($k = 2$, см. рис. 3.16). Однако колебания в данном случае не успевают развиться во времени из-за отношения α/ω большего единицы. При $l = 0.1$ мкм наблюдаются ярко выраженные колебания как для первой (рис. 3.17), так и для второй формы (рис. 3.18). Если же $\tau = 1$ нс граница между монотонно затухающим (рис. 3.19) и затухающим с колебаниями решением (рис. 3.20 — 3.22) находится в диапазоне $l \in [1, 3.5]$ мкм, что также подтверждается результатами, представленными в таблице 3.2.

Этот эффект — возникновение колебаний в затухающем решении при уменьшении ширины исследуемой области, позволяет предложить экспериментальный метод определения времени релаксации теплового потока в материале. Суть этого метода заключается в следующем: выбирается пластина толщины l и задается распределение температуры $T_0 = \sin(\delta_k x)$, $\delta_k = \pi k/l$, $0 <= x <= l$. Затем выясняется тип затухания температуры. Если затухание монотонное, значит $\delta_k < \delta_0$, если затухание происходит с колебаниями, значит $\delta_k > 0$. Повторяя этот эксперимент с различными толщинами l можно определить δ_0. Из (3.3) известно, что:

$$\delta_0 = \frac{1}{2c_r\tau}; \qquad c_r^2 = \frac{\lambda}{\rho c_v \tau}. \tag{3.37}$$

Из (3.37) путем несложных преобразований можно получить выражение для τ:

$$\tau = \frac{\rho c_v}{4\lambda\delta_0^2}. \tag{3.38}$$

Определив δ_0 из эксперимента с помощью формулы (3.38) можно найти время релаксации теплового потока.

На графиках, представленных на рис. 3.23 показано сравнение численного решения задачи термоупругости Лорда-Шульмана и уравнения теплопроводности Максвелла-Каттанео. Условия задачи принимались такие же, как в задаче теплопроводнсти: медный слой, на границах которой поддерживается постоянная температура. В случае связанной задачи границы закреплены. В начальный момент времени заданы следующие условия: распределение температуры по толщине $T_0 = \sin\frac{\pi k x}{l}$ при $k = 1$ (рис. 3.23 — a, c) и при $k = 2$ (рис. 3.23 — b, d), производная по времени от температуры равная нулю, а также нулевые перемещения и скорости. Расчеты проводились для толщин $l = 1$ мкм

