УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ.
Часть 1. Методы *

Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков
Институт Проблем машиноведения РАН.

Аннотация

Дается обзор задач и методов управления хаосом – области интенсивных исследований последнего десятилетия. Подробно рассматриваются три исторически первых и наиболее активно равивающихся направления: программное управление, основанное на периодическом возбуждении системы; метод линеаризации отображения Пуанкаре (метод OGY), метод запаздывающей обратной связи (метод Пирагаса). Приводятся основные результаты, полученные в рамках традиционных методов линейного, нелинейного, адаптивного управления, нейросетевых и нечетких систем. Формулируются нерешенные проблемы, связанные прежде всего с обоснованием методов. Описанию наиболее интересных приложений будет посвящена вторая часть обзора.

Содержание

*Работа частично финансирована Российским Фондом фундаментальных исследований (РФФИ), грант 02-01-00765, научной программой Президиума РАН No 17 (проект 3.1.4) и федеральной программой «Интеграция».

1 Введение

Термин *управление хаосом* (*control of chaos*) обычно используют для обозначения области на стыке теории управления и теории динамических систем, изучающей методы управления детерминированными системами с нерегулярным, хаотическим поведением. Слово *хаос* происходит от греческого «$\chi\alpha\omega\sigma$», означавшего в древнегреческой мифологии и философии беспорядочную смесь материальных элементов мира, из которой произошло все существующее. Сочетание «управление хаосом» приобретает парадоксальный смысл и вызывает дополнительный интерес к предмету.

Задачи управления хаосом стали вызывать быстро растущий интерес ученых и инженеров в начале 1990-х годов. За последующие 10 лет в этой области опубликовано несколько тысяч работ. Анализ статистики публикаций показывает, что в 1997–2002 г.г., по данным Science Citation Index только в рецензируемых журналах публиковалось почти 400 работ в год. Для сравнения заметим, что поиск по ключевым словам «*adaptive control*» показывает, что в области адаптивного управления, считающейся областью чрезвычайно интенсивных научных исследований [161] публикуется не более 300 журнальных статей в год.

В научной литературе термин «хаос», точнее — «детерминированный хаос», по-видимому, впервые был использован в 1975 г. в статье Т. Ли и Дж. Йорке «Период три рождает хаос» [194] и с тех пор широко употребляется. Известны различные математические определения хаоса, но все они выражают близкие по типу свойства динамических систем, связанные со «сверхчувствительностью» к начальным условиям: даже сколь угодно близкие траектории, с течением времени расходятся на конечное расстояние, т. е. прогноз траектории на длительное время оказывается невозможен. При этом каждая траектория остается ограниченной, что противоречит интуитивному пониманию неустойчивости, основанному на опыте работы с линейными системами.

Тем не менее, оказалось, что нелинейные детерминированные динамические системы с подобными свойствами существуют и не являются исключительными, «патологическими» случаями. Оказалось также, что модели, описывающие хаотическое поведение встречаются во многих областях науки и техники, и в ряде случаев являются более подходящим инструментом описания нерегулярных колебаний и неопределенности, чем стохастические, вероятностные модели. Достаточно заметить, что широкий класс хаотических систем — это хорошо известные генераторы псевдослучайных чисел, появившиеся задолго до введения в научный обиход термина «хаос».

Удивительной оказалась обнаруженная в 1990 г. (тем же Дж. Йорке с соавторами [228]) возможность существенного изменения свойств хаотической системы при помощи весьма малого изменения ее параметров. В статье [228] было показано (путем компьютерного моделирования на примере дискретной системы Энона), что достаточно малым изменением параметра системы хаотическую траекторию можно преобразовать в периодическую и наоборот. В указанной работе изменение параметра выполнялось с учетом текущего состояния системы, т. е. с помощью обратной связи. В последующих публикациях данный эффект был подтвержден экспериментально [104], указаны области его возможных приложений: лазеры, системы связи, химические технологии, медицина (лечение аритмии и эпилепсии). Парадоксальность вывода (хаос нельзя прогнозировать, но им можно управлять) вызвала взрыв интереса исследователей и породила лавину публикаций, подтверждающих (как правило, путем компьютерного моделирования) возможность существенного изменения свойств разнообразных хаотических систем в природе и технике при помощи относительно небольших изменений параметров и внешних воздействий.

Однако, несмотря на огромное число публикаций, в том числе и ряда монографий, строгих результатов накоплено немного, а многие вопросы остаются открытыми. Учитывая широкий круг потенциальных приложений, область представляет интерес как для теоретиков, так и для инженеров по системам управления.

Цель данного обзора — дать представление специалистам по системам управления о современном состоянии этой обширной области исследований, а также о наиболее интересных приложениях.

Обзор состоит из двух частей. В настоящей, первой части обзора вводятся необходимые предварительные сведения и рассматриваются основные методы управления хаотическими системами. Во второй части будут рассмотрены приложения методов управления хаосом в науке и технике: в физике, механике, химии, медицине, экономике, телекоммуникациях, управлении механическими и электронными системами, технологическими процессами и т. д.

Обзор основан на материале обзорного доклада на 15-м Конгрессе ИФАК [123], лекций [122, 121], и книги [127].

2 Хаотические системы

В данном разделе даются предварительные сведения о динамических хаотических процессах.

Хаотические системы представляют класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам от стохастических моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает», как частота, так и амплитуда.

До начала XX в. основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались линейные дифференциальные уравнения.

На рубеже XIX–XX веков выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Основы соответствующего математического аппарата – теории нелинейных колебаний – были заложены в работах А. Пуанкаре, Б. Ван дер Поля, А.А. Андронова, Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого предельного цикла.

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например релаксационные (близкие к прямоугольным) колебания, учитывать изменение формы колебания в зависимости от начальных условий (системы с несколькими предельными циклами) и т. д. В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Это убеждение поддерживалось и математическими результатами: например, известная теорема Пуанкаре–Бендиксона утверждает, что единственно возможные виды ограниченных установившихся движений в непрерывных системах второго порядка – это либо состояние равновесия, либо предельный цикл.

Однако в середине XX века математики (М. Картрайт и Дж. Литтлвуд, С. Смейл) обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца [195], опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье–Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (уравнение Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \tag{1}$$

Решения системы (1) при некоторых значениях параметров (например, при $\sigma = 10$, $r = 97$, $b = 8/3$) выглядят как нерегулярные колебания. Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут приближаться к предельному множеству (аттрактору), имеющему весьма причудливое строение. Внимание физиков и математиков, а затем и инженеров к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса [252], опубликованной в 1971 г., которые назвали такие аттракторы «странными», а также работы Т. Ли и Дж. Йорке [194] (1975), которые ввели термин «хаос» для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах. Заметим, что основной результат работы [194] является частным случаем теоремы киевского математика А.Н. Шарковского, опубликованной в 1964 г., а основы математического аппарата для исследования хаотических явлений были заложены в 1960-х–70-х гг. отечественными научными школами: А.Н. Колмогоровым, Д.В. Аносовым, В.И. Арнольдом, Я.Г. Синаем, В.К. Мельниковым, Ю.И. Неймарком, Л.П. Шильниковым и их учениками. В дальнейшем хаотическое поведение было обнаружено в огромном количестве систем в механике, лазерной физике и радиофизике, химии, биологии и медицине, в электронных цепях и т. д. [37]. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным. Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от периодического или квазипериодического практически невозможно.

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \tag{2}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $0 \le t < \infty$.

Определение 1. Замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *аттрактором* системы (2), если: a) существует открытое множество $\Omega_0 \supset \Omega$ такое, что все траектории $x(t)$ системы (2), начинающиеся в Ω_0, определены при всех $t \ge 0$ и стремятся к Ω при $t \to \infty$ (т. е. $\operatorname{dist}(x(t), \Omega) \to 0$ при $t \to \infty$, если $x(0) \in \Omega_0$, где $\operatorname{dist}(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$ – расстояние [1] от точки x до множества Ω); б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение 2. Аттрактор называется *хаотическим*, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Определение 3. Система называется *хаотической*, если у нее существует хотя бы один хаотический аттрактор.

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Для задач управления существенное значение имеет свойство траекторий хаотических процессов, называемое *рекуррентностью*: со временем эти траектории попадают в сколь угодно малую окрестность своего положения в прошлом. Рассмотрим это свойство подробнее.

Определение 4. Функция $x : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ называется *рекуррентной* (*recurrent*), если при любом $\epsilon > 0$ существует такое $T_\epsilon > 0$, что для любого $t \ge 0$ имеется $T(t, \epsilon)$, $0 < T(t, \epsilon) < T_\epsilon$ такое, что $\|x(t + T(t, \epsilon)) - x(t)\| < \epsilon$.

Рекуррентные траектории обладают двумя важными свойствами, которые выражаются леммами С.С. Пью (C.C. Pugh) и Д.В. Аносова.

Лемма 1 (Пью). Пусть $\bar{x}(t)$, $t \ge 0$ — рекуррентная траектория системы (2), имеющей гладкую правую часть $F(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется гладкая функция $F_1(x)$ такая, что $\|F_1(x)\|_\infty + \|DF_1(x)\|_\infty < \varepsilon$ и решение $x(t)$ системы $\dot{x} = F(x) + F_1(x)$ с тем же начальным условием $x(0) = \bar{x}(0)$ является периодическим.

Лемма 2 (Аносов). Пусть $\bar{x}(t)$, $t \ge 0$ — рекуррентная траектория системы (2), имеющей гладкую $F(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется x^* такое, что $||x^* - \bar{x}(0)|| < \varepsilon$ и решение $x(t)$ системы (2) с начальным условием $x(0) = x^*$ является периодическим.

Эти леммы показывают, что хаотический аттрактор является замыканием всех содержащихся в нем периодических траекторий. Понятие аттрактора связано и со следующим сформулированным Г. Биркгофом в 1927 г. критерием рекуррентности.

Теорема 1 (Биркгоф). Любая траектория, принадлежащая компактному минимальному инвариантному множеству является рекуррентной. Любое компактное инвариантное минимальное множество является замыканием некоторой рекуррентной траектории.

Из этой теоремы следует, что любое решение, начинающееся из своего ω-предельного множества является рекуррентным. При выполнении дополнительного предположения, что

[1] Всюду под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма, а под $\|\cdot\|_\infty$ – равномерная норма в пространствах векторов и функций. $\mathbb{R}^n$ – евклидово простраство n–мерных векторов.

ω-предельное множество $\bar{x}(t)$ является аттрактором, следует, что любая хаотическая траектория, начинающаяся в его ω-предельном множестве рекуррентна.

Имеются и другие определения хаотических аттракторов и хаоса. Например, часто в определение хаотического аттрактора включают дополнительные требования: существование траекторий (или семейства периодических траекторий), всюду плотных в Ω, топологическую транзитивность и т. д., подчеркивающие наличие свойства «перемешивания» траекторий. Недавние результаты Г.А. Леонова [21] показывают, что вместо отсутствия устойчивости по Ляпунову при определении хаотического аттрактора целесообразно требовать отсутствия так называемой *устойчивости по Жуковскому*, допускающей разную скорость течения времени на разных траекториях системы. Во многих случаях понятие «хаотический аттрактор» совпадает с понятием «странный аттрактор», введенным в 1971 г. Д. Рюэлем и Ф. Такенсом как множество со свойствами типа «пористости» (такие множества были названы «фрактальными» Б. Мандельбротом в 1977 г.) Однако строго доказать хаотичность системы непросто, даже пользуясь простейшим определением. Для некоторых общепризнанно хаотических систем (например, для системы Лоренца (1), системы Энона при стандартных значениях параметров) доказательства хаотичности отсутствуют или весьма громоздки, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик. Приведем несколько примеров хаотических систем, упоминающихся далее.

Пример 2.1. Система (цепь) Чуа. В 1984 г. специалисты по электронным цепям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе хаотические, колебания. Математическая модель цепи Чуа имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \tag{3}$$

где x, y, z – безразмерные переменные; $f(x) = = M_1 x + 0.5(M_1 - M_0)(|x+1| - |x-1|)$. При $p = 9$, $q = 14.286$, $M_1 = -6/7$, $M_0 = 5/7$ траектории системы (3) демонстрируют хаотическое поведение.

Пример 2.2. Разнообразные хаотические колебания можно генерировать, подавая гармонический сигнал на вход нелинейных осцилляторов, например заменяя ноль в правых частях уравнений Ван дер Поля $\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0$, Дуффинга $\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0 y^3 = 0$ и автоколебательной системы с релейным элементом $\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \operatorname{sign} y = 0$ синусоидальной функцией $z(t) = A \sin \omega_0 t$. При некоторых значениях частоты и амплитуды возбуждения происходит «размазывание» предельного цикла и колебания в нелинейной системе становятся хаотическими.

Для дискретного времени примеры хаотических систем существуют для любой размерности состояния системы, даже при $n = 1$.

Пример 2.3. Дискретная система с квадратичной правой частью $x_{k+1} = \lambda x_k(1 - x_k)$, $x_k \in R^1$, построенная с помощью так называемого *логистического отображения* $F(x) = \lambda x(1 - x)$, является хаотической при $3.57 < \lambda < 4$, см. [37]. Ее аттрактором является отрезок $[0, 1]$.

Пример 2.4. Система

$$x_{k+1} = \{Mx_k\}, \tag{4}$$

где через $\{A\}$ обозначается дробная часть вещественного числа A, является хаотической при любом $M > 1$. Система (4) часто используется для генерации псевдослучайных чисел, возможно, первого практического применения хаоса. Это применение основано на том, что при любом начальном условии x_0, несоизмеримом с M, доля точек последовательности (4), попавших в некоторый интервал, лежащий в отрезке $[0, 1]$, пропорциональна длине этого интервала. Таким образом, если частоту попадания точек в интервал считать оценкой некоторой вероятности, то совокупность таких вероятностей будет задавать равномерное распределение на $[0, 1]$.

Пример 2.5. Система Энона (M. Hénon) задается разностными уравнениями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2 + y_k, \\ y_{k+1} = \beta x_k. \end{cases} \tag{5}$$

Хаотическое поведение решений (5) наблюдается, например, при $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$.

При исследовании хаотических процессов и решении задач управления ими широкое применение нашли «запаздывающие координаты» и отображение Пуанкаре. Коснемся этих понятий.

Пусть у системы (2) доступна измерению только скалярная выходная координата $y(t) = h(x(t))$. Вектором *запаздывающих координат* (delayed coordinates) называется вектор-функция $X(t) \triangleq \big[y(t), y(t-\tau), \ldots, y(t-(N-1)\tau)\big]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$. Относительно этого вектора исходная модель системы (2) приводится к виду $\dot{X} = \bar{F}(X(t))$. Из *теорем вложения* следует, что если $N > 2n$, где n — порядок исходной системы (2), то в случае общего положения имеется диффеоморфизм между пространством состояний исходной системы и подпространством состояний преобразованной системы такой, что если исходная система имеет аттрактор некоторой размерности, то аттрактором такой же размерности будет обладать и преобразованная система.

Отображение Пуанкаре (Poincaré map) вводится в предположении, что имеется T-периодическое решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2), начинающееся в некоторой точке x_0. (Т.е. выполнено: $\bar{x}(t+T) = x(t)$ для всех $t \geq t_0$ и $x(t_0) = x_0$.) Пусть S — гладкая поверхность, являющаяся *трансверсальной* (секущей) поверхностью к траектории в точке x_0, которая определяется уравнением $s(x) = 0$ где $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – гладкая скалярная функция, трансверсально пересекающая траекторию в x_0, т. е. выполнено $s(x_0) = 0, \nabla s(x_0)^{\mathrm{T}} F(x) \neq 0$.

Можно показать, что решение, начинающееся в точке $x \in S = \{x : \ s(x) = 0\}$ вблизи от точки x_0 хотя бы еще один раз пересечет поверхность $s(x) = 0$. Пусть $\tau = \tau(x)$ — время первого возврата и $x(\tau) \in S$ — точка первого возврата.

Определение 5. Отображение $P : x \mapsto x(\tau)$ называется *отображением Пуанкаре*, или *точечным отображением*. Данное отображение широко применяется при исследовании хаотических процессов. Использование отображения Пуанкаре для управления хаосом рассматривается ниже в разделе 4.

Хаотические модели можно использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом такая величина, как частота колебания, становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т. е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно, основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым *старшим показателем Ляпунова.*

Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории $\bar{x}(t)$ системы (2) с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0$. Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи $\bar{x}(t)$)

$$\frac{d}{dt}\delta x = W(t)\delta x, \tag{6}$$

где $\delta x = x - \bar{x}(t)$, $W(t) = \dfrac{\partial F(x(t))}{\partial x}$ – матрица Якоби системы (2) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения $\bar{x}(t)$. Предполагается, что частные производные от $F(x)$ существуют, т.е. правые части (2) – гладкие функции. Задав начальное отклонение $z = \delta x(0)$, можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \tag{7}$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (6) в направлении z и называемую *характеристическим показателем* (ляпуновской экспонентой) *в направлении* z [13, 36, 37, 214].