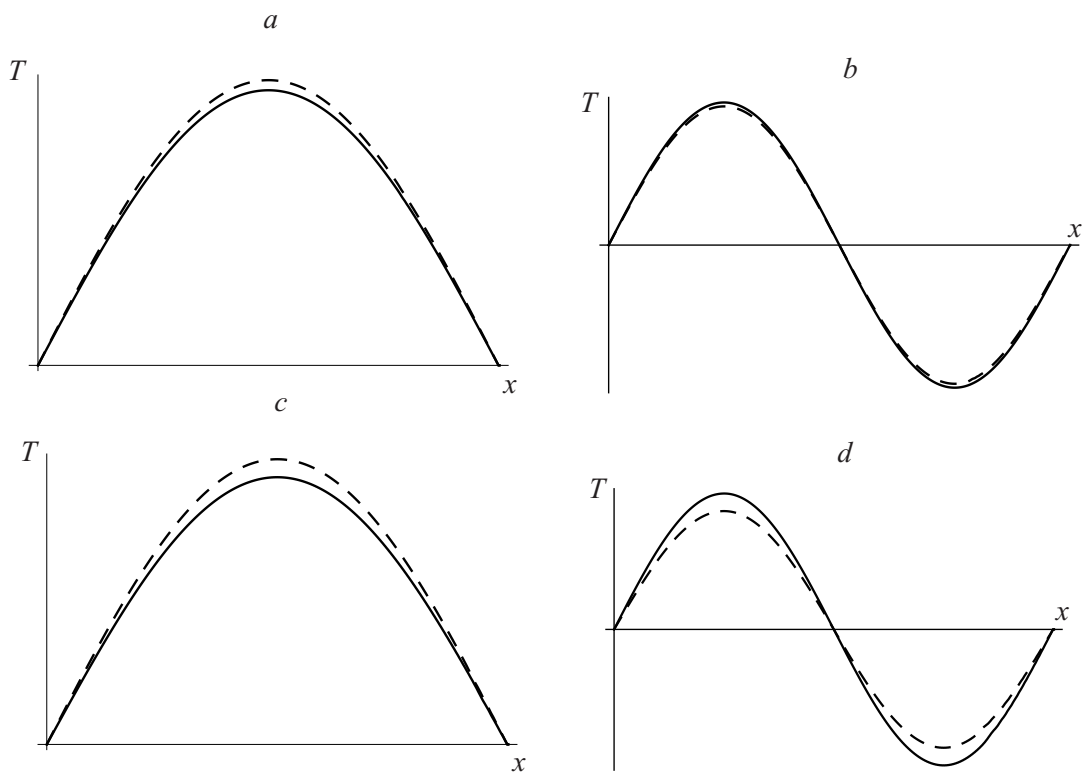

Рисунок 3.23: Сравнение численного решения задачи термоупругости Лорда-Шульмана (сплошная линия) и уравнения теплопроводности Максвелла-Каттанео (пунктирная линия) при $\tau = 0.1$ нс в момент времени $t = 2\tau$

(рис. 3.23 — a, b) и $l = 0.1$ мкм (рис. 3.23 — c, d) и $\tau = 0.1$ нс. В результате качественные отличия решений задачи теплопроводности и термоупругости не обнаружено. Наблюдается более быстрое затухание температуры в решении уравнения теплопроводности при $k = 2$, а при $k = 1$ быстрее затухает решение связанной задачи. Отличия являются более заметными в колебательном решении. Сравнительный анализ дисперсионных соотношений в случае связанной задачи термоупругости (рис. 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10) и задачи теплопроводности (рис. 3.1, 3.2), а также численного решения этих задач (рис. 3.23), позволяет сделать вывод, что эффект связности вносит несущественные поправки в решение уравнения теплопроводности. Поэтому для экспериментального нахождения времени релаксации теплового потока можно использовать метод, разработанный на основе анализа задачи теплопроводности.

3.4 Заключение

В представленной работе проанализированы дисперсионные соотношения для уравнения теплопроводности Максвелла-Каттанео и термоупругости Лорда-Шульмана для решений, затухающих по времени. Проведен асимптотический анализ дисперсионных соотношений модели Лорда-Шульмана. В результате получены приближенные формулы фазовой и групповой скорости, зависимостей частоты и волнового числа от характеристики затухания, а также зависимостей волнового числа от частоты. Кроме того получены выражения для асимптот фазовой и групповой скоростей. Установлено, что при определенном соотношении ширины исследуемой области и времени релаксации теплового потока в затухающем решении появляются колебания. В связи с этим предложен экспериментальный метод определения времени релаксации теплового потока. На примере меди показано, на каких масштабах возникает решение, затухающее с колебаниями, если время релаксации теплового потока находится в диапазоне от 0.1 до 100 нс.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Построено численное решение задачи об импульсном лазерном воздействии на тонкий слой меди с использованием уравнений классической и гиперболической термоупругости. Интенсивность импульса выбрана таким образом, чтобы отклонение температуры от начального значения не превышало величину в 10 С, и решение оставалось бы в пределах линейной теории. Установлено, что при временах, не превышающих время релаксации теплового потока, разность температурных пиков, полученных по двум теориям, достаточно велика, так что по результатам физических измерений можно было определить, какая теория точнее моделирует процесс.