Еще А.М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (7) существует, конечен для любого $z \in R^n$ и не зависит от начального выбора точки x_0 на траектории $x(t)$. Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания: $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$ и существует базис $z_i \in R^n$, $i = 1, ..., n$, для которого $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Наиболее важен старший ляпуновский показатель α_1. Если $\alpha_1 > 0$ вдоль ограниченного решения $\bar{x}(t)$, плотного в аттракторе Ω, то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина α_1 характеризует степень неустойчивости, другими словами, – степень экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей $\dot{x} = Ax$ и нулевого опорного решения $\bar{x}(t) = 0$, очевидно, $\alpha_1 = \max_i \mathrm{Re}\lambda_i(A)$, т.е. $|\alpha_1|$ совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Старший показатель α_1 может быть приближенно вычислен и без построения фундаментальных решений уравнений в вариациях

$$\alpha_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{\|x(t) - \bar{x}(t)\|}{\epsilon}, \tag{8}$$

где $x(t)$ – решение (2) с начальным условием $x(0)$, $\|x(0) - \bar{x}(0)\| = \epsilon$, причем t – достаточно велико, а $\epsilon > 0$ достаточно мало. Для повышения точности расчета можно вычислять среднее правых частей (8) при разных начальных условиях x_0, взятых на траектории $\bar{x}(t)$. Тогда t необязательно брать очень большим [37].

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория $\bar{x}(t)$ аппроксимируется через время T другой траекторией с погрешностью Δ, если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\epsilon}, \tag{9}$$

где ϵ – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем, в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения даже при сколь угодно малом горизонте (времени прогноза).

3 Задачи управления хаотическими процессами

Чтобы дать математическую формулировку известных задач управления хаотическими процессами, приведем сначала основные модели хаотических систем, используемые в дальнейшем изложении.

Наиболее распространенными в литературе по управлению хаосом математическими моделями являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений состояния)

$$\dot{x}(t) = F(x, u), \tag{10}$$

где $x = x(t)$ — n-мерный вектор переменных состояния; $u = u(t)$ — m-мерный вектор входов (управлений); $\dot{x} = dx/dt$. Вектор-функция $F(x, u)$ обычно считается непрерывно дифференцируемой.

При наличии внешних возмущений используется нестационарная модель

$$\dot{x} = F(x, u, t). \tag{11}$$

Во многих случаях можно использовать более простую *аффинную по управлению* модель

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \tag{12}$$

Заметим, что в ряде публикаций как существенно различные рассматриваются задачи координатного управления, где в качестве входных переменных выступают внешние воздействия (силы, моменты, напряженность электрических или магнитных полей и т.п.) и задачи параметрического управления, где входные переменные представляют изменения физических параметров системы (например, $u(t) = p - p_0$, где p_0 – номинальное значение физического параметра p). На самом деле разница эта непринципиальна, если речь идет о процессах, описываемых нелинейными моделями, поскольку они охватывают оба класса задач. В [91] замечено, что для многих хаотических систем эквивалентность задач координатного управления с линейной обратной связью и задач параметрического управления можно установить нелинейной заменой координат.

Измеряемый выход системы обозначим через $y(t)$. Он может быть задан в виде функции от текущего состояния системы:

$$y(t) = h\big(x(t)\big). \tag{13}$$

Если выходные переменные явно не указаны, то будем считать, что весь вектор состояния доступен измерению, т. е. $y(t) \equiv x(t)$.

Используются также дискретные модели, заданные разностными уравнениями состояния

$$x_{k+1} = F_d(x_k, u_k). \tag{14}$$

где, как обычно, через $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^l$, обозначены значения векторов состояния, входа и выхода на k-м шаге. Такая модель определяется отображением F_d.

Для всех рассмотренных моделей далее предполагается существование решений при заданных начальных условиях для всех $t \geq t_0$, и обычно принято, что $t_0 = 0$.

Перейдем теперь непосредственно к постановке задач управления хаотическими процессами.

Задачи *стабилизации* неустойчивого периодического решения (орбиты) возникают при подавлении шумов, вибраций различных конструкций, устранении нежелательных гармоник в системах связи, электронике и т. п. Особенность этих задач заключается в том, что объект управления является сильно колебательным, т. е. собственные числа матрицы линеаризованной системы близки к мнимой оси. Вредные вибрации могут иметь как регулярный (квазипериодический), так и хаотический характер. Задачи подавления хаотических колебаний путем приведения их к регулярным колебаниям, либо полного подавления колебаний можно формализовать следующим образом.

Рассмотрим свободное (неуправляемое, $u(t) \equiv 0$) движение $x_*(t)$ системы (10) с начальным условием $x_*(0) = x_{*0}$. Пусть это движение является T-периодическим, т. е. таким, что для всех $t \geq 0$ выполнено $x_*(t + T) = x_*(t)$. Поставим задачу его стабилизации, т. е. приведения решений $x(t)$ системы (10) к $x_*(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t) - x_*(t)\big) = 0 \tag{15}$$

или приведения выхода системы $y(t)$ к заданной функции $y_*(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \big(y(t) - y_*(t)\big) = 0 \tag{16}$$

для любого решения $x(t)$ системы (10) при начальном состоянии $x(0) = x_0 \in \Omega$, где Ω — заданное множество начальных условий.

Задача состоит в нахождении функции управления либо в разомкнутой форме («*программное управляющее воздействие*»)

$$u(t) = U(t, x_0), \tag{17}$$

либо в виде *обратной связи по состоянию*

$$u(t) = U\big(x(t)\big), \tag{18}$$

или же *обратной связи по выходу*

$$u(t) = U\big(y(t)\big), \tag{19}$$

обеспечивающей выполнение цели управления (15) или (16).

В такой постановке задача стабилизации периодического движения ничем не отличается от обычной для теории управления *задачи слежения*. Однако, имеется принципиальная особенность: при управлении хаотическими процессами требуется обеспечить достижение цели при достаточно малом (в идеале — произвольно малом) уровне управляющего воздействия [228]. Разрешимость подобной задачи неочевидна вследствие неустойчивости хаотических траекторий $x_*(t)$.

Частным случаем является стабилизация неустойчивого состояния равновесия. Пусть правая часть (10) удовлетворяет условию $F(x_{*0}, 0) = 0$. Тогда при $u(t) \equiv 0$ система (10) имеет состояние равновесия x_{*0}, которое требуется стабилизировать в указанном выше смысле выбором подходящего управления. Специфика задачи снова состоит в дополнительном требовании «малости» управления.

Второй класс задач управления отвечает задачам *возбуждения*, или *генерации* хаотических колебаний (эти задачи называются также *хаотизацией*, или *анти-управлением*). Такие задачи возникают, когда хаотическое движение является желательным видом поведения системы. Классическими примерами являются генераторы псевдослучайных чисел, источники хаотических сигналов в системах связи и радиолокационных системах. В последние годы появились также свидетельства того, что хаотизация процессов может дать весьма ощутимый эффект в химических и биотехнологиях, при обработке сыпучих материалов. Для подобных задач характерно, что траектория, по которой должен двигаться фазовый вектор системы, заранее не задана, не известна или не имеет значения для достижения цели.

Формально цель управления можно было бы также представить в виде (16), но здесь целевая траектория $x_*(t)$ уже не является периодической. Более того, вместо движения по данной траектории может быть поставлено требование, чтобы управляемый процесс удовлетворял некоторому формальному критерию хаотичности. Например, может быть задана скалярная целевая функция $G(x)$ и поставлена цель управления, состоящая в достижении предельного равенства

$$\lim_{t\to\infty} G(x(t)) = G_* \tag{20}$$

или неравенства для нижнего предела $G\big(x(t)\big)$

$$\varliminf_{t\to\infty} G(x(t)) \geq G_*. \tag{21}$$

Обычно в качестве целевой функции для задач хаотизации берется старший ляпуновский показатель $G = \alpha_1$ и задается $G_* > 0$. В некоторых случаях в качестве $G(x)$ выбирается полная энергия механических или электрических колебаний.

Третий важный класс целей управления соответствует задаче *синхронизации*, или, если говорить более точно, то *управляемой синхронизации*, как противоположности *авто-* или *само- синхронизации*. Синхронизация имеет важные применения в вибрационной технике (синхронизация вибровозбудителей [7]), в технике связи (синхронизация сигналов приемника и передатчика) [24, 45], в биологии и биотехнологиях и т. д. В 90-х годах появилось большое число публикаций, посвященных управлению синхронизацией хаотических процессов и ее применению в системах передачи информации [5, 101, 14, 148, 231].

В общем случае синхронизация понимается как согласованное, слаженное изменение состояний двух, или более, систем, либо, возможно, согласованное изменение некоторых их характеристик, например частот колебаний [72]. Если указанное требование должно выполняться только асимптотически, то говорят об *асимптотической синхронизации*. Если синхронизация в системе не может возникнуть без управления (при $u = 0$), то может быть поставлена задача нахождения закона управления, при котором в замкнутой системе синхронизация наступает. Таким образом, синхронизация может быть взята в качестве цели управления. Формальным выражением синхронного движения двух подсистем с векторами состояния $x_1 \in R^n$ и $x_2 \in R^n$ может быть полное или частичное совпадение векторов состояния, например равенство

$$x_1 = x_2. \tag{22}$$

Равенство (22) выделяет в объединенном пространстве состояний взаимодействующих подсистем некоторое подпространство (диагональ). Требование *асимптотической синхронизации* состояний x_1 и x_2 двух систем можно выразить как

$$\lim_{t\to\infty} \big(x_1(t) - x_2(t)\big) = 0 \tag{23}$$

Относительно совокупного вектора состояний $x = \{x_1, x_2\}$ системы в целом, соотношение (23) означает сходимость $x(t)$ к диагональному множеству $\{x : x_1 = x_2\}$.

Общей особенностью задач управления возбуждением и синхронизацией колебаний является то, что желаемое поведение однозначно не фиксировано, а его характеристики задаются лишь частично. Например, в задаче возбуждения колебаний могут быть заданы требования лишь на амплитуду колебаний, а частота и форма могут меняться в определенных границах. В задачах синхронизации часто основным требованием является совпадение или согласованность колебаний всех подсистем, в то время как характеристики движения каждой подсистемы могут варьироваться в широких пределах.

Удобным математическим выражением цели управления в подобных задачах является задание желаемых значений одного или нескольких числовых показателей. В задаче возбуждения колебаний в качестве такого показателя может выступать, например, энергия системы. В задачах синхронизации целью может быть асимптотическое совпадение значений некоторого показателя $G(x)$ для обоих систем:

$$\lim_{t\to\infty} \Big(G\big(x_1(t)\big) - G\big(x_2(t)\big)\Big) = 0. \tag{24}$$

Часто оказывается более удобным переписать цели управления (15), (16), (20), (23) или (24) через соответствующую целевую функцию $Q(x, t)$ как

$$\lim_{t\to\infty} Q\big(x(t), t\big) = 0. \tag{25}$$

Например, для того, чтобы привести цель управления (23) к виду (25) можно взять $Q(x) = \|x_1 - x_2\|^2$. Для цели (15) можно использовать целевую функцию вида $Q(x, t) =$

$\big(x-x_*(t)\big)^{\mathrm{T}}\varGamma\big(x-x_*(t)\big)$, где $\varGamma$ — положительно определенная симметричная матрица. Следует учесть, что выбор подходящей целевой функции является ответственным шагом при синтезе алгоритма управления.

Заметим, что класс допустимых законов управления (18), (19) может быть расширен за счет динамических обратных связей, которые описываются дифференциальными уравнениями, или уравнениями с запаздыванием. Также отметим, что аналогичные формулировки применимы и к другим классам рассмотренных выше моделей.

Важным типом задач управления хаотическими процессами является *модификация аттракторов*, например, преобразование хаотических колебаний в периодические и обратно. Развитие методов решения подобных задач стимулировалось новыми применениями в лазерных и химических технологиях, в технике телекоммуникаций, в биологии и медицине [89, 127]. Например, работоспособность лазера, перешедшего в хаотический (многомодовый) режим, можно восстановить введением слабой обратной связи по оптическому каналу. В результате можно повысить мощность излучения при сохранении его когерентности. Напротив, в химической технологии свойство хаотичности процесса перемешивания в реакторе является полезным, так как способствует ускорению реакции и повышению качества продукта. Следовательно, разумной целью управления является в этом случае повышение степени хаотичности. Наконец, в медицине для лечения некоторых видов сердечной аритмии было предложено использовать электростимуляторы с обратной связью, изменяющие степень нерегулярности сердечного ритма [78, 133] путем подачи стимулирующих импульсов в соответствующие моменты времени. Поскольку аритмия может выражаться как в повышении, так и в понижении степени хаотичности сердечного ритма по сравнению с индивидуальной нормой пациента, целью управления в этом случае является поддержание заданной степени нерегулярности.

4 Методы управления хаотическими процессами

4.1 Разомкнутое (программное) управление

Использование принципа управления по возмущению, или «управления программным сигналом», т. е. формирование сигнала управления в виде некоторой функции времени без учета значений управляемого процесса, основано на изменении поведения нелинейной системы под воздействием заранее выбранного внешнего сигнала $u(t)$. Этот сигнал может представлять собой либо определенное физическое воздействие на систему, например – внешнюю силу или поле, либо выражать изменение («модуляцию») некоторого параметра управляемой системы. Такой подход привлекателен простотой реализации, т. к. при нем не требуется проведения каких-либо измерений и установки датчиков. Данное обстоятельство имеет особое значение при управлении сверхбыстрыми процессами, например происходящими на молекулярном или атомном уровне, для которых отсутствует возможность измерений состояния системы (по крайней мере, в режиме реального времени).

Возможность значительного изменения динамики системы периодическим сигналом возбуждения известна давно. Например, как показано еще в первой половине XX в. [16, 263], высокочастотное возбуждение может стабилизировать маятник в неустойчивом состоянии. Это открытие положило начало *вибрационной механике* [8]. Анализ влияния высокочастотного возбуждения на поведение нелинейных систем общего вида основывался на *методе* *усреднения* Крылова–Боголюбова [9]. В теории управления высокочастотные воздействия и параметрическая модуляция исследовались в рамках вибрационного управления [69, 208] и так называемого «дрожащего» управления (dither control) [290], а также в недавних работах Г.А. Леонова по нестационарной стабилизации [22, 23]. В упомянутых работах, однако, рассматривалась только задача стабилизации системы либо в заданном состоянии равновесия, либо относительно заданной («целевой», «опорной») траектории.

В недавних публикациях [215, 216] для изменения свойств системы, представленной в *форме Лурье*, [2] предложено использовать вибрирующее управление с кусочно-постоянным входным стохастическим («дрожащим») сигналом. Это дает возможность влиять на вид эквивалентной нелинейности, на положения равновесия системы и так далее (аналогично гармонической и статистической линеаризации, см. [39, 40]). В частности, в указанных работах, с использованием эвристического критерия хаоса, предложенного в [134], исследована возможность возбуждения, либо подавления в системе хаотических процессов.

Обширная литература посвящена исследованию влияния среднечастотных возбуждений, т. е. таких, частота которых находится в диапазоне частот собственных колебаний системы.[3] В работе [204] показана возможность подавления хаоса в реакции Белоусова–Жаботинского путем добавления возмущения типа белого шума. В работах [1, 2, 3] рассмотрен пример системы четвертого порядка, описывающей динамику водной экосистемы, состоящей из двух видов микроводорослей и двух видов зоопланктеров. Показано, что с помощью слабого периодического воздействия на параметр системы возможно трансформировать хаотические колебания в периодические, причем величина параметра не покидает область хаотичности ни в какой момент времени. Перечисленные результаты основаны на компьютерном моделировании.

Первые попытки теоретического осмысления явления делались в работах [189, 234], в которых *метод В.К. Мельникова* [34] применен к исследованию так называемого «осциллятора Дуффинга–Холмса» (Duffing–Holmes)

$$\ddot{\varphi} - c\varphi + b\varphi^3 = -a\dot{\varphi} + d\cos(\omega t). \tag{26}$$

Правая часть (26) рассматривалась как малое возмущение, действующее на невозмущенную гамильтонову систему. Аналитически вычислена функция Мельникова, которая отражает скорость изменения расстояния между устойчивым и неустойчивым многообразиями при малых возмущениях. На ее основе получены значения параметров, при которых поведение системы становится хаотическим. Далее, введено дополнительное возмущение, состоящее в изменении параметра нелинейности b, вместо которого взята функция $b(1 + \eta\cos\Omega t)$ и найдена новая функция Мельникова. Численные исследования этой функции показали, что хаотическое поведение можно подавить, если частоту Ω выбрать близкой к частоте исходного возбуждения ω. Этот эффект был подтвержден экспериментально с помощью установки, содержащей два постоянных магнита, электромагнитный вибратор и оптический датчик [130]. Обзор полученных результатов, а также постановка ряда новых задач даны в работе [190]. Аналогичные результаты для более широкого класса нелинейных осцилляторов получены в [83, 84]. Развитие и аналитическое обоснование [1, 2, 3] можно найти в [26, 27, 28].

[2] Т. е. в виде линейной динамической подсистемы со статической нелинейностью в обратной связи.

[3] Заметим, что для нелинейных систем частота собственных колебанийзависит от их амплитуды.

Проводимые в последнее время исследования направлены на повышение качества подавления хаоса при снижении требуемого уровня внешнего воздействия и обеспечение сходимости траекторий системы к желаемой периодической орбите (предельному циклу). Кроме того, были проведены исследования по управлению системами дискретного времени (управлению *отображениями*).

Так, в работе [131] на основе компьютерного моделирования перехода Джозефсона (Josephson), процессов в жидких кристаллах, а также на базе экспериментов с бистабильной механической системой показано, что изменение фазы, а также частоты параметрического возмущения может как повысить, так и снизить порог возникновения хаоса.

В работах [15, 68] влияние квазипериодического возбуждения исследуется путем сведения его к периодическому воздействию. Метод В.К. Мельникова использован в работе [62] для анализа влияния на систему параметрического возбуждения, являющегося случайным процессом, а в работе [269] предложено выбирать частоту возбуждения близко к резонансному пику спектральной плотности одной из переменных системы. В работе [212] делается попытка достичь резонанса при возбуждении с частотой желаемого периодического процесса. Поскольку в хаотическом аттракторе содержатся траектории процессов, близких к периодическим с различными периодами, при надлежащем выборе управления можно существенно уменьшить потребную амплитуду (энергию) возбуждения. Численная иллюстрация этого подхода в применении к системе Лоренца (1) и системе высокого порядка, состоящей из тридцати двух диффузионно-связанных систем Лоренца, дана в работе [212]. Гармоническому возбуждению подвергался параметр r в системе (1). В статьях [94, 235] показана возможность стабилизации неустойчивых периодических траекторий при действии периодического сигнала, частота которого значительно ниже характерной частоты системы. Подавление хаотических процессов ферромагнитного резонанса в пленках из железоиттриевого граната исследовано в работе [236].

В некоторых статьях выбор функции возбуждения связывается с видом присущей системе нелинейности. Рассмотрим этот метод подробнее. Пусть модель объекта управления имеет вид:

$$\dot{x} = f(x) + Bu, \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \tag{27}$$

Положим, что $m = n$ и $\det B \neq 0$. Если $x_*(t)$ – желаемая траектория управляемого движения, то интуитивно обоснован выбор возбуждения в виде [157] (т.н. «воздействие Хюблера»):

$$u_*(t) = B^{-1}\left(\dot{x}_*(t) - f\big(x_*(t)\big)\right), \tag{28}$$

так как при таком выборе функция $x_*(t)$ удовлетворяет уравнениям движения возбужденной системы. Уравнение ошибки $e = x - x_*(t)$ в этом случае имеет вид $\dot{e} = f\big(e + x_*(t)\big) - f\big(x_*(t)\big)$. Поэтому, если линеаризованная система с матрицей $A(t) = \partial f(x_*(t))/\partial x$ равномерно устойчива в том смысле, что для некоторого λ и для всех $t \geq 0$ выполнено [4] $A(t) + A(t)^{\mathrm{T}} \leq -\lambda I$, то все решения (27), (28) сходятся к $x_*(t)$, т. е. достигается цель управления (15). Более общие условия сходимости приведены в монографии [127]. Если $m < n$ и матрица B – вырожденная, то аналогичный результат можно получить при выполнении следующего *условия согласованности*: значения вектор-функции $\dot{x}_*(t) - f(x_*(t))$

[4] Матричные неравенства для симметричных матриц здесь и далее понимаются в смысле квадратичных форм: $A \geq B$, если матрица $A - B$ положительно полуопределена.

должны лежать в линейном подпространстве, порожденном столбцами матрицы B. Тогда соответствующее управление можно взять в виде $u_*(t) = B^+(\dot{x}_*(t) - f(x_*(t)))$, где B^+ есть псевдообратная к B матрица. Несмотря на то, что выполнение условия равномерной устойчивости исключает хаотические (т. е. *неустойчивые*) траектории x_*, как отмечено в ряде статей, если области с неустойчивым поведением не являются доминирующими, то возможна локальная сходимость к хаотическим траекториям. В работе [245] для ряда примеров указанный подход сравнивается с другими методами. Рассматривается система второго порядка, описывающая так называемую «электрическую цепь Мурали–Лакшманана–Чуа» (Murali–Lakshmanan–Chua), а также уравнения ФицХью–Нагумо (FitzHugh–Nagumo), описывающие прохождение нервных импульсов через нейронную мембрану. Результаты численного исследования различных методов программного возбуждения хаоса при наличии шумов приведены в работе [247]. В статьях [154, 210] подобные результаты получены для дискретных систем.

В работе [125] получены аналитические частотные условия глобальной сходимости решений систем Лурье к установившемуся режиму при действии непериодических сигналов возбуждения. Эти условия допускают наличие областей неустойчивости управляемой системы. Они основаны на полученных ранее в [20] результатах для периодических входных процессов.

Подводя итог, можно сказать, что к настоящему времени разработано множество методов управления хаотическими процессами в разомкнутом контуре (управления с программным воздействием). Большинство из этих методов исследовано численно в частных случаях и для модельных задач. Общая задача об условиях возбуждения или подавления хаотических колебаний с помощью программного сигнала управления по-прежнему остается нерешенной.

4.2 Линейное и нелинейное управление

Многие статьи посвящены возможности применения традиционных подходов и методов автоматического управления к задачам управления хаосом. В ряде случаев желаемую цель управления можно достичь даже с помощью простого пропорционального закона управления и обратной связи. Например, как показано в работе [163], метод *комбинированного управления*, называемого в физических работах «разомкнуто-замкнутым» (open-plus-closed-loop, OPCL) применим к системам вида (27) при $m = n$ и $\det B \neq 0$. Закон управления предложен в виде

$$u(t) = B^{-1}\left(\dot{x}_*(t) - f\big(x_*(t)\big) - K\big(x - x_*(t)\big)\right), \tag{29}$$

где K – квадратная матрица коэффициентов усиления. Численные результаты по исследованию данного метода для хаотических систем приведены в работах [49, 162]. Нелинейные варианты метода комбинированного управления предложены в работах [270, 283]. Управление с пропорциональной амплитудо-импульсной модуляцией изучалось в работах [82, 86, 87]. В работах [29, 30, 31, 32, 292] на основе исследования расположения полюсов изучалась обратная связь в *расширенном пространстве* (x, u) (т. е. динамический регулятор). При этом получаются локальные (по пространству) результаты из-за неточности линеаризации.

С точки зрения современной теории управления случай $m = n$, $\det B \neq 0$ тривиален. Действительно, для сходимости решений системы (27), (29) к желаемой траектории $x_*(t)$

достаточно, чтобы K было выбрано в виде $K=\kappa\mathbf{I}$, где $\kappa>\sup\limits_t\|A(t)\|$, $A(t)\triangleq\partial f\left(x_*(t)\right)/\partial x$. Такой выбор всегда возможен, если вектор-функция $x_*(t)$ ограничена, в частности, для периодических и хаотических траекторий $x_*(t)$.

Для решения более сложных задач при неполном управлении и измерении в теории нелинейного управления разработан целый ряд методов. Один из наиболее развитых – *линеаризация обратной связью* (feedback linearization) [35, 161, 168]. К хаотическим системам он применялся в работах [51, 58, 93, 288]. Поясним идею метода для систем, афинных по управлению

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m. \tag{30}$$

Система (30) называется *линеаризуемой обратной связью в области* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, если существует гладкая обратимая замена координат $z=\Phi(x)$, $x\in\Omega$, и гладкое преобразование обратной связи

$$u=\alpha(x)+\beta(x)v,\qquad x\in\Omega, \tag{31}$$

где $v\in\mathbb{R}^m$ – новое управление, если замкнутая система линейна, т. е. ее уравнение в новых координатах имеет вид

$$\dot{z}=Az+Bv \tag{32}$$

для некоторых постоянных матриц A, B.

Критерий линеаризуемости обратной связью имеет простой вид для систем с одним входом ($m=1$). Именно, система (30) линеаризуема обратной связью в окрестности некоторой точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует гладкая скалярная функция $h(x)$ такая, что система имеет в точке x_0 относительную степень n по отношению к выходу $y=h(x)$. Напомним, что относительная степень равна r, если последовательное дифференцирование выходной функции $y=h(x)$ в силу системы (30) дает выражение, содержащее вход точно на r-м шаге. Более формально:

$$L_gL_f^kh(x)=0,\quad k=0,1,\ldots,r-2,\qquad L_yL_f^{r-1}h(x)\neq 0, \tag{33}$$

где через $L_\Psi\Phi(x)$ обозначается *производная Ли* вектор-функции $\Phi(x)$ вдоль векторного поля Ψ: $L_\Psi\Phi(x)\triangleq\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}\Psi_i(x)$.

Если критерий линеаризуемости выполняется, то система мож быть приведена к так называемой *канонической форме Бруновского* (цепи интеграторов) следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned}z&=\Phi(x)=\operatorname{col}\bigl(h(x),L_fh(x),\ldots,L_f^{n-1}h(x)\bigr),\\ u&=\frac{1}{b\left(\Phi^{-1}(z)\right)}\Bigl(-a\left(\Phi^{-1}(z)\right)+v\Bigr).\end{aligned} \tag{34}$$

Пример. Рассмотрим систему Лоренца со скалярным управлением в третьем уравнении:

$$\begin{cases}\dot{x}_1&=\sigma(x_2-x_1),\\ \dot{x}_2&=rx_1-x_2-x_1x_3,\\ \dot{x}_3&=-\beta x_3+x_1x_2+u.\end{cases} \tag{35}$$

Выберем $y = x_1$. Тогда $L_f y = \dot{y} = \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$, $L_f^2 y = L_f(L_f y) = \ddot{x}_1 = \sigma\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) = \sigma\left((r+1)\,x_1 - 2x_2 + x_1 x_3\right)$. Очевидно, относительная степень $r = 3$ всюду, кроме плоскости $x_1 = 0$. Замену координат можно задать соотношениями

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1,\\
x_2 &= \frac{1}{\sigma} z_2 + z_1,\\
x_3 &= \frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{\sigma} z_3 - (r-1) z_1 - \frac{2}{\sigma} z_2\right),
\end{aligned}$$

т. е. система линеаризуема обратной связью при $x_1 \neq 0$. Таким образом, система (35) эквивалентна линейной в каждом из полупространств $\{x_1 < 0\}$, $\{x_1 > 0\}$. Поскольку линейная система в форме Бруновского вполне управляема, с помощью методов теории линейных систем можно обеспечить любую заданную динамику замкнутой системы. К недостаткам полученного решения относится то, что оно не является глобальным. Другой существенный недостаток в том, что подобный подход полностью игнорирует собственную динамику системы. Произвольная желаемая динамика достигается ценой большой мощности управления, требуемой при значительных начальных условиях и при слежении за быстро меняющимся программным движением. К сожалению, неприменимость к задачам со слабым (маломощным) управлением является типичным недостатком многих работ, использующих традиционые методы нелинейного и адаптивного управления.

Возможности динамических обратных связей могут быть полнее реализованы путем применением наблюдающих устройств (наблюдателей). Такой подход дает методическую основу для управления при неполных измерениях системы. Обзор методов построения нелинейных наблюдателей применительно к задачам управления хаосом приведен в работе [224]. Некоторые частные приемы описаны также в [139, 217]. В работе [186] приводятся результаты применения линейных наблюдателей с большим коэффициентом усиления для управления системами с нелинейностями, удовлетворяющими глобальному условию Липшица.

Заметим, что для хаотических моделей глобальное условие Липшица зачастую не выполнено из-за наличия полиномиальных членов, таких как $x_1 x_2$, x^2 и т. д. Ограниченность траекторий хаотических систем, имеющая место в собственном движении, под воздействием управления может нарушаться. Следовательно, при выборе управления особое внимание должно быть уделено обеспечению ограниченности решений. В противном случае решение может «уйти на бесконечность» за конечное время – «сорваться», что делает бессмысленным обсуждение вопросов устойчивости и сходимости. Возможность срыва траекторий нелинейных систем часто упускается из виду в статьях прикладного характера.

Ряд методов основывается на изменении текущего значения некоторой *целевой функции* $Q(x(t), t)$. Значение $Q(x(t), t)$ может соответствовать расстоянию между состоянием системы в данный момент времени $x(t)$ и текущей точкой $x_*(t)$ на заданной траектории, например – $Q(x, t) = \|x - x_*(t)\|^2$, где $\|x\|$ – евклидова норма вектора x. В качестве целевой функции может быть также выбрано расстояние от текущего положением системы $x(t)$ до заданной *целевой поверхности* $h(x) = 0$, такое как $Q(x) = \|h(x)\|^2$. Для систем непрерывного времени значение $Q(x)$ не зависит непосредственно (в тот же момент времени) от сигнала управления u, поэтому вместо $Q(x)$ можно использовать новую непосредственно возникающую целевую функцию $\dot{Q}(x) = (\partial Q / \partial x)\, F(x, u)$, т. е. вместо уменьшения значений исходной целевой функции, уменьшать скорость изменения этой функции по времени. В этом заключается основная идея *метода скоростного градиента* (СГ-метода) [35, 43], при котором изменение управления u происходит в направлении антиградиента по u скорости $\dot{Q}(x)$ исходной целевой функции. Впервые использование данного подхода к управлению хаотическими системами предложено в [44]. СГ-алгоритмы имеют некоторые модификации. Алгоритмы в так называемой *конечной форме* записываются в общем виде как

$$u = -\Psi\big(\nabla_u \dot{Q}(x,u)\big), \tag{36}$$

где $\Psi(z)$ – некоторая вектор-функция, значение которой направлено под острым углом к своему аргументу z. Для аффинных объектов управления $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ алгоритм (36) можно упростить:

$$u = -\Psi\big(g(x)^{\mathrm{T}} \nabla Q(x)\big). \tag{37}$$

Частными случаями (36) являются *пропорциональный* СГ-алгоритм

$$u = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}(x,u). \tag{38}$$

где Γ – некоторая положительно-определенная матрица, а также *релейный* СГ-алгоритм

$$u = -\Gamma \operatorname{sign}\big(\nabla_u \dot{Q}(x,u)\big). \tag{39}$$

Для задач адаптации используется *дифференциальная форма* СГ-алгоритмов:

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}(x,u). \tag{40}$$

Метод скоростного градиента основан на использовании функции Ляпунова V, убывающей вдоль траекторий замкнутой системы. Конечная форма СГ-алгоритмов получается, если в качестве функции Ляпунова взять саму целевую функцию: $V(x) = Q(x)$. Дифференциальная форма СГ-алгоритмов соответствует выбору $V(x,u) = Q(x) + 0.5(u-u_*)^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}(u-u_*)$, где u_* – желаемое («идеальное») значение управляющих переменных.

Пример. Стабилизация равновесия модели термоконвекции. Одними из первых экспериментов, демонстрирующих нерегулярные колебательные движения в физических системах были эксперименты с термоконвекцией 1980-х годов, см. [36, 214]. Позже аналогичные установки использовались для экспериментов с управлением термоконвекцией [260]. Математическая модель управляемого процесса имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -y - xz, \\ \dot{z} = -z + xy - r + u, \end{cases} \tag{41}$$

где x - скорость конвекции, y, z - разности температур в горизонтальном и вертикальном направлениях, σ - число Прандтля, r - число Релея. Управляющая переменная u - отклонение скорости нагрева от номинального значения r. Система (41) получается их системы Лоренца заменой $z - r$ на z в предположении, что $r = \mathrm{const}$ и $b = 1$). При $u = 0$ и $0 < r < 1$ система имеет единственное глобально притягивающее равновесие $(0, 0, -r)$, соответствующее установившемуся процессу термоконвекции. При $r = 1$ возникают два новых устойчивых равновесия C_+ и C_- с координатами $x = y = \pm\sqrt{r-1}, z = -1$. Эти положения равновесия, в свою очередь, теряют устойчивость в бифуркации Андронова–Хопфа при $r = \sigma(\sigma+4)/(\sigma-2)$ и для больших значений параметра r система равновесий не имеет.

В работе [260] предложен релейный закон управления для стабилизации положения равновесия системы:

$$u = -\gamma \mathrm{sgn}(z+1). \tag{42}$$

Эксперименты показали, что после включения в контур закон управления (42) стабилизирует конвекцию в одном из направлений (по или против часовой стрелки), что соответствует стабилизации одного из равновесий: C_+ или C_-.

Нетрудно видеть, что алгоритм (42) является частным случаем алгоритма скоростного градиента (39) для целевой функции

$$Q(x,y,z) = (x - \sqrt{r-1})^2/\sigma + (y - \sqrt{r-1})^2 + (z+1)^2.$$

Как показано в [127], любая траектория замкнутой системы стремится к одному из положений равновесия, принадлежащему множеству точек (x,y,z) таких, что

$$\left\{ x = y, \quad \left|(x+\sqrt{r-1})(x-\sqrt{r-1})\right| \le \gamma, \quad z = -1 \right\}. \tag{43}$$

Таким образом, любое решение стремится в окрестность одного из равновесий C_+ or C_-, причем размер окрестности стремится к нулю с уменьшением коэффициента усиления алгоритма γ.