2. Проведены оценки скоростей квазиакустического и квазитеплового волновых фронтов во всех рассмотренных задачах.Установлено, что при времени релаксации теплового потока, равном 0,1 нс, в первые 0,025 нс наблюдается рост скоростей обоих фронтов, а затем значения скоростей отклоняются от своего асимптотического значения не более чем на 5 %, что находится в пределах погрешности численного счета.

3. Проведено сравнение перемещений и деформаций, найденных в результате решения задач классической и гиперболической термоупругости. Установлено, что наибольшее различие наблюдается в промежутке между акустическим и тепловым фронтом, причем при уменьшении расстояния между этими фронтами разница увеличивается.

4. Проведено сравнение аналитического решения полусвязанной задачи гиперболической термоупругости и численного решения связанной задачи, в результате которого установлено их качественное совпадение. Этот результат позволяет сделать вывод, что для изучения характера распространения волн в задаче гиперболической термоупругости можно использовать решение в полусвязанной постановке.

5. Проанализированы дисперсионные соотношения для уравнения теплопроводности Максвелла-Каттанео и термоупругости Лорда-Шульмана для решений, затухающих по времени.

6. Проведен асимптотический анализ дисперсионных соотношений модели Лорда-Шульмана. В результате получены приближенные формулы для фазовой и групповой скорости, зависимостей частоты и волнового числа от характеристики затухания, а также зависимостей волнового числа от частоты. Получены выражения для асимптот фазовой и групповой скоростей. Установлено, что дисперсионные кривые имеют волновое число отсечки.

7. Решена задача о термоупругих колебаниях в слое с начальным тепловым гармоническим возмущением. Установлено, что при определенном соотношении ширины исследуемой области и времени релаксации теплового потока в затухающем решении появляются колебания. Показано, что этот факт может послужить основой для метода экспериментального определения времени релаксации теплового потока. На примере меди показано, на каких масштабах возникает решение, затухающее с колебаниями, если время релаксации теплового потока находится в диапазоне от 0,1 до 100 нс.

Литература

[1] E. Pop, S. Sinha, and Kenneth E. Goodson Heat Generation and Transport in Nanometer-Scale Transistors Vol. 94, No. 8, 2006, Proceedings of the IEEE P. 1587-1601

[2] Жоу Д. Расширенная необратимая термодинамика / Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Москва–Ижевск: 2006.

[3] D.S. Chandrasekharaiah Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature // Appl. Mech. Rev., 51(1998), pp. 705-729.

[4] D.Y. Tzou Macro-to-Microscale Heat Transfer. The Lagging Behaviour / Taylor and Francis, New York, 1997.

[5] Шашков А.Г. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Минск.: Наука и техника, 1993.

[6] C.C. Wang The principle of fading memory // Arch. Rat. Mech. Anal., 18, (1964), 343-366.

[7] D.Y. Tzou On the thermal shock wave induced by a moving heat source // International Journal of Heat and Mass Transfer N. 111, 1989, P. 232-238.

[8] T.Q. Qiu, C.L. Tien Short-pulse laser heating on metals //Int. J. Heat Mass Transfer N. 35, 1992, P. 719–726.

[9] Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально- неравновесных системах. // Усп. Физ. Наук 1991. Т.161, №3, С. 5–29.

[10] C. Cataneo A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, Compte Rendus 247 (1958) 431-433.

[11] P. Vernotte Les paradoxes de la theorie continue de lequation de la chaleur. CR Acad. Sci, 246(22):3154–3155, 1958.

[12] Лыков А. В. Теория теплопроводности. – 1967.

[13] В.П. Пешков. Второй звук в гелии II. ДАН 45, 385 (1944); V. Peshkov. Second sound in helium II. Journal of Physics 8, 381 (1944).

[14] Крылович В.И., Быль Г.Н., Ивакин Е.В., Рубанов А.С. Об экспериментальном определении скорости тепла // НАНБ, ММФ (май 22-26. 2000). Т. 3. С. 129-134.