В работе [271] задача стабилизации инвариантного целевого многообразия $h(x) = 0$ малым по величине управлением решается с помощью *метода макропеременных* (ранее предложенного А.А.Колесниковым, см. [18, 19]).

При решении задач стабилизации относительного заданного состояния, или целевого многообразия, использовались и другие методы современной теории нелинейного управления: теория *центрального многообразия* (centre manifold) [129]; процедура *бэкстеппинга* (backstepping) и методы итеративного синтеза (iterative design) [202, 203]; метод *пассификации* (passivity based design) [35, 127]; метод *систем с переменной структурой* (СПС) [178, 115, 287, 289]; теория *абсолютной устойчивости* [265]; H_∞-оптимальный синтез [102, 264]; сочетание прямого метода Ляпунова и линеаризации обратной связью [196, 225]. Заметим здесь, что СПС-алгоритмы с поверхностью переключения $h(x) = 0$ совпадают с алгоритмами скоростного градиента (39), для которых целевая функция взята в виде $Q(x) = \|h(x)\|$.

Для большинства перечисленных подходов основным условием работоспособности (достижения цели) является существование обратной связи, осуществляющей *пассификацию* системы, то есть делающей замкнутую систему пассивной. Для афинной по управлению системы (30) это означает существование функции $V(x)$ и обратной связи (31) такой, что

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\Big(f + g\alpha + g\beta v\Big) \le yv. \tag{44}$$

Опуская некоторые детали, можно сказать, что (44) выполнено, если выход y взят в виде $y = L_g V \beta$. Это не что иное, как алгоритм скоростного градиента при $x \ne 0$ и при этом $\dot{V}\big|_{y=0} < 0$. Последнее условие означает, что так называемая *нуль-динамика* системы, т. е. движение на многообразии $y = 0$ асимптотически устойчива (это свойство называется *минимально-фазовостью* [35]).

Плодотворным оказалось сочетание частотного подхода и методов нелинейного управления, см. работы [66, 136] и приведенную там библиографию. В частности, приближенный метод гармонического баланса использован совместно с точными результатами теории абсолютной устойчивости для оценки и предсказания хаотических процессов. В рамках этого направления получен интересный результат по применению избирательного («очищающего», *washout*) фильтра, который демпфирует все сигналы с частотами, лежащими вне некоторого узкого диапазона (см. также [211]). Если такой фильтр находится в обратной связи хаотической системы, а его базовая частота, условно говоря, совпадает с частотой одного из имеющихся неустойчивых периодических решений, то вполне правдоподобным будет периодическое, а не хаотическое поведение системы. Применение этого подхода к задачам управления лазерами описано в работах [64, 99].

Таким образом, большинство методов нелинейного управления применительно к рассматриваемым задачам управления хаосом можно разбить на два основных подхода: ляпуновский подход (метод СГ, методы пассификации) и «компенсационный» подход (линеаризация обратной связью, геометрические методы и т. д.). Соотношение между этими двумя подходами можно проиллюстрировать следующим образом.

Пусть цель управления заключается в стабилизации нулевого значения некоторой выходной переменной $y = h(x)$ для аффинной системы $\dot{x} = f(x) + g(x)u$. Ляпуновские методы (в том числе метод скоростного градиента) используют целевую функцию вида $Q(x) = \|h(x)\|^2$ и производят уменьшение ее производной $\dot{Q}$ согласно условию $h^{\mathrm{T}}\partial h/\partial x(f+gu) < 0$, осуществляя движение вдоль градиента скорости $Q(x)$ (т. е. по антиградиенту $\dot{Q}$):

$$u = -\gamma g^{\mathrm{T}}(\nabla h)h.$$

Видно, что условие «малости управления» можно выполнить, если коэффициент усиления $\gamma > 0$ достаточно мал.

Компенсационный подход основан на задании предписанной (желаемой) динамики либо для всего состояния системы, либо для какой-нибудь функции ее состояния. Например, для синтеза алгоритма управления вводится макропеременная $\alpha(x) = \dot{y} + \rho y$, где $\rho > 0$ – некоторый параметр, значение которой затем обнуляется выбором управления, имеющего вид:

$$u = -\frac{f^{\mathrm{T}}(\nabla h) + \rho h}{g^{\mathrm{T}}(\nabla h)}$$

Заметим, что $\alpha = 0$ если и только если $\dot{Q} = -2\rho Q$, т. е. компенсация эквивалентна заданию скорости убывания $Q(x)$. В результате ценой уменьшения гибкости и потери свойства малости управления достигается любая желаемая «мгновенная» скорость протекания переходных процессов.

В заключение раздела еще раз подчеркнем, что в работах, использующих хорошо развитые методы современной линейной и нелинейной теории управления, зачастую не уделяется достаточного внимания специфическим свойствам хаотических процессов. Это обычно выражается в том, что опускается требование малости управления. С другой стороны, мощный инструментарий современной теории управления не полностью используется в работах, в которых данное требование учитывается. Кроме того, во многих публикациях рассматриваются лишь примеры систем невысокого порядка и делаются нереалистичные допущения (например, в ряде работ считается, что число управляющих воздействий равно размерности вектора состояния системы).

4.3 Адаптивное управление

Во многих публикациях рассматривается возможность применения методов адаптации для управления хаотическими процессами. Это неудивительно, так как во многих физических приложениях параметры объекта управления неизвестны, а зачастую и информация о структуре модели (например – о размерности уравнений системы или виде нелинейных характеристик) задана не полностью.

В большинстве работ используются методы прямого либо непрямого (основанного на идентификации) адаптивного параметрического управления. Модель системы, таким образом, *параметризуется*, т. е. приводится к виду

$$\dot{x} = F(x, \theta, u), \qquad y = h(x), \tag{45}$$

где θ – вектор неизвестных параметров. В соотвествии с (45), закон управления также записывается в параметрической форме:

$$u = \mathcal{U}(x, \xi), \tag{46}$$

где $\xi = \varPhi(\theta)$, т. е. вектор параметров регулятора определяется через вектор параметров системы (45). Процессы, полученные в результате измерения состояния $\{x(t)\}$ или выхода системы $\{y(t)\}$ используются (в режиме реального времени, либо при последующей обработке накопленных данных) для получения оценок $\hat{\theta}(t)$ неизвестных параметров $\theta(t)$ или непосредственной настройки параметров регулятора $\xi(t)$.

Для разработки алгоритмов адаптивного управления и параметрической идентификации можно использовать широкий арсенал известных методов адаптации, таких как методы *градиента* и *скоростного градиента*, *наименьших квадратов*, *максимального правдоподобия*, и т. д. Для систем непрерывного времени разнообразные алгоритмы адаптации можно получить, используя *дифференциальную форму* (40) СГ-алгоритмов. Большинство из имеющихся результатов получены при *линейной* параметризации модели (45) или регулятора (46).

Указанные методы хорошо известны из литературы по теории управления, см., например [127, 172]. Доказательства их работоспособности обычно основываются на функциях Ляпунова, которые либо выбираются квадратичными изначально, либо приводятся к квадратичным путем некоторого преобразования переменных. В работах [81, 188, 291], а также во многих других публикациях, не указанных в настоящем обзоре, содержатся примеры применения этого подхода для задач управления типичными хаотическими системами второго и третьего порядков (системами *Лоренца*, *Чуа*, *Дуффинга* и т. д.). В ряде статей, таких как [116, 206, 205, 282, 285], аналогичные методы используются и для систем более высоких порядков. Регулятор (46) обычно строится с применением *эталонной модели*, либо методов линеаризации обратной связью.

Отметим, что в литературе по управлению хаотическими процессами имеются разные трактовки адаптивного подхода. Например, в ряде статей [156, 246, 261] адаптивным назван простой линейный интегральный закон управления

$$\dot{\xi} = \gamma(y_* - y), \tag{47}$$

где y_* – желаемое значение выходной переменной y, а γ – коэффициент усиления («жесткость», *stiffness*). Чтобы пояснить ситуацию, рассмотрим систему (45), (46). Подстановкой

(46) в (45) получим следующие уравнения системы с настраиваемыми параметрами:

$$\dot{x} = F(x, \varPhi(\xi), \mathcal{U}(x,\xi)), y = h(x). \tag{48}$$

Как нетрудно показать, для аффинной замкнутой системы $\dot{x} = f(x)+g(x)\xi$ и квадратичной целевой функции $Q = (y-y_*)^2$ алгоритм (47) является частным случаем СГ-алгоритма (40), в котором u заменено на ξ. Знак параметра γ должен совпадать со знаком $\operatorname{sign}\mu(x)$, где $\mu(x) = \nabla h(x)^{\mathrm{T}} g(x)$. Более того, необходимым условием работоспособности алгоритма (47) является $\operatorname{sign}\mu(x) = \mathrm{const}$. Общая форма СГ-алгоритма (40) в данном случае имеет вид

$$\dot{\xi} = \gamma(y_* - y)\mu(x). \tag{49}$$

Его сходимость следует из общих условий устойчивости СГ-алгоритмов, см. [127]. Аналогичным образом нетрудно обосновать и так называемый *закон Хюбермана–Люмера* (Huberman–Lumer), являющийся обобщением (47).

В целом ряде работ предлагаются алгоритмы управления, основанные на настройке всего лишь одного параметра. Еще в классической работе Э. Лоренца [195] было предложено использовать для анализа системы так называемое *отображение последования* (return map) $y_k \mapsto y_{k+1}$, где $y_k = y(t_k)$ – значение некоторой скалярной переменой $y(t)$ в момент t_k достижения очередного локального максимума. Считается [36, 214], что в системах с сильной диссипацией с достаточной точностью можно ограничить глубину памяти единицей и изучать свойства исходной системы при помощи анализа функции $y_{k+1} = \mathcal{L}(y_k)$. Например, превращение хаотического движения в периодическое соответствует стабилизации неустойчивой неподвижной точки отображения $\mathcal{L}(\cdot)$, для достижения которой, как правило, достаточно менять один управляющий параметр.

В работах [55, 74] предлагается выполнять адаптивную настройку интервалов времени между последовательными максимумами процесса. Метод применен к задачам управления лазерами. В работах [96, 95, 97] предложен дискретный алгоритм однопараметрической адаптации, близкий к методу наименьших квадратов. Применение этого метода продемонстрировано на моделях процессов лечения сердечной аритмии и управления химической реакцией Белоусова–Жаботинского. Другой метод однопараметрического адаптивного управления, основанный на концепции «универсального адаптивного регулятора», предложен в работе [273].

4.4 Линеаризация отображения Пуанкаре (OGY-метод)

Возможность преобразования хаотического движения в периодическое за счет внешнего воздействия на систему была обнаружена еще в середине 1980-х годов в работах К. Мацумото и И. Цыда [204], В.В. Алексеева и А.Ю. Лоскутова [1, 2, 3]. Однако лишь в 1990 г. произошел взрыв интереса к управлению хаотическими процессами, в значительной степени вызванный публикацией Е. Отта, С. Гребоджи и Дж. Йорке [228]. В их работе высказаны две ключевые идеи:

1. использование при синтезе регулятора *дискретной* модели системы, основанной на линеаризации отображения Пуанкаре;

2. использование *свойства рекуррентности* хаотических траекторий и применение управляющего воздействия только в моменты времени, когда траектория возвращается в некоторую окрестность требуемого состояния или заданной орбиты.

В исходной статье метод был описан для систем дискретного времени второго порядка и для непрерывных систем третьего порядка. Для его реализации требуется текущее (в темпе с управляемым процессом) вычисление собственных векторов и собственных значений матрицы Якоби для отображения Пуанкаре. После того как метод, который теперь принято называть «OGY-методом» был опубликован, многими авторами предложен ряд его расширений и трактовок. Идея OGY-метода, как она представлена в недавних работах [73, 143, 144, 141, 142], состоит в следующем.

Пусть управляемый процесс описывается следующими уравнениями состояния

$$\dot{x} = F(x, u), \tag{50}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$. Под переменной u в работе [228] понимается изменяемый параметр системы, а не стандартная «входная» управляющая переменная, но, поскольку объект нелинеен, эта разница несущественна с точки зрения управления. Пусть требуемая (целевая) траектория $x_*(t)$ является одним из решений (50) при $u(t) \equiv 0$. Эта траектория может быть как периодической, так и хаотической, но в обоих случаях она рекуррентна. Построим поверхность (так называемое *сечение Пуанкаре*)

$$S = \{x : s(x) = 0\}, \tag{51}$$

проходящую через заданную точку $x_0 = x_*(0)$ трансверсально к траектории $x_*(t)$ и рассмотрим отображение $x \mapsto P(x, u)$, в котором $P(x, u)$ есть точка первого возвращения на поверхность S решения (50), начинающегося в точке x и полученного при постоянном входе u. Отображение $x \mapsto P(x, u)$ называется *управляемым отображением Пуанкаре*. Вследствие свойства рекуррентности $x_*(t)$ это отображение определено, по крайней мере, для некоторой окрестности точки x_0. (Строгое определение управляемого отображения Пуанкаре содержит ряд технических деталей, см. [12, 127]). Рассматривая последовательность таких отображений, получаем дискретную систему

$$x_{k+1} = P(x_k, u_k), \tag{52}$$

где $x_k = x(t_k)$, t_k – момент времени k-го пересечения поверхности S, а u_k – значение управления $u(t)$ на промежутке между t_k и t_{k+1}.

Следующий шаг синтеза закона управления состоит в замене исходной системы (50) линеаризованной дискретной системой

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + Bu_k, \tag{53}$$

в которой $\tilde{x}_k = x_k - x_0$. Для полученной системы находится стабилизирующее управление, например, в виде линейной обратной связи по состоянию: $u_k = C\tilde{x}_k$. Окончательно, предлагаемый закон управления имеет вид:

$$u_k = \begin{cases} C\tilde{x}_k, & \text{если } \ \|\tilde{x}_k\| \le \Delta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{54}$$

в котором $\Delta > 0$ – некоторый достаточно малый параметр. Ключевой особенностью метода является то, что управление воздействует только в некоторой окрестности целевой траектории, т. е. в закон кусочно-постоянного управления вводится «внешняя» зона нечувствительности. Этим достигается малость управляющего воздействия, которое согласно (54) по норме не превышает $|C\tilde{x}_k| \leq \|C\|\Delta$.

Для гарантии работоспособности метода следует выбирать параметры регулятора (матрицу C) так, чтобы норма ошибки $\|\tilde{x}_k\|$ в линейной замкнутой системе убывала: $\|(A + BC)x\| \leq \rho\|x\|$, где $\rho < 1$ (при необходимости вместо евклидовой можно использовать другую подходящую квадратичную норму). Тогда, однажды войдя в Δ-окрестность цели, траектория замкнутой системы из нее не выйдет. С другой стороны, траектория наверняка войдет в любую Δ-окрестность целевой траектории благодаря свойству рекуррентности.

Разными авторами приводятся результаты численных исследований, которые подтверждают работоспособность данного подхода. Часто, однако, отмечается низкая скорость сходимости процесса, что является платой за обеспечение глобальной стабилизации траекторий нелинейной системы с помощью малого управления.

Для того, чтобы использовать OGY-метод, следует преодолеть два серьезных препятствия: неточность модели системы и неполноту измерений текущего состояния процесса. Для устранения второго из них предлагалось вместо используемого в исходном алгоритме вектора состояния x перейти к так называемому *вектору запаздывающих координат* (delayed coordinates), который вводится как $X(t) = \big[y(t), y(t-\tau), \ldots, y(t-(N-1)\tau)\big]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, где $y = h(x)$ – измеряемый выход (например, одна из координат системы), а $\tau > 0$ – время запаздывания (параметр). При этом закон управления (54) принимает вид:

$$u_k = \begin{cases} u'_k & \text{если } \ |y_{k,i} - y^*_{k,i}| \leq \Delta_y, i = 1, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{55}$$

где $y_{k,i} = y(t_k - i\tau)$, $y^*_{k,i} = h(x_*(t_k - i\tau))$, Δ_y – максимальная желаемая разница между y_k и y_*, $u'_k = \mathcal{U}(y_k, y_{k,1}, \ldots, y_{k,N-1})$, $\mathcal{U}$ – функция, определяющая вид регулятора.

Теоретически более обоснованным является использование при синтезе закона управления структуры модели объекта. Например, если линеаризованная модель объекта управления в переменных "вход-выход"имеет вид

$$y_k + a_1 y_{k,1} + \cdots + a_{N-1} y_{k,N-1} = b_0 u_k + \cdots + b_{N-1} u_{k-N-1}, \tag{56}$$

то можно воспользоваться стандартным приемом построения линейного регулятора по заданному (эталонному) уравнению замкнутой системы

$$u'_k = b_0^{-1}\big((a_1 - g_1)y_{k,1} + \cdots + (a_{N-1} - g_{N-1})y_{k,N-1} - b_1 u_{k-1} - \cdots - b_{N-1}u_{k-N+1} + g_1 y^*_{k,1} + \cdots + g_{N-1} y_{k,N-1}\big), \tag{57}$$

где g_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ – коэффициенты *эталонного уравнения*, которые следует выбирать так, чтобы полином $G(\lambda) = \lambda^{N-1} + g_1\lambda^{N-2} + \cdots + g_{N-1}$ был устойчивым (имел все корни по модулю меньше 1). В более компактной форме закон (57) можно записать в виде

$$u'_k = \vartheta^{\mathrm{T}} w_k, \tag{58}$$

где $\vartheta \in \mathbb{R}^{2(N-1)}$ – вектор параметров регулятора (57), $w_k = \{y_{k,1}, \ldots, y_{k,N-1}, u_{k-1}, \ldots, u_{k-N+1}\}$ – вектор запаздывающих координат и управлений (часто называемый регрессором).

В работе [159] предложен частный случай алгоритма (55), названный «эпизодическая пропорциональная обратная связь» (occasional proportional feedback, OFP-алгоритм). OFP-алгоритм используется для стабилизации амплитуды предельного цикла. Он основан на измерении локальных максимумов (или минимумов) выхода $y(t)$, т. е. для него сечение Пуанкаре определяется согласно (51), где $s(x) = \partial h/\partial x F(x,0)$, что соответствует выполнению условия $\dot{y} = 0$ для свободной системы. Если y_k – значение k-го локального максимума, то OPF-метод приводит к простому алгоритму управления

$$u_k = \begin{cases} K\tilde{y}_k, & \text{если} \quad |\tilde{y}_k| \le \Delta, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{59}$$

где $\tilde{y}_k = y_k - y_*$ и $y_* = h(x_0)$ – требуемая величина y_k, определяющая желаемую амплитуду колебаний.

Заметим, что пока что не получено полного обоснования алгоритмов (57) и (59). Основная трудность состоит в оценке точности линеаризованного отображения Пуанкаре в запаздывающих координатах (56).

Чтобы преодолеть первое из отмеченных выше препятствий, связанное с неопределенностью линеаризованной модели объекта, в работе [228] и последующих публикациях (см. обзоры [54, 73, 141, 142]) предложено проводить оценку параметров модели в уравнениях состояния (53). Однако в упомянутых работах не было детального изложения метода, позволяющего оценить параметры модели (53) по результатам измерений выходного процесса. Эта проблема хорошо известна в теории идентификации, и она не проста, поскольку при идентификации в замкнутом контуре «хорошее» управление может привести к «плохому» оцениванию.

В работах [4, 12, 120, 124, 127] алгоритм OGY-метода модифицирован и обоснован для частного случая, когда $y_{k,i} = y_{k-i}$, $i = 1, \dots, n$. При этом измерение выходов и изменение управления происходит только в моменты пересечения с поверхностью сечения, $y^*_{k,i} = y^* = h(x_0)$. При синтезе регулятора использована модель вход-выход (56), имеющая меньше коэффициентов, чем модель (53). Для оценки параметров использован метод *рекуррентных целевых неравенств* В.А. Якубовича, позволяющий разрешить проблему идентификации в замкнутом контуре. Именно, предложено в закон управления ввести *внутреннюю* зону нечувствительности (inner deadzone). Алгоритм управления описывается условиями (55) и следующими соотношениями:

$$
\mu_{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{если} |y_{k+1} - y_*| > \Delta_y \quad \text{и} \\ & |y_{k-i} - \overline{y}(t_{k-i})| < \overline{\Delta}, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}
$$

$$
\vartheta'_{k+1} = \begin{cases} \vartheta_k - \gamma \operatorname{sign} b_0 (y_{k+1} - y_*) w_k / \|w_k\|^2, \\ \qquad\qquad \text{если} \quad \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta_k \qquad\qquad \text{иначе}; \end{cases}
\tag{60}
$$

$$
u'_{k+1} = \vartheta^{\mathrm{T}}_{k+1} w_{k+1}
$$

$$
\vartheta_{k+1} = \begin{cases} \vartheta'_{k+1} & \text{если} \quad |u'_{k+1}| \le \overline{u} \quad \text{и} \quad \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta'_{k+1} - (u'_{k+1} - \overline{u})/\|w_k\|^2, & \text{если} \quad u'_{k+1} > \overline{u} \quad \text{и} \quad \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta'_{k+1} - (u'_{k+1} + \overline{u})/\|w_k\|^2, & \text{если} \quad u'_{k+1} < -\overline{u} \quad \text{и} \quad \mu_{k+1} = 1, \\ \vartheta_k, & \text{если} \quad \mu_{k+1} = 0. \end{cases}
$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления адаптации, $\overline{u}$ – максимальное абсолютное значение управления; $\overline{\Delta}$ связано с размером «трубки» в пространстве состояния около базовой траектории $\overline{x}(t)$, где определена модель вход–выход (56).

Сочетание этой внутренней зоны нечувствительности с внешней, которая свойственна OGY-методу, приводит к робастности управления, основанного на идентификации по отношению как к неточности модели, так и к ошибкам измерения.

Появились и другие модификации и обобщения OGY-метода. Так, в работе [112] предложено использовать данные, относящиеся только к одному периоду колебаний. В работе [249] предложено «квазинепрерывный» вариант OGY-метода. Многошаговая модификация алгоритма исследовалась в работе [153]. В статье [113, 111] вместо управления, кусочно-постоянного на интервалах между моментами возврата, предложено использовать нестационарное воздействие $u(t) = c(t)\bar{u}$, в котором $c(t)$ выбирается из условия минимизации энергии управления. Итерационная процедура уточнения регулятора, позволяющая расширить область притяжения и снизить длительность переходных процессов предложена в работах [57, 56]. Исследование области притяжения для оценки начального состояния и параметров приведено в [85], а поведение системы в переходном режиме исследовано также в работах [153]. Новые результаты, показывающие эффективность OGY-метода на основе компьютерного моделирования для *отображения Копеля* (Copel map) приведены в работе [48], для *блоховского барьера* (Bloch wall) – в [59], для системы магнитных доменных барьеров (magnetic domain-wall system) – в [227]. Кроме того, эффективность метода продемонстрирована на физических экспериментах с бронзовой лентой – в работе [257], с тлеющим электрическим разрядом – в [80], и управляемой RL-диодной электрической цепью – в работе [6]. В работе [258] OPF-метод использован для стабилизации частоты излучения инфракрасного лазерного диода с полосковой геометрией и реализован в виде электронного устройства управления хаосом. Модификация OPF-метода изучалась в работе [117].

4.5 Обратная связь с запаздыванием (метод Пирагаса)

В последние годы возрос интерес к методу *обратной связи с запаздыванием* (time-delayed feedback), предложенному литовским физиком К. Пирагасом в 1992 г. [241]. Им рассматривалась задача стабилизации неустойчивой τ-периодической орбиты нелинейной системы (10) с помощью простого закона обратной связи:

$$u(t) = K\big(x(t) - x(t-\tau)\big), \tag{61}$$

где K – коэффициент передачи, τ – время запаздывания. Если τ равно периоду существующего периодического решения $\bar{x}(t)$ уравнения (10) при $u = 0$ и решение $x(t)$ уравнения замкнутой системы (10), (61) начинается на орбите $\Gamma = \{\bar{x}(t)\}$, то оно остается в Γ для всех $t \geq 0$. Удивительным, однако, является то, что $x(t)$ может сходиться к Γ, даже если $x(0)\bar{\in}\Gamma$.

Закон обратной связи (61) используется также для стабилизации периодического возбужденного процесса в системе (10) с T-периодической правой частью. Тогда τ следует брать равным T. Очевидным образом строится алгоритм метода для дискретных систем.

Предложен и расширенный вариант метода Пирагаса [262], при котором управление имеет вид

$$u(t) = K\sum_{k=0}^{M} r_k\big(y(t-k\tau) - y(t-(k+1)\tau)\big) \tag{62}$$

где $y(t) = h(x(t)) \in \mathrm{I\!R}^1$ – измеряемый выход; r_k, $k = 1, \ldots, M$ – параметры алгоритма. При $r_k = r^k$, $|r| < 1$ и $M \to \infty$ алгоритм (62) принимает вид:

$$u(t) = K\big(y(t) - y(t-\tau)\big) + Kru(t-\tau), \tag{63}$$

Несмотря на простой вид алгоритмов (61) – (63), аналитическое исследование замкнутой системы является сложной задачей. До недавнего времени были известны только численные и экспериментальные результаты, относящиеся к свойствам и области применения метода Пирагаса.

В работах [63, 65] рассматривается устойчивость возбужденного T-периодического решения системы Лурье с «обобщенным регулятором Пирагаса»

$$u(t) = G(p)\big(y(t) - y(t-\tau)\big), \tag{64}$$

где $G(p)$ $(p = d/dt)$ – передаточная функция фильтра. С использованием методов теории абсолютной устойчивости [183], в этих работах получены достаточные условия, которым должна удовлетворять передаточная функция линейной части управляемой системы, а также условия на крутизну нелинейной характеристики, которые должны быть выполнены, чтобы фильтр $G(p)$ был стабилизирующим. В работе [65] предложена процедура синтеза «оптимального» регулятора, максимизирующего размер области устойчивости. Работа [66] посвящена расширению метода на системы с нелинейной номинальной частью.

В работе [274] получено простое необходимое условие стабилизируемости с помощью алгоритма Пирагаса (61) для одного класса дискретных систем. Вводится фундаментальная матрица $\Phi(t)$ линеаризованной системы относительно заданного τ-периодического решения. Указанное условие заключается в том, что число вещественных собственных чисел матрицы $\Phi(t)$, больших единицы, не должно быть нечетным. Доказательства для более общего случая, а также для систем непрерывного времени, получены независимо в работах [165, 220]. Для расширенного закона управления (62) соответствующие результаты приведены в [179, 221]. В этих работах теория Флоке применена к системам, линеаризованным относительно заданного периодического решения. Очевидно, собственные числа матрицы $\Phi(t)$ (мультипликаторы) μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ связаны с показателями Ляпунова τ-периодического решения ρ_i соотношениями $\rho_i = \tau^{-1} \ln |\lambda_i|$. С использованием аналогичного подхода в работе [166] выполнен более детальный анализ и даны грубые оценки границ значений коэффициента обратной связи K, обеспечивающих стабилизацию периодического решения. В частности, полученная в [165] область значений K, обеспечивающих стабилизацию, включает сколь угодно малые значения K при малой степени неустойчивости $\max \rho_i$, и становится пустой (исчезает) при достаточно большом $\max \rho_i$. Некоторые границы параметра K для системы Лоренца получены в [259], где использован *метод малого параметра Пуанкаре–Линдстедта.*

В статье [253] отмечено, что для скалярной дискретной системы $y_{k+1} = f(y_k, u_k)$ необходимым условием существования дискретного варианта стабилизирующей обратной связи (62) является неравенство $\lambda < 1$, где $\lambda = \partial f / \partial y(0, 0)$. Этот результат вытекает из теоремы Гионы [135]. Показано, что ограничение $\lambda < 1$ можно преодолеть периодической модуляцией параметра K.

В работах [177, 174, 175] метод Пирагаса расширен на связанные (open flow) системы. В статье [221] он модифицирован для систем с симметрией [221]. Кроме того, в работе [180], предложено расширение метода путем введения наблюдателя для оценивания разности между состоянием системы и желаемой неустойчивой траекторией (либо заданной точкой).

Если в соотношении (63) выбрать $|r| > 1$, то получаемый алгоритм также можно применять, хотя получаемый регулятор становится неустойчивым. В работе [240] показано, что использование неустойчивого регулятора позволяет существенно ослабить ограничения на матрицу объекта $\Phi(t)$ и, в частности, снять ограничение «нечетных чисел».

Заметим, что несмотря на существенную информацию о свойствах метода Пирагаса, полученную в последние годы проблема нахождения достаточных условий, гарантирующих применимость исходного алгоритма (61) до сих пор остается нерешенной.

В литературе приводятся сведения о применении данного метода к стабилизации когерентных мод лазеров [25, 70, 222, 223], магнитоупругих систем [147, 149], управлении моделью сердечной проводимости [79], управлению скачкообразными колебаниями [108], моделью грузопотока [179, 176], управлению преобразователем напряжения с широтно-импульсной модуляцией [67], возбуждаемым осциллятором, описываемым широко используемой в физиологии моделью Фиц Хью–Нагумо (Fitzhugh–Nagumo) [71], каталитическими реакциями в барботажных газоадсорбционных реакторах кипящего слоя [167]. Сравнение метода управления с запаздыванием в обратной связи и методов разомкнутого (программного) управления лазерами приведено в работе [137].

Недостатком закона управления (61) является его чувствительность к выбору параметров, особенно – к выбору времени запаздывания τ. Очевидно, если система T-периодическая и цель управления состоит в стабилизации вынужденного T-периодического решения, то обязательно следует выбирать $\tau = T$. Альтернативным эвристическим приемом является моделирование собственных процессов в системе при начальных условиях $x(0)$ до тех пор, пока текущее состояние $x(t)$ не приблизится к $x(s)$ при некотором $s < t$, т. е. пока не выполнится условие $\|x(t) - x(s)\| < \varepsilon$. Тогда выбор $\tau = t - s$ даст разумную оценку периода, а вектор $x(t)$ будет тем исходным состоянием, при котором начинается управление процессом. Этот подход, однако, часто приводит к завышенным значениям периода. Так как хаотические аттракторы имеют периодические решения с разными периодами, то важно найти и стабилизировать (с помощью малого управления) движение с наименьшим периодом. Эта проблема также пока остается открытой. Наконец, адаптивная оценка величины τ [171] не всегда помогает, а исследование адаптивного алгоритма [171] чрезвычайно трудно. Аналитических результатов по адаптивным алгоритмам с запаздывающей обратной связью до сих пор не получено.

4.6 Дискретные системы

Некоторые из алгоритмов дискретного времени были описаны выше в п. 4.4 при рассмотрении методов управления, основанных на отображении Пуанкаре, а также в п. 4.5 среди методов управления с запаздыванием в обратной связи. Приведенные там алгоритмы можно рассматривать как разновидности импульсных законов управления. К настоящему времени получено много общих результатов по исследованию устойчивости импульсных систем с обратной связью. Анализ их устойчивости в контексте систем с хаотической динамикой содержится в работе [286].

Несмотря на то, что многими авторами используется термин «оптимальное управление», в большинстве работ предлагаются только *локально-оптимальные* решения, основанные на минимизации по управлению u текущего значения функции потерь $Q(F_d(x_k, u), u)$, где F_d – функция в правой части модели объекта (14), а $Q(x, u)$ – заданная целевая функция. Например, в [46, 47] используется функция $Q(x, u) = ||x - x_*||^2 + \kappa||u||^2$. Выбором большого весового коэффициента $\kappa > 0$ обеспечивается выполнение требования малости управляющего воздействия. Заметим, что для больших κ локально-оптимальное управление оказывается близким к управлению по градиенту $u_{k+1} = -\gamma \nabla_u Q\big(F_d(x_k, u), u\big)$, с малым $\gamma > 0$ [127].

В большинстве работ по управлению хаосом в дискретном времени рассматриваются системы невысокого порядка. Набор примеров дискретных хаотических систем представляется даже шире, чем для систем непрерывного времени из-за наличия систем первого и второго порядков, которые не имеют непрерывных эквивалентов. (Данное утверждение следует из теоремы Пуанкаре-Бендиксона).

К распространенным примерам относятся системы, описываемые *логистическим отображением*: $x_{k+1} = ax_k(1 - x_k)$. Такие системы исследованы, в частности, в работах [100, 114, 207, 209]. Рассматривается также система Энона (5), см. [146]; *тентовое отображение* (tent map) ($x_{k+1} = rx_k,\ 0 \le x_k < 0.5; x_{k+1} = r(1 - x_k), 0.5 \le x_k \le 1$), см. [237]; *стандартное отображение* (*отображение Чирикова*) ($v_{k+1} = v_k + K \sin \varphi_k,\ \varphi_{k+1} = \varphi_k + v_k$), см. [182].

В статье [191] дан анализ поведения линейного OGY-подобного регулятора с внешней зоной нечувствительностью шириной ε и одномерным квадратичным отображением $x_{k+1} = 1 - 2(x_k + u_k)^2$ в окрестности неустойчивого состояния равновесия свободной системы $x = 0.5$. Прежде чем производится замыкание системы регулятором, объект подвергается идентификации в разомкнутом контуре под воздействием независимой случайной последовательности u_k, $(k = 1,\ 2,\ \dots\ N)$. В работе даются рекомендации по выбору параметров ε и N, основанные на требованиях устойчивости и робастности системы.

Известно лишь несколько результатов, относящихся к дискретным системам высокого порядка. Они основаны на методах градиента [46, 47, 127]; систем с переменной структурой [187]; обобщенного прогнозирующего управления [229].

4.7 Нейросетевое управление

Имеется несколько подходов к использованию нейронных сетей для управления хаотическими процессами.

Во-первых, многие работы основаны на универсальной возможности нейронных сетей управлять и предсказывать поведение нелинейных систем. Поскольку хаотические системы существенно нелинейны, потенциальная возможность нейросетевого управления такими системами не вызывает удивления. Некоторые виды универсальных нейроподобных обучаемых сетей для управления нелинейными системами предложены в работах [150, 151, 239]. Структуры нейронных сетей, предназначенных для управления и предсказания процессов в нелинейных хаотических системах, изложены в работах [61, 107, 145]. В работах [169, 245] дано сравнение нейросетевого подхода с другими методами управления. В работах [192, 284] для обучения нейронных сетей предлагается использовать *генетические алгоритмы* (genetic algorithms). Рассматривается численный пример, для которого приводятся результаты моделирования.