[15] Ивакин Е.В., Кицак А.И., Рубанов А.С. Развитие методов активной спектроскопии рэлеевского рассеивания для исследования процессов теплопереноса // Известия РАН, серия физическая. 1992 г., Т.56, №12, С. 130-135

[16] Ivakin E.V., Lazaruk A.M., Filipov V.V. Application of laser induced gratings for thermal diffusivity measurements of solids // Proc. SPIE, 1995. Vol.2648. P 196-206

[17] Poletkin K.V., Gurzadyan G.G., Shang J., Kulish V. Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films // Applied Physics B. 2012. 107:137–143

[18] Вовненко Н.В., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В. Неравновесность процесса движения облучаемой поверхности металлов при воздействии лазерных импульсов субмикросекундной длительности // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, вып. 7

[19] Судьенков Ю.В., Павлишин А.И. Аномально высокие скорости распространения наносекундных импульсов давления в металлических фольгах // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 12

[20] Szekeres A., Fekete B. Continuummechanics-Heat Conduction-Cognition //Periodica Polytechnica. Engineering. Mechanical Engineering. – 2015. – T. 59. – №. 1. – C. 8.

[21] Tzou, D. Y. An engineering assessment to the relaxation time in thermal wave propagation. International Journal of Heat and Mass Transfer. 36(7). pp. 1845-1851. 1993. DOI: 10.1016/s0017-9310(05)80171-1

[22] Gembarovic J., Majernik V. Non-Fourier propagation of heat pulses in finite medium //International journal of heat and mass transfer. – 1988. – T. 31. – №. 5. – C. 1073-1080.

[23] Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a nonhomogeneous inner structure //Journal of Heat Transfer. – 1990. – T. 112. – №. 3. – C. 555-560.

[24] Majumdar A. Microscale Heat Conduction in lelectnc Thin Films //Journal of Heat Transfer. – 1993. – T. 115. – C. 7.

[25] Roetzel W., Putra N., Sarit K. Das Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // International Journal of Thermal Sciences 42 (2003) 541-552

[26] K. Mitra, S. Kumar, A. Vedavarz, M.K. Moallemi Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat Journal of heat transfer, Vol. 117, 1995, c 568 — 573

[27] Matsunaga R. H., dos Santos I. Measurement of the thermal relaxation time in agar-gelled water //Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2012 Annual International Conference of the IEEE. - IEEE, 2012. - C. 5722-5725.

[28] Liu Y., Mandelis A. Laser optical and photothermal thermometry of solids and thin films //Experimental Methods in the Physical Sciences. - 2009. - T. 42. - C. 297-336.

[29] A. N. Magunov Laser Thermometry of Solids: State of the Art and Problems,/ Measurement Techniques, V.45, N.2, 2002, P.173–181

[30] Магунов А. Н. Лазерная термометрия твердых тел. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 224 с.

[31] Wang X. Experimental micro/nanoscale thermal transport. - John Wiley & Sons, 2012.

[32] Xu F. et al. Introduction to skin biothermomechanics and thermal pain. - New York : Science Press, 2011. - T. 7.

[33] Grassmann A., Peters F. Experimental investigation of heat conduction in wet sand //Heat and Mass Transfer. - 1999. - T. 35. - №. 4. - C. 289-294.

[34] Herwig H., Beckert K. Experimental evidence about the controversy concerning Fourier or non-Fourier heat conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure //Heat and Mass Transfer. - 2000. - T. 36. - №. 5. - C. 387-392.

[35] S. Sieniutycz The variational principles of classical type for non-coupled non-stationary irreversible transport processes with convective motion and relaxation, S. Sieniutycz, Int. J. of Heat and Mass Transfer V. 20, No. 11, 1977, Pages 1221-1231

[36] H. Lord A generalized dynamical theory of thermoelasticity / H. Lord, Y. Shulman, J. Mech. Phys. Solids., 15, (1967), 299-309.