Во-вторых, во многих статьях описывается применение нейронных сетей для идентификации объектов управления в сочетании с каким-нибудь стандартным методом управления хаотическими системами, например – с OGY-методом [132], с пропорциональным регулятором в обратной связи [170], и т. д. зачастую идентификация проводится в замкнутом контуре в процессе нормального функционирования системы, что приводит к *адаптивным*, или *обучаемым* регуляторам. Замечено, что хаотический характер процессов в системе ускоряет процессы идентификации и обучения, поскольку он повышает разнообразие обучающей выборки [92, 226, 251]. В некоторых статьях исследуются новые, нетрадиционные, алгоритмы идентификации и управления. Например, в статье [110] предлагается новый подход к обучению (настройке весов и изменению структуры) последовательной нейронной сети, заключающийся в использовании управляющего контроллера, хаотического нейронного фильтра и ассоциативной памяти.

Третье направление изучает нейронные сети как источник хаоса и, как таковой, в качестве объектов управления. Оно связано с психологической школой Американских прагматиков (American Pragmatist), в частности, с работами Дж. Дьюи (John Dewey), а также некоторых европейских философов, например – Хайдеггера (Heidegger) и Пиаже (Piaget), которые рассматривали мозг как существенно неустойчивую и самовозбуждающую (recreating) структуру. Разумное поведение понимается тогда в соответствии с хаотическими образами, продуцируемыми в результате нейронной активности. Таким образом, анализ хаотической динамики нейронных сетей и управление ею представляет значительный интерес для психологов и физиологов, см., например, [128]. Нейронные сети, функционирующие в хаотическом режиме, используются в качестве моделей работы головного мозга по хранению информации и распознаванию образов [173, 218, 219, 250, 267]. Такие сети могут состоять не только из искусственных нейронов, но также и из других нелинейных систем с управляемым хаотическим поведением, например – химических осцилляторов [152, 160].

Основная проблема, обсуждаемая в рамках этого направления, касается выяснения того, каким образом совокупность нейронов, каждый из которых ведет себя хаотически и бессвязно, может формировать функциональные цепи, демонстрирующие устойчивое и правильное поведение. Этот вопрос исследован, как теоретически, так и экспериментально, в работах [243, 244, 242].

В ряде других статей изучается возможность управления хаосом для некоторых типов нейронных сетей [213], а также выводятся условия возникновения хаоса в нейронных сетях малой размерности [103].

4.8 Нечеткая логика

Описание неопределенности системы посредством нечетких моделей приводит к специфическим версиям алгоритмов управления.

Наиболее удобным для синтеза управления является описание в виде т. н. нечетких систем Такаги-Сугено (*Takagi–Sugeno*) (*T–S-нечетких систем*), описываемых набором нечетких правил

$$\begin{array}{l} \text{IF } \; z_1(t) \in F_{1i} \;\; \text{AND} \ldots \text{AND} \;\; z_p(t) \in F_{1p} \quad \text{THEN} \\ \dot{x} = A_i x + B_i u, \quad y = C_i x + D_i u, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \end{array} \tag{65}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – векторы состояния, входа и выхода системы, соответственно; $z_j(t)$ – переменные посылки, являющиеся функциями состояния системы, ее входных переменных $u(t)$ и, возможно, времени; F_{ji} – нечеткие множества, задаваемые функциями принадлежности F_{ji}. Матрицы A_i, B_i могут зависеть от переменных $z_j(t)$, что позволяет описывать в форме (65) нелинейные системы. Выход системы определяется путем т. н. *дефаззификации* по методу центра тяжести

$$y = \sum_{i=1}^{r} h_i(z) C_i x, \tag{66}$$

где $h_i(z) = \dfrac{\omega_i(z_i)}{\sum_{i=1}^{r} \omega_i(z_i)}$, $\omega_i(z) = \prod_{j=1}^{n} F_{ji}(z_j)$, $z = \big(z_1, z_2, \ldots, z_n\big)$. При таком представлении нелинейность «прячется» в правило дефаззификации (66), что позволяет строить нечеткие модели широкого класса динамических, в том числе хаотических систем.

Например, система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = \beta x_3 + x_1 x_2, \end{cases} \tag{67}$$

может быть представлена в виде (65), если взять $z_1 = z_2 = x_1$, $F_1(x_1) = 0.5(1 + x_1/d)$, $F_2(x_1) = 0.5(1 + x_1/d)$, где $d > 0$ – оценка размера предельного множества системы: $|x_1| \le d$; $A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -d \\ 0 & -d & -\beta \end{bmatrix}$; $A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -d \\ 0 & d & -\beta \end{bmatrix}$; $b_1 = b_2 = 0$. Алгоритмы управления для T–S-нечетких систем также естественно строить в виде системы нечетких правил

$$\begin{array}{l} \text{IF } \; z_1(t) \in F_{1i} \quad \text{AND} \ldots \text{ AND } \; z_p(t) \in F_{1p} \quad \text{THEN} \\ u = -K_i y, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \end{array} \tag{68}$$

где K_i – матрицы коэффициентов нечеткого линейного регулятора. Использование правила дефаззификации (66) приводит к представлению замкнутой нечеткой системы в виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} h_i(z) h_j(z) h_k(z) \, (A_i - B_i K_j C_k) x. \tag{69}$$

Легко видеть, что с помощью квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ для системы (69) целый ряд задач синтеза можно поставить как задачи одновременной робастной стабилизации и свести к линейным матричным неравенствам (*LMI*). Подобный подход был предложен в [266] для задач стабилизации и синхронизации хаотических систем. Он был распространен на задачи *синхронизации на основе наблюдателей* (observer-based-synchronization) и применен к системам передачи информации в [184, 185].

Другой подход к построению нечетких моделей хаотических систем основан на идентификации их параметров в сочетании со стандартными методами синтеза нелинейных систем [90]. Напротив, в работе [268] используется прямой адаптивный метод (без идентификации). Двухчастотная схема дискретного управления нечеткими непрерывными системами предложена в [164].

В ряде работ нечеткие модели нелинейных систем сочетаются с сетевой нейроподобной структурой регуляторов [98, 198].

Отметим, что во многих работах специфика хаотических систем используется не в полной мере; они служат лишь примерами неустойчивых нелинейных систем для демонстрации возможностей алгоритмов управления, работоспособных в значительно более широком классе объектов. Поэтому требование малости управления, как правило, не соблюдается.

4.9 Другие задачи и методы

В данном разделе бегло коснемся других направлений исследований по управлению хаотическими процессами. Прежде всего отметим, что из-за ограниченности объема обзора за его рамками остались такие важные направления, как синхронизация хаотических систем и управление хаосом в распределенных (пространственно-временны́х) системах. Этим направлениям посвящено большое количество работ и ряд обзоров, в том числе [75, 76, 105, 106, 155, 232]. Среди других задач и методов управления хаосом выделим следующие.

Управляемость. Несмотря на то, что свойство управляемости нелинейных систем хорошо изучено, имеется лишь небольшое число результатов по достижимости цели управления с помощью малых управляющих воздействий, см. [50, 77, 88, 120, 275]. В работе [193] дана иллюстрация тому весьма общему представлению, что чем более «неустойчива» (хаотична, турбулентна) система, тем «проще», или «дешевле» получить ее точную или приближенную управляемость.

Хаотизация. Задача хаотизации системы с помощью обратной связи, называемая также задачей «синтеза хаоса»(chaos synthesis), «генерации хаоса» (chaos generation) или «антиуправления хаосом» (anticontrol of chaos) систоит в построении алгоритма управления, обеспечивающего хаотичность поведения траекторий системы. При этом возможно задание дополнительных требований к некоторым характеристикам. Задача возникает в системах широкополосной связи, в вычислительных приложениях и т.д. и, по существу, является задачей генерации псевдослучайных чисел и процессов. Изучение способов генерации хаотических сигналов может пролить свет на механизмы биологических систем, например, механизмы сердечной и мозговой деятельности.

Задача впервые была поставлена в 1994г. А.Ванечеком и С.Целиковским [276], предложившими сценарий хаотизации для систем Лурье с монотонной нечетной нелинейностью в обратной связи. Сценарий Ванечека–Целиковского состоит в выборе полюсов $s_1, \ldots, s_n$ и нулей $z_1,\ldots,z_{n-1}$ передаточной функции линейной части так, чтобы линейная система, замкнутая обратной связью $u = ky$ обладала при всех $k : 0 < k < \infty$ следующими свойствами: частичной неустойчивостью (наличием полюсов как с положительной, так и с отрицательной вещественной частью; гиперболичностью (отсутствием полюсов на мнимой оси); диссипацией (сумма вещественных частей полюсов отрицательна) и непотенциальностью (есть полюса с ненулевой мнимой частью). Наличие хаоса устанавливается по теореме Шильникова. Для хаотизации можно также воспользоваться приближенным критерием хаотичности [134], основанным на методе гармонического баланса.

В 1999 г. К. Ванг и Г. Чен [281] предложили подход, основанный на теореме Маротто [201] – многомерном аналоге критерия хаотичности Шарковского–Ли–Йорке. Для дискретных систем вида $x_{k+1} = f(x_k) + u_k$ строится обратная связь вида $u_k = \varepsilon g(\sigma x_k)$, $\varepsilon > 0, \sigma > 0$, где функция $g(x)$ имеет график пилообразной или синусоидальной формы. Выбором достаточно большого σ устойчивое равновесие $x = 0$ делается неустойчивым, при сохранении свойства сходимости хотя бы одной траектории к точке $x = 0$ за конечное число шагов, как того требуют условия теоремы Маротто. При этом максимальное значение $|u_k|$ может быть сделано сколь угодно малым при подходящем выборе величины ε. Задача хаотизации различных дискретных и непрерывных систем интенсивно изучалась Г. Ченом с соавторами [278, 279, 280] и другими [17, 41, 181].

Другие цели управления. Среди других целей управления, задачи достижения которых рассматривались в литературе можно отметить обеспечение таких характеристик процесса как: средний период колебаний [118]; фрактальная размерность [248]; инвариантная мера [53, 77, 138]; колмогоровская энтропия [230]. В [256] был предложен метод решения задач так называемого *хаотического слежения* (tracking chaos), т. е. отслеживания нестационарной неустойчивой орбиты. Обоснование метода опирается на метод продолжения для решения нелинейных уравнений [254]. Последние результаты в этом направлении обобщены в работе [255].

Идентификация. Ряд работ посвящен задаче идентификации хаотических систем. В большинстве из них используются традиционные методы идентификации. Показано, что наличие хаоса способствует процессу оценивания параметров и улучшает его сходимость [112, 158, 205, 233, 239, 272].

Хаос в системах управления. Задачи *управления хаосом* отличаются от задач *исследования хаоса в системах управления*. Публикации, относящиеся к последней тематике появились еще в 1970-х гг. В них исследуется возможность возникновения хаотического поведения в традиционных системах управления с обратной связью: линейных [197], нелинейных [60], адаптивных [199]. Среди последних результатов отметим условия возникновения хаотических режимов в негладких системах второго порядка [52], в системах высокого порядка с гистерезисом [41], в импульсных системах с ШИМ [17], в некоторых механических системах с обратной связью [109, 140]. В работе [277] продемонстрировано, что наличие хаоса может способствовать повышению качества управления.

Заключение

Управление хаосом остается областью интенсивных исследований. Активно продолжается развитие трех исторически первых и наиболее мощных направлений: программного (вибрационного) управления; метода линеаризации отображения Пуанкаре, метода запаздывающей обратной связи. В то же время во всех трех направлениях остается много нерешенных проблем, связанных прежде всего с обоснованием методов. Применение хорошо развитых методов нелинейного и адаптивного управления требует осторожности, связанной с требованием малости управляющего воздействия. Игнорирование указанного требования может создать видимость простоты задачи. С точки зрения требования «малого управления» преимуществом обладают методы, основанные на пассивности, обеспечивающие достижение цели независимо от величины коэффициента усиления.

Интересно, что и сейчас, более чем через десять лет после возникновения области большинство работ по управлению хаосом публикуется в физических журналах. Напротив, в журналах по автоматике и управлению число публикаций невелико. Например, на 15-м Всемирном конгрессе ИФАК в Барселоне в 2002 году лишь около 10 докладов из более чем 1700 содержали слово «хаос» в названии.

Однако число прикладных задач физики и техники, где возможно применение методов управления хаосом, становится все больше и больше. Это позволяет прогнозировать рост интереса к методам управления хаосом и их дальнейшее развитие. Описанию некоторых наиболее интересных приложений будет посвящена вторая часть обзора.

Список литературы

1. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* Дестохастизация системы со странным аттрактором посредством параметрического воздействия // Вестник Моск. ун-та, сер. Физ.-астр. 1985. Т. 26. № 3. С. 40–44.

2. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* О возможности управления системой со странным аттрактором / В сб.: Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Т. VIII. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1985, С. 175–189.

3. *Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю.* Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия / ДАН, 1987, Т. 293, № 6, С. 1346–1348.

4. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления. Гл. 13, *Управление нелинейными колебательными и хаотическими системами.* СПб.: Наука, 1999.

5. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab (учебное пособие). СПб.: Наука, 2001.

6. *Безручко Б.П., Иванов Р.Н., Пономаренко В.И.* Двухуровневое управление хаосом в нелинейных осцилляторах // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 4. С. 61–67.

7. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.

8. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.

9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958.

10. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991.

11. *Воротников В.И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследования, результаты, особенности // АиТ. 1993. № 3. С. 3–62.

12. *Гузенко П.Ю.* Дискретное управление непрерывными хаотическими системами // Анализ и управление нелинейными колебательными системами. Под ред. Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 1998. С. 53–84.

13. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1998.

14. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. №10. С. 4–26.

15. *Жалнин А.Ю.* Управление хаосом в неавтономных системах с квазипериодическим возбуждением // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 16. С. 63–70.

16. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. № 5.

17. *Кипснис М.М.* Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1992. № 1, С. 108–112.

18. *Колесников А.А.* Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1987. Ч. I. N 3. С. 100–109. Ч. II. № 5. С. 58–66.

19. *Колесников А.А.* Основы теории синергетического управления. М.: Испо-Сервис, 2000.

20. *Леонов Г.А.* Частотный критерий стабилизации внешним гармоническим воздействием // АиТ. 1986. № 1. С. 169–174.

21. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1992.

22. *Леонов Г.А.* Алгоритмы линейной нестационарной стабилизации и проблема Брокетта // ПММ. 2001. Т. 65, вып. 5. С. 801–808.

23. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: СПбГУ, 2002.

24. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1978.

25. *Лойко Н.А., Науменко А.В., Туровец С.И.* Воздействие обратной связи Пирагаса на динамику лазера с модуляцией потерь // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, вып. 4 (10). С. 1516–1530.

26. *Лоскутов А.Ю, Рыбалко С.Д., Акиншин Л.Г.* Управление динамическими системами и подавление хаоса // Дифференциальные уравнения. 1998. №8. С. 1143–1144.

27. *Лоскутов А.Ю.* Проблемы нелинейной динамики. II. Подавление хаоса и управление динамическими системами // Вестник МГУ. 2001. № 2. С. 3–21.

28. *Лоскутов А.Ю.* Хаос и управление динамическими системами / В кн.: Нелинейная динамика и управление. Т. 1. Под ред. С.В.Емельянова и С.К.Коровина. М.: Физматлит. 2001. С. 163–216.

29. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений // ДАН. 1996. Т. 351. № 2. С. 175–177.

30. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неподвижных точек хаотических динамических систем // ДАН. 1997. Т. 352. № 5. С. 610–612.

31. *Магницкий Н.А.* О стабилизации неустойчивых циклов хаотических отображений // ДАН. 1997. Т. 355. № 6. С. 747–749.

32. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Управление хаосом в нелинейных динамических системах // Дифференциальные уравнения. 1998. № 11, С. 1501–1509.

33. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Стабилизация неустойчивых периодических решений в уравнениях с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2000. № 11. С. 1488–1492.

34. *Мельников В.К.* Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. Матем. Общества. 1963. Т. 12. С. 3–52.

35. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

36. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

37. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

38. *Основы математического моделирования: Учебное пособие.* 2-е изд. /Под ред. А.Л. Фрадкова. СПб.: БГТУ, 1996.

39. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. М.: Наука, 1986.

40. *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического ррегулирования и управления. М.: Наука, 1979.

41. *Постников Н.С.* Стохастность релейных систем с гистерезисом // АиТ. 1998. С. 349–358.

42. *Управление мехатронными вибрационными установками* / Под ред. И.И. Блехмана, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001.

43. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. С. 90–101.

44. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление нелинейными колебаниями / Алгоритмическое обеспечение процессов управления в механике и машиностроении: Тез. докл. М.: 1994. С. 29 – 30.

45. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Радио и связь, 1978.

46. *Abarbanel H.D.I., Korzinov L., Mees A.I. et al.* Optimal control of nonlinear systems to given orbits // Syst. Contr. Lett. 1997. V. 31. P. 263–276.