[37] A.E. Green, K.A. Lindsay Thermoelasticity //J. Elasticity 1972, 2, 1-7

[38] R.B. Hetnarski, J. Ignaczak Solution-like waves in a low-temperature nonlinear thermoelastic solid // Int. J. Eng. Sci 1996, 34, 1767-1787

[39] A.E. Green, P.M. Nagdi Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity 1993, 31, 189-208

[40] Ivanova E.A. Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component medium // Acta Mechanica. 2010. Vol. 215, Issue 1–4. P. 261–286.

[41] Ivanova E.A. On one model of generalised continuum and its thermodynamical interpretation. Mechanics of generalized Continua // (Ed. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev). Berlin: Springer, 2011. P. 151–174.

[42] Ivanova E.A. Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component Cosserat continuum // Technische Mechanik. 2012. Vol. 32, Issue 2—5. P. 273—286.

[43] Ivanova E.A. Description of mechanism of thermal conduction and internal damping by means of two component Cosserat continuum // Acta Mechanica. 2014. Vol. 225, Issue 3. P. 757–795.

[44] Niu T., Dai W. A Hyperbolic Two-Step Model-Based Finite-Difference Method for Studying Thermal Deformation in a 3-D Thin Film Exposed to Ultrashort Pulsed Lasers //Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. – 2008. – Т. 53. – №. 12. – С. 1294-1320.

[45] Qin Y. Nonlinear parabolic-hyperbolic coupled systems and their attractors. – Springer Science & Business Media, 2008. – ?. 184.

[46] Mondal S., Mallik S. H., Kanoria M. Fractional Order Two-Temperature Dual-Phase-Lag Thermoelasticity with Variable Thermal Conductivity //International Scholarly Research Notices. – 2014. – ?. 2014.

[47] Babenkov, M.B. and Ivanova, E.A. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2014, 26(4), pp.483–502, doi:10.1007/s00161-013-0315-8

[48] Бабенков М.Б. Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости с учетом релаксации теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т.52. N6 (310). С. 112–121.

[49] Бабенков М.Б. Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т.54. N2 (318). С. 126–137.

[50] Ignaczak J, Ostoja-Starzewski M. Thermoelasticity with finite wave speeds. Oxford University Press, 2010.

[51] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / Новацкий В. М.: Мир, 1970.

[52] D.Y. Tzou. Macro-to-Microscale Heat Transfer. The Lagging Behaviour, D.Y. Tzou, 1997, Taylor and Francis, New York

[53] N.B. Dahotre, Laser Surface Engineering // Advanced Materials & Processes, Vol. 160, No.7 (2002), P. 35–39.

[54] K. Miyazaki, Generation and Control of Hight Intensity Ultrashort Laser Pulses // Laser Research, Vol.27, No.5 (1999), P.319–323

[55] A. Yabe, Advanced Material Processing Using Hight-Intensity Laser Pulse // Laser Reseach, Vol.27, No.5 (1999), P.336–340

[56] Pop, E., Sinha, S., and Goodson, K.E.: Heat Generation and Transport in Nanometer Scale Transistors, in Proceedings of the IEEE, Vol. 94, 1587–1601 (2006)

[57] Tong, X.C.: Development and Application of Advanced Thermal Management Materials, Springer, New York (2011)

[58] Haque, M. A., Saif, M. T. A.: Thermo-Mechanical Properties of Nano-Scale Freestanding Aluminum Films, Thin Solid Films **484**(1-2), 364–368 (2005)

[59] Poletkin K.V., Gurzadyan G.G., Shang J., Kulish V. Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films // Applied Physics B. 2012. 107:137—143

[60] Wang, Hai-Dong, Wei-Gang Ma, Xing Zhang, Wei Wang, and Zeng-Yuan Guo. "Theoretical and experimental study on the heat transport in metallic nanofilms heated by ultra-short pulsed laser."International Journal of Heat and Mass Transfer 54, no. 4 (2011): 967-974.

[61] N. Yu, S. Imatani, T. Inoue, Hyperbolic Thermoelastic Analysis due to Pulsed Heat Input by Numerical Simulation // JSME International Journal, Series A, Vol.49, No.2 (2006), P.180–187

[62] M. Chester Second sound in solids // Phys. Rev. N.131, P.2013–2015, 1963

[63] Galovic S., Kotoski D. Photothermal wave propagation in media with thermal memory // J. Appl. Phys. 93 (5) (2003) 3063–3070.

[64] Vedavarz A., Kumar S., Moallemi M.K. Significance of non-Fourier heat waves in conduction // ASME J. Heat Transfer 116 (1) (1994) 221–224.

[65] Ozisik M.N., Tzou D.Y. On the wave theory in heat conduction // ASME J. Heat Transfer 116 (3) (1994) 526–535.

[66] R.V.N. Melnik, Discrete models of coupled dynamic thermoelasticity for stress-temperature formulations // Applied Mathematics and Computation, 122(2001), P.107–132

[67] H.M. Youssef, State-Space approach on generalized thermoelasticity for an infinite material with a spherical cavity and variable thermal conductivity subjected to ramp-type heating // Canadian applied mathematics quarterly, vol. 13, No.4 (2005), P.369–390

[68] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / Новацкий В. М.: Мир, 1970.

[69] Пальмов В.А. Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел / Пальмов В.А.: Издательство Политехнического университета, 2008

[70] Ciegis R. Numerical Solution of Hyperbolic Heat Conduction Equation // Mathematical Modelling and Analysis, Volume 14 Number 1, 2009, pages 11–24

[71] Abd-El-Salam M.R., Abd-Alla A.M., Hany A. Hosham A numerical solution of magneto-thermoelastic problem in non-homogeneous isotropic cylinder by

the finite-difference method // Applied Mathematical Modelling 31 (2007) 1662–1670

[72] Abd-Alla A. M., Salama A. A., Abd-El-Salam M. R., Hosham H. A. An Implicit Finite-Difference Method for Solving the Transient Coupled Thermoelasticity of an Annular Fin // Applied Mathematics and Information Sciences 2007

[73] Istvan A. Veres, Thomas Berer, and Peter Burgholzer Numerical modeling of thermoelastic generation of ultrasound by laser irradiation in the coupled thermoelasticity // Ultrasonics. 2013 Jan; 53(1): 141–149.

[74] Б. В. Рогов, М. Н. Михайловская Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование, 2011, том 23, номер 6, 98–110

[75] Zhilin, P. A.: Rational Continuum Mechanics. Polytechnic University Publishing House, St. Petersburg (2012). (In Russian)

[76] Altenbach H., Naumenko K., Zhilin P. A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2003. Vol. 15, N 6. P. 539 - 570.

[77] Иванов Ц., Энгельбрехт Ю.К. О моделях термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла. // Инж.-физ. ж. 1978. №35(2), С.344–351.

[78] Babenkov M.B., Ivanova E.A. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problem of the hyperbolic type // Continuum Mech. Thermodyn, 2013, doi:10.1007/s00161-013-0315-8

[79] Lebedev, N.N., Skalskaya, I.P., Uflyand, Y.S., Silverman, R.A. (1979). Worked problems in applied mathematics (p. 195). New York: Dover Publications.

[80] Е.Ю. Витохин, М.Б. Бабенков Численное и аналитическое исследование распространения термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплово-

го потока // Прикладная механика и техническая физика. 2016., Т.57, №3, С.171 - 185

[81] E.Yu. Vitokhin, M.B. Babenkov Influence of boundary conditions on the solution of a hyperbolic thermoelasticity problem // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2017, 29(2), 457-475, DOI: 10.1007/s00161-016-0540-z

[82] E.Yu. Vitokhin, E. A. Ivanova Dispersion relations for the hyperbolic thermal conductivity, thermoelasticity and thermoviscoelasticity // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2017, DOI: 10.1007/s00161-017-0574-x, published on-line 2017-05-23