47. *Abarbanel H.D.I., Korzinov L., Mees A.I., et al.* Small force control of nonlinear systems to given orbits // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 1018–1023.

48. *Agiza H.N.* On the analysis of stability, bifurcation, chaos and chaos control of Kopel map // Chaos, Solitons Fractals. 1999. V. 10. P. 1909–1916.

49. *Aguirre L.A., Torres L.A.B.* Control of nonlinear dynamics: Where do models fit in? // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. P. 667–681.

50. *Alleyne A.* Reachability of chaotic dynamic systems // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 3751–3754.

51. *Alvarez-Gallegos J.* Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization technique // J. Dynamics and Control. 1994. №4. P. 277–298.

52. *Alvarez J., Curiel E., Verduzco F.* Complex dynamics in classical control systems // Syst. Contr. Lett. 1997. V. 31. P. 277–285.

53. *Antoniou I., Bosco F.* Probabilistic control of chaos through small perturbations // Chaos, Solitons, Fractals. 2000. V. 11. № 1–3. P. 359–371.

54. *Arecchi F.T., Boccaletti S., Ciofini M., et al.* The control of chaos: Theoretical schemes and experimental realizations // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1643–1655.

55. *Arecchi F.T., Boccaletti S.* Adaptive strategies for recognition, noise filtering, control, synchronization and targeting of chaos // Chaos. 1997. V. 7. P. 621–634.

56. *Aston P.J., Bird C.M.* Using control of chaos to refine approximations to periodic points // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. P. 227–235.

57. *Aston P.J., Bird C.M.* Analysis of the control of chaos – Extending the basin of attraction // Chaos, Solitons, Fractals. 1997. V. 8. P. 1413–1429.

58. *Babloyantz A., Krishchenko A.P., Nosov A.* Analysis and stabilization of nonlinear chaotic systems // Computers Mathematics With Applications. 1997. V. 34. P. 355–368.

59. *Badescu C.S., Ignat M., Oprisan S.* On the chaotic oscillations of Bloch walls and their control // Chaos, Solitons, Fractals. 1997. V. 8. P. 33–43.

60. *Baillieul J., Brockett R.W., Washburn R.B.* Chaotic motion in nonlinear feedback systems // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1980. V. 27. P. 990–997.

61. *Bakker R., De Korte R.J., Schouten J.C. et al.* Neural networks for prediction and control of chaotic fluidized bed hydrodynamics: A first step // Fractals. 1997. V. 5. P. 523–530.

62. *Basios V. , Bountis T., Nicolis G.* Controlling the onset of homoclinic chaos due to parametric noise // Phys. Let. A. 1999. V. 251, P. 250–258.

63. *Basso M., Genesio R., Tesi A.* Stabilizing periodic orbits of forced systems via generalized Pyragas controllers // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 1023–1027.

64. *Basso M., Genesio R., Tesi A.* Controller design for extending periodic dynamics of a chaotic CO2 laser // Systems Control Lett. 1997. V. 31. P. 287–297.

65. *Basso M., Genesio R., Giovanardi L. et al.* On optimal stabilization of periodic orbits via time delayed feedback control // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1699–1706.

66. *Basso M., Genesio R., Giovanardi L., Tesi A.* Frequency Domain Methods for Chaos Control / In: Controlling Chaos and Bifurcations in Engin. Systems / Ed. G. Chen, CRC Press. 1999. P. 179–204.

67. *Batlle C., Fossas E., Olivar G.* Stabilization of periodic orbits of the buck converter by time-delayed feedback // Int. J. Circ. Theory and Appl. 1999. V. 27. P. 617–631.

68. *Belhaq M., Houssni M.* Quasi-periodic oscillations, chaos and suppression of chaos in a nonlinear oscillator driven by parametric and external excitations // Nonlinear Dynamics. 1999. V. 18. P. 1–24.

69. *Bellman R., Bentsman J., Meerkov S.* Vibrational control of nonlinear systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1986. V. AC–31. № 8, P. 710–724.

70. *Bleich M.E., Hochheiser D., Moloney J.V. et al.* Controlling extended systems with spatially filtered, time-delayed feedback // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 2119–2126.

71. *Bleich M.E., Socolar J.E.S.* Delayed feedback control of a paced excitable oscillator // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. P. 603–609.

72. *Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H., et al.* On self–synchronization and controlled synchronization // Systems and Control Lett. 1997. V. 31. P. 299–305.

73. *Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.C., et al.* The control of chaos: theory and applications Physics Reports. 2000. V. 329. P. 103–197.

74. *Boccaletti S., Farini A., Arecchi F.T.* Adaptive strategies for recognition, control and synchronization of chaos // Chaos, Solitons Fractals. 1997. V. 8. P. 1431–1448.

75. *Boccaletti S., Bragard J., Arecchi F.T.* Controlling and synchronizing space time chaos // Phys. Rev. E. 1999, V. 59. P. 6574–6578.

76. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., et al.* The synchronization of chaotic systems // Phys. Reports. 2002. V. 366. P. 1–101.

77. *Bollt E.M.* Controlling chaos and the inverse Frobenius–Perron problem: Global stabilization of arbitrary invariant measures // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10 № 5. P. 1033–1050.

78. *Brandt M., Chen G.* Feedback control of pathological rhythms in two models of cardiac activity // Proc. 1st Int. Conf. «Control of Oscillations and Chaos» (COC'97). St.Petersburg. 1997. V. 2. P. 219 – 223.

79. *Brandt M.E., Shih H.T., Chen G.* Linear time-delay feedback control of a pathological rhythm in a cardiac conduction model // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P 1334–R1337.

80. *Braun T.* Suppression and excitation of chaos: The example of the glow discharge // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1739–1742.

81. *Cao Y.J.* A nonlinear adaptive approach to controlling chaotic oscillators // Physics Lett. A. 2000. V. 270. P. 171–176.

82. *Casas F., Grebogi C.* Control of chaotic impacts // Int. J. Bifurcation Chaos. 1997. V. 7. P. 951–955.

83. *Chacon R.* Maintenance and suppression of chaos by weak harmonic perturbations: A unified view // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 1737–1740.

84. *Chacon R.* Control of Homoclinic Chaos by Weak Periodic Perturbations. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. Singapore: World Scientific, 2002.

85. *Chanfreau P., Lyyjynen H.* Viewing the efficiency of chaos control // J. Nonlin. Math. Physics. 1999. V. 6. P. 314–331.

86. *Chau N.P.* Controlling chaos by periodic proportional pulses // Physics Lett. A. V. 234. 1997. P. 193–197.

87. *Chau N.P.* Controlling continuous chaotic dynamics by periodic proportional pulses // Phys. Rev. E. V. 57. 1998. P. 378–380.

88. *Chen G.* On some controllability conditions for chaotic dynamics control // Chaos, Solitons Fractals. 1997. V. 8. P. 1461–1470.

89. *Chen G., Dong X.* From chaos to order: Perspectives, Methodologies and Applications. Singapore: World Scientific, 1998.

90. *Chen L., Chen G., Lee Y.W.* Fuzzy modeling and adaptive control of uncertain chaotic systems // Information Sci. 1999. V. 121. P. 27–37.

91. *Chen G., Liu Z.* On the relationship between parametric variation and state feedback in chaos control // Int. J. Bifurcation Chaos. 2002. V. 12, №6. 1411–1415.

92. *Chen G., Dong X.* From chaos to order: perspectives, methodologies and applications. World Scientific, Singapore. 1998.

93. *Chen L.Q., Liu Y.Z.* A modified exact linearization control for chaotic oscillators // Nonlin. Dynamics. 1999. V. 20. P. 309–317.

94. *Chizhevsky V. N., Vilaseca R., Corbalan R.* Experimental switchings in bistability domains induced by resonant perturbations // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1777–1782.

95. *Christini D.J., In V., Spano M.L., Ditto W.L., et al.* Real-time experimental control of a system in its chaotic and nonchaotic regimes // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P 3749–3752.

96. *Christini D.J., Collins J.J.* Real-time, adaptive, model-independent control of low-dimensional chaotic and nonchaotic dynamical systems // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 1027–1030.

97. *Christini D.J., Kaplan D.T.* Adaptive estimation and control method for unstable periodic dynamics in spike trains // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 5149–5153.

98. *Chung I.F., Lin C.J., Lin C.T.* A GA-based fuzzy adaptive learning control network // Fuzzy Sets and Systems. 2000. V. 112. P. 65–84.

99. *Ciofini M., Labate A., Meucci R., et al.* Stabilization of unstable fixed points in the dynamics of a laser with feedback // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 398–402.

100. *Codreanu S., Danca M.* Suppression of chaos in a one–dimensional mapping // J. Biol. Physics, V. 23, 1997. P. 1–9.

101. *Cuomo K., Oppenheim A., Strogatz S.* Robustness and signal recovery in a synchronized chaotic system // Int. J. Bifurcation Chaos. 1993. V. 3. P. 1629 – 1638.

102. *Curran P.F., Suykens J.A.K., Chua L.O.* Absolute Stability Theory and Master-Slave Synchronization // Int. J. Bifurcation Chaos. 1997. V. 7. P. 2891–2900.

103. *Das A., Roy A.B., Das P.* Chaos in a three dimensional neural network // Applied Mathem. Modelling. 2000. V. 24. P. 511–522.

104. *Ditto W.L., Rauseo S.N., Spano M.L.* Experimental control of chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 3211–3214.

105. *Ding M.Z., Ding E.J., Ditto W.L., et al.* Control and synchronization of chaos in high dimensional systems: Review of some recent results // Chaos. 1997. V. 7. P. 644–652.

106. *Dmitriev A.S., Kassian G., Khilinsky A.* Chaotic synchronization. Information viewpoint // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. №4. 749–761.

107. *Dracopoulos D.C., Jones A.J.* Adaptive neuro-genetic control of chaos applied to the attitude control problem // Neural Computing Applications. 1997. V. 6. P. 102–115.

108. *Elmer F.J.* Controlling friction // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 4903–4906.

109. *Enikov E., Stepan G.* Microchaotic motion of digitally controlled machines // J. Vibration and Control. 1998. V. 4. P. 427–443.

110. *Eom T.D., Sugisaka M., Lee J.J.* New skill learning paradigm using various kinds of neurons // Applied Mathem. Computation. 1998. V. 91. P. 9–22.

111. *Epureanu B.I., Dowell E.H.* Optimal multi-dimensional OGY controller // Physica D. 2000. V. 139. P. 87–96.

112. *Epureanu B.I., Dowell E.H.* System identification for the Ott–Grebogi–Yorke controller design // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5327–5331.

113. *Epureanu B.I., Dowell E.H.* On the optimality of the Ott–Grebogi–Yorke control scheme // Physica D. 1998. V. 116. P. 1–7.

114. *Escalona J., Parmananda P.* Noise-aided control of chaotic dynamics in a logistic map // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 5987–5989.

115. *Fang J.Q., Hong Y.G., Qin H.S., Chen G.* Nonlinear control of chaotic systems: A switching manifold approach // Discrete Dynamics Nature Society. 2000. V. 4. P. 257–267.

116. *Femat R., Alvarez-Ramirez J., Fernandez-Anaya G.* Adaptive synchronization of high-order chaotic systems: a feedback with low-order parametrization // Physica D. 2000. V. 139. P. 231–246.

117. *Flynn C., Wilson N.* A simple method for controlling chaos // American J. Physics. 1998. V. 66. P. 730–735.

118. *Fouladi A., Valdivia J.A.* Period control of chaotic systems by optimization // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 1315–1320.

119. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999.

120. *Fradkov A., Guzenko P., Pavlov A.* Adaptive control of recurrent trajectories based on linearization of Poincare map // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. P. 621–637.

121. *Fradkov A.L.* Control of Chaos: Methods and Applications. Tutorial. / 21th IASTED Conf. «Modeling, Identification and Control» (MIC 2002). Innsbruck. 2002. http://ccslab.nm.ru.

122. *Fradkov A.L., Evans R.J.* Control of Chaos: Some Open Problems / Proc. 40th IEEE Conf. Dec. Contr. Orlando. 2001. P. 698–703.

123. *Fradkov A.L., Evans R.J.* Control of Chaos: Survey 1997–2000 / Preprints of 15th Triennial World Congress IFAC. Plenary papers, Survey papers, Milestones. Barcelona. 2002. P. 143–154.

124. *Fradkov A.L., Guzenko P.Yu.* Adaptive control of oscillatory and chaotic systems based on linearization of Poincaré map / Proc. 4th Europ. Contr. Conf. Brussels. 1997.

125. *Fradkov A.L., Leonov G.A., Nijmeier H.* Frequency–domain conditions for global synchronization of nonlinear systems driven by a multiharmonic external signal / Proc. 5th European Contr. Conf., Karlsruhe. 1999.

126. *Fradkov A.L., Pogromsky A. Yu.* Speed gradient control of chaotic continuous-time systems // *IEEE Trans. Circ. Sys.–I.* 1996. V. 43. P. 907–913.

127. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. Singapore: World Scientific, 1998.

128. *Freeman W.J., Chang H.J., Burke B.C., et al.* Taming chaos: Stabilization of aperiodic attractors by noise // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 989–996.

129. *Friedel H., Grauer R., Marliani C.* Center manifold approach to controlling chaos // Physics Lett. A. 1997. V. 236. P. 45–52.

130. *Fronzoni L., Giocondo M., Pettini M.* Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations // Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 6483–6487.

131. *Fronzoni L., Giocondo M.* Controlling chaos with parametric perturbations // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1693–1698.

132. *Funke M., Herrmann M., Der R.* Controlling low-dimensional chaos: Determination and stabilization of unstable periodic orbits by Kohonen neural nets // Int. J. Adaptive Contr. Signal Proc. 1997. V. 11. P. 489–499.

133. *Garfinkel A., Spano M., Ditto W., et al.* Controlling cardiac chaos //Science. 1992. V. 257. P. 1230 – 1235.

134. *Genesio R., Tesi A.* Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems // Autom. 1992. V. 28. № 3. P. 531–548.

135. *Giona M.* Functional reconstruction of oscillating reaction: prediction and control of chaotic kinetics // Chem. Engr. Sci. 1992. V. 47. P. 2469–2474.

136. *Giovanardi L., Basso M., Genesio R., et al.* Lower bounds for the stability degree of periodic solutions in forced nonlinear systems // Int. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. P. 639–653.

137. *Glorieux P.* Control of chaos in lasers by feedback and nonfeedback methods // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1749–1758.

138. *Gora P., Boyarsky A.* A new approach to controlling chaotic systems // Physica D. 1998. V. 111. № 1–4. P. 1–15.

139. *Grassi G., Mascolo S.* Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 1011–1014.

140. *Gray G.L., Mazzoleni A.P., Campbell D.R.* Analytical criterion for chaotic dynamics in flexible satellites with nonlinear controller damping // J. Guidance Contr. Dynamics. 1998. V. 21. P. 558–565.

141. *Grebogi C., Lai Y.C., Hayes S.* Control and applications of chaos // Int. J. Bifurcation Chaos. 1997. V. 7. P. 2175–2197.

142. *Grebogi C., Lai Y.C., Hayes S.* Control and applications of chaos // J. Franklin Inst. 1997. V. 334B. P. 1115–1146.

143. *Grebogi C., Lai Y.C.* Controlling chaos in high dimensions // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1997. V. 44. P. 971–975.

144. *Grebogi C., Lai Y.C.* Controlling chaotic dynamical systems // Syst. Contr. Lett. 1997. V. 31. № 3. P. 307–312.

145. *Greenwood D.P.A., Carrasco R.A.* Neural networks for the adaptive control of disruptive nonlinear network traffic // IEE Proc.–Communications. 2000. V. 147. P. 285–291.

146. *Guzenko P.Yu, Fradkov A.L.* Gradient control of Hénon map dynamics // Int. J. Bifurcation Chaos. 1997. V. 7. № 3. P. 701–705.

147. *Hai W.H., Duan Y.W., Pan L.X.* An analytical study for controlling unstable periodic motion in magneto–elastic chaos // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 198–204.

148. *Hasler M.* Synchronization of chaotic systems and transmission of information // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. №4. P. 647 – 660.

149. *Hikihara T., Touno M., Kawagoshi T.* Experimental stabilization of unstable periodic orbit in magneto-elastic chaos by delayed feedback control // Int. J. Bifurcation Chaos. 1997. V. 7. P. 2837–2846.

150. *Hirasawa K., Murata J., Hu J.L., et al.* Chaos control on universal learning networks // IEEE Trans. Systems Man Cybern. C – Applic. Reviews. 2000. V. 30. P. 95–104.

151. *Hirasawa K., Wang X.F., Murata J., et al.* Universal learning network and its application to chaos control // Neural Netw. 2000. V. 13. P. 239–253.

152. *Hohmann W., Kraus M., Schneider F.W.* Recognition in excitable chemical reactor networks. Experiments and model-simulations // J. Phys. Chem. A. 1997. V. 101. P. 7364–7370.

153. *Holzhuter T., Klinker T.* Control of a chaotic relay system using the OGY method // Zeitschrift Fur Naturforschung Section AMA J. Phys. Sci. 1998. V. 53. P. 1029–1036.

154. *Hsu R.R, Su H.T, Chern J.L., et al.* Conditions to control chaotic dynamics by weak periodic perturbation // Phys. Rev. Let. 1997. V. 78. P. 2936–2939.

155. *Hu G., Xiao J.H., Yang J.Z., et al.* Synchronization of spatiotemporal chaos and its applications // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 2738–2746.

156. *Hu H.Y.* An adaptive control scheme for recovering periodic motion of chaotic systems // J. Sound Vibration. 1997. V. 199. P. 269–274.

157. *Hubler A., Lusher E.* Resonant stimulation and control of nonlinear oscillators // Naturwissenschaft. 1989. V. 76. P. 67–72.

158. *Huijberts H., Nijmeijer H., Willems R.* System identification in communication with chaotic systems // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. V. 47. 2000. № 6. P. 800–808.

159. *Hunt E.R.* Stabilizing high-period orbits in a chaotic system – the diode resonator // Phys. Rev. Lett. V. 67. 1991. P. 1953–1955.

160. *Ishii, S, Sato, M* Associative memory based on parametrically coupled chaotic elements // Physica D. 1998. V. 121. P. 344–366.

161. *Isidori A., Bars R., Dion J.-M., et al.* IFAC 2002 Milestone report on design methods / Prep. 15th Triennial World Congress IFAC. Plenary papers, Survey papers, Milestones. Barcelona. 2002. P. 207–212.

162. *Jackson E.A.* The OPCL control method for entrainment, model-resonance, and migration actions on multiple-attractor systems // Chaos. 1997. V. 7. P. 550–559.

163. *Jackson E.A., Grosu I.* An OPCL control of complex dynamic systems // Physica D. 1995. V. 85. P. 1–9.

164. *Joo Y.H., Shieh L.S., Chen G.* Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling digital control of chaotic systems // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1999. V. 7. P. 394–408.

165. *Just W., Bernard T., Ostheimer M., Reibold E., Benner H.* Mechanism of time-delayed feedback control // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 203–206.

166. *Just W., Reibold E., Benner H., et al.* Limits of time-delayed feedback control // Phys. Lett. A. 1999. V. 254. P. 158–164.

167. *Kaart S., Schouten J.C., van den Bleek C.M.* Improving conversion and selectivity of catalytic reactions in bubbling gas-solid fluidized bed reactors by control of the nonlinear bubble dynamics // Catalysis Today. 1999. V. 48. P. 185–194.

168. *Khalil H.* Nonlinear Systems. Prentice Hall, New Jersey, 1996.

169. *Kim S.H., Lee C.M.* Nonlinear prediction of manufacturing systems through explicit and implicit data mining // Computers Industr. Engin. 1997. V. 33. P. 461–464.

170. *Kiss I.Z., Gaspar V.* Controlling chaos with artificial neural network: Numerical studies and experiments // J. Phys. Chem. A. 2000. V. 104. P. 8033–8037.

171. *Kittel A., Parisi J., Pyragas K.* Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time // Phys. Lett. A. 1995. V. 198. P. 433.

172. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovich P.* Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley, 1995.

173. *Klotz A., Brauer K.* A small-size neural network for computing with strange attractors // Neural Netw. 1999. V. 12. P. 601–607.

174. *Konishi K., Kokame H., Hirata K.* Decentralized delayed-feedback control of a coupled ring map lattice // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 2000. V. 47. P. 1100–1102.

175. *Konishi K., Kokame H., Hirata K.* Delayed-feedback control of spatial bifurcations and chaos in open-flow models // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 384–388.

176. *Konishi K., Kokame H., Hirata K.* Decentralized delayed-feedback control of an optimal velocity traffic model // European Phys. J. B. 2000. V. 15. P. 715–722.

177. *Konishi K., Hirai M., Kokame H.* Decentralized delayed-feedback control of a coupled map model for open flow // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 3055–3059.

178. *Konishi K., Hirai M., Kokame H.* Sliding mode control for a class of chaotic systems // Phys. Lett. A. 1998. V. 245. P. 511–517.

179. *Konishi K., Kokame H., Hirata K.* Coupled map car-following model and its delayed-feedback control // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 4000–4007.

180. *Konishi K., Kokame H.* Observer-based delayed-feedback control for discrete-time chaotic systems // Phys. Lett. A. 1998. V. 248. P. 359–368.

181. *Kousaka T., Ueta T., Kawakami H.* A method for generating a chaotic attractor by destabilization // Electronics and Commun. Japan. Part III. 1997. V. 80. P. 73–81.

182. *Kwon O.J.* Targeting and stabilizing chaotic trajectories in the standard map // Phys. Lett. A. 1999. V. 258. P. 229–236.

183. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V. B.* Frequency Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications, World Scientific, Singapore, 1996.

184. *Lian K.-Y., Chiu Ch.-S., Chiang T-Sh., et al.* LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 2001. V. 9. № 4. P. 539–553.

185. *Lian K.-Y., Chiu Ch.-S., Chiang T-Sh., et al.* Secure communications of chaotic systems with robust performance via fuzzy observer-based design // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 2001. V. 9. № 1. P. 212–220.

186. *Liao T.L.* Observer-based approach for controlling chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 1604–1610.

187. *Liao T.L., Huang N.S.* Control and synchronization of discrete-time chaotic systems via variable structure control technique // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 262–268.

188. *Liao T.L., Lin S.H.* Adaptive control and synchronization of Lorenz systems // J. The Franklin Inst. – Engin. Applied Mathem. 1999. V. 336. P. 925–937.

189. *Lima R., Pettini M.* Suppression of chaos by resonant parametric perturbations // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 726–733.

190. *Lima R., Pettini. M.* Parametric resonant control of chaos // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. 1675–1684.

191. *Lim E., Mareels I.M.Y.* Identification of a 1-dimensional chaotic system: Expectations and limitations for control / Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Contr. 2000. P. 4823–4824.

192. *Lin C.T., Jou C.P.* Controlling chaos by GA-based reinforcement learning neural network // IEEE Trans. Neural Netw. 1999. V. 10. P. 846–859.

193. *Lions J.L.* On the controllability of distributed systems / Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1997. V. 94. № 10. P. 4828–4835.

194. *Li T., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.

195. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmosferic Sci. 1963. V. 20. № 2. P. 130–141. (В кн.: Странные аттракторы: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. С. 88–116).

196. *Loria A., Panteley E., Nijmeijer H.* Control of the chaotic Duffing equation with uncertainty in all parameters // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1998. V. 45. P. 1252–1255.

197. *Mackey M.C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. V. 197. P. 287–280.

198. *Maguire L.P., Roche B., McGinnity T.M., et al.* Predicting a chaotic time series using a fuzzy neural network // Information Sci. 1998. V. 112. P. 125–136.

199. *Mareels I.M.Y., Bitmead R.R.* Non-linear dynamics in adaptive control: chaotic and periodic stabilization // Autom. *I*: 1986. V. 22. P. 641–655; *II*: 1988. V. 24. P. 485–497.

200. *Markov A.Yu., Fradkov A.L.* Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification // IEEE Trans. Circ. Syst. 1997. №11. P. 905 – 912.

201. *Marotto F.R.* Snap-back repellers imply chaos in $\mathbb{R}^n$. // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 63. P. 199–223.

202. *Mascolo S., Grassi G.* Controlling chaos via backstepping design // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 6166–6169.

203. *Mascolo S., Grassi G.* Controlling chaotic dynamics using backstepping design with application to the Lorenz system and Chua's circuit // Int. J. Bifurcation Chaos. 1999. V. 9. P. 1425–1434.

204. *Matsumoto K., Tsyda I.* Noise induced order // J. Stat. Phys. 1983. V. 31. P. 87–106.

205. *Maybhate A., Amritkar R.E.* Dynamic algorithm for parameter estimation and its applications // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 6461–6470.

206. *Maybhate A., Amritkar R.E.* Use of synchronization and adaptive control in parameter estimation from a time series // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. P. 284–293.

207. *McGuire J., Batchelor M.T., Davies B.* Linear and optimal non-linear control of one-dimensional maps // Phys. Lett. A. 1997. V. 233. P. 361–364.

208. *Meerkov S.M.* Principle of vibrational control: theory and applications // IEEE Trans. Aut. Contr. 1980. V. AC-25. P. 755–762.

209. *Melby P., Kaidel J., Weber N., et al.* Adaptation to the edge of chaos in the self-adjusting logistic map // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5991–5993.

210. *Mettin R.* Control of chaotic maps by optimized periodic inputs // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. P. 1707–1711.

211. *Meucci R., Labate A., Ciofini M.* Controlling chaos by negative feedback of subharmonic components // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 2829–2834.

212. *Mirus K.A., Sprott J.C.* Controlling chaos in a high dimensional system with periodic parametric perturbations // Phys. Let. A. 1999. V. 254. 275–278.

213. *Mizutani S., Sano T., Uchiyama T., et al.* Controlling chaos in chaotic neural networks // Electronics Communications Japan. Part III. 1998. V. 81. P. 73–82.

214. *Moon F.* Chaotic and Fractal Dynamics. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. Wiley & Sons. 1992.

215. *Morgul O.* On the control of chaotic systems in Lur'e form by using dither // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. 1999. V. 46. P. 1301–1305.

216. *Morgul O.* On the control of some chaotic systems by using dither // Phys. Let. A. 1999. V. 262. P. 144–151.

217. *Morgul O., Solak E.* On the synchronization of chaotic systems by using state observers // Int. J. Bifurcation Chaos. 1997. V. 7. P. 1307–1322.

218. Nakagawa M. Chaos associative memory with a periodic activation function // J. Of The Phys. Society Of Japan, V.67, 1998, 2281-2293.

219. Nakagawa M. A chaos associative model with a sinusoidal activation function // Chaos Solitons Fractals, V. 10, 1999, 1437–1452.

220. *Nakajima H.* On analytical properties of delayed feedback control of chaos // Phys. Lett. A, V. 232, 1997. P. 207–210.

221. *Nakajima H., Ueda Y.* Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries // Phys. Rev. E, V. 58, 1998, P. 1757–1763.

222. *Naumenko A.V., Loiko N.A., Turovets S.I., et al.* Bias current impulsive feedback control of nonlinear dynamics in external cavity laser diodes // Electronics Lett. , V. 34, 1998, P. 181–182.

223. *Naumenko A.V., Loiko N.A., Turovets S.I., et al.* Chaos control in external cavity laser diodes using electronic impulsive delayed feedback // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 8, 1998, P. 1791–1799.

224. *Nijmeijer H., Mareels I.M.Y.* An observer looks at synchronization // IEEE Trans. Circ. Syst. I, V. 44, 1997. P. 882–890.

225. *Obradovic D., Lenz H.* When is OGY control more than just pole placement // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 7, 1997. P. 691–699.

226. *Okada T., Nakagawa M.* A study of back propagation learning with periodic chaos neurons // Chaos Solitons Fractals, V. 10, 1999, P. 77–97.

227. *Okuno H., Sakata T., Takeda H.* Controlling chaos of nonlinear domain–wall motion // J. Appl. Physics, V. 85, 1999, P. 5083–5085.

228. *Ott, E., Grebogi C., Yorke J.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett., V. 64 (11), 1990, P. 1196–1199.

229. *Park K.S., Park J.B., Choi Y.H., et al.* Generalized predictive control of discrete–time chaotic systems // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 8, 1998, P. 1591–1597.

230. *Park J., Kim J., Cho S.H., Han K.H., et al.* Development of sorbent manufacturing technology by agitation fluidized bed granulator // Korean J. Chem. Eng. V. 16 1999,No 5, P. 659–663.

231. *Pecora L., Caroll T.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821 – 824.

232. *Pecora L.M., Carroll T.L., Johnson G.A., et al.* Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications // Chaos. 1997. V. 7 №4. P. 520–543.

233. *Petrick M.H., Wigdorowitz B.* A priori nonlinear model structure selection for system identification // Control Eng. Practice, V. 5, 1997. P. 1053–1062.

234. *Pettini M.* Controlling chaos through parametric excitations / Dynamics and Stochastic Processes, Eds. Lima R., Streit L., and Vilela–Mendes, R.V. Springer-Verlag, N.Y., 1988. P. 242–250.

235. *Pisarchik A.N., Corbalan R.* Parametric nonfeedback resonance in period doubling systems // Phys. Rev. E, V. 59, 1999, P. 1669–1674.

236. *Piskun N.Y., Wigen P.E.* Bifurcation to chaos in auto-oscillations in circular yttrium-ion-garnet films // J. Appl. Phys., V. 85, 1999, P. 4521–4523.

237. *Place C.M., Arrowsmith D.K.* Control of transient chaos in tent maps near crisis // Phys. Rev. E, V. 61, 2000. I: P. 1357–1368, II: P. 1369–1381.

238. *Pogromsky A.Yu.* Passivity based design of synchronizing systems // Int. J. Bifurcation Chaos. 1998. V. 8. №2. P. 295 – 320.

239. *Poznyak A.S., Yu W., Sanchez E.N.* Identification and control of unknown chaotic systems via dynamic neural networks // IEEE Trans. Circ. Syst. I, V. 46, 1999, P. 1491–1495.

240. *Pyragas K.* Control of chaos via an unstable delayed feedback controler // Phys. Rev. Lett. V. 86, 2001, P. 2265–2268.

241. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A., V. 170, 1992, P. 421–428.

242. *Rabinovich M.I., Varona P., Abarbanel H.D.I.* Nonlinear cooperative dynamics of living neurons // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 10, 2000. P. 913–933.

243. *Rabinovich M.I., Abarbanel H.D.I., et al.* Self-regularization of chaos in neural systems: Experimental and theoretical results // IEEE Trans. Circ. Syst. I, V. 44, 1997. P. 997–1005.

244. *Rabinovich M.I., Varona P., Torres J.J., et al.* Slow dynamics and regularization phenomena in ensembles of chaotic neurons // Physica A, V. 263, 1999, P. 405–414.

245. *Rajasekar S.* Characterization and control of chaotic dynamics in a nerve conduction model equation // Pramana–journal of Physics, V. 48, 1997. P. 249–258.

246. *Ramaswamy R., Sinha S., Gupte N.* Targeting chaos through adaptive control // Phys. Rev. E, V. 57, 1998, R2507–R2510.

247. *Ramesh M., Narayanan S.* Chaos control by nonfeedback methods in the presence of noise // Chaos, Solitons Fractals, V. 10, 1999, P. 1473–1489.

248. *Ravindra B., Hagedorn P.* Invariants of chaotic attractor in a nonlinearly damped system // J. Applied Mechanics – Trans. ASME, V. 65, 1998, P. 875–879.

249. *Ritz T., Schweinsberg A.S.Z., Dressler U., et al.* Chaos control with adjustable control times // Chaos, Solitons Fractals, V. 8, 1997. P. 1559–1576.

250. Rouabhi S. Storage of information in one-dimensional piecewise-continuous maps // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 10, 2000. 1127–1137.

251. *Roy A., Govil S., Miranda R.* A neural-network learning theory and a polynomial time RBF algorithm // IEEE Trans. Neural Netw.V. 8, 1997. P. 1301–1313.

252. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence. //Comm. Math. Physics. 1971. V. 20, N 2. P. 167–192. (В кн.: Странные аттракторы: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. С. 116–151).

253. *Schuster H.G., Stemmler M.B.* Control of chaos by oscillating feedback // Phys. Rev. E, V. 56, 1997. P. 6410–6417.

254. *Schwartz I.B., Carr T.W., Triandaf I.* Tracking controlled chaos: Theoretical foundations and applications // Chaos. V. 7, 1997. P. 664–679.

255. *Schwartz I.B., Triandaf I.* Tracking sustained chaos // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 10 2000. P. 571–578.

256. *Schwartz I.B., Triandaf I.* Tracking unstable orbits in experiments: A new continuation method // Phys. Rev. A, 46, P. 7439–7444, 1992.

257. *Schweinsberg A.S.Z., Ritz T., Dressler U., et al.* Quasicontinuous control of a bronze ribbon experiment using time-delay coordinates // Phys. Rev. E, V. 55, 1997. P. 2145–2158.

258. *Senesac L.R., Blass W.E., Chin G., et al.* Controlling chaotic systems with occasional proportional feedback // Review of Scientific Instruments, V. 70, 1999, P. 1719–1724.

259. *Simmendinger C., Hess O., Wunderlin A.* Analytical treatment of delayed feedback control // Phys. Lett. A, V. 245, 1998, P. 253–258.

260. *Singer J., Y.Z. Wang, H.H. Bau* Controlling a chaotic system // *Phys. Rev. Lett.*, V. 66, 1991, P. 1123–1125.

261. *Sinha S.* Controlling chaos in biology // Current Science, V. 73, 1997. P. 977–983.

262. *Socolar J.E.S., Sukow D.W. Gauthier D.J.* Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems // *Phy. Rev. E.*, 50, P. 3245–3248, 1994.

263. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc. 52, 1–10; On induced stability, Phil. Mag. 15, 1908, P. 233–236.

264. *Suykens J.A.K., Vandewalle J., Chua L.O.* Nonlinear H-infinity synchronization of chaotic Lur'e systems // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 7, 1997. P. 1323–1335.

265. *Suykens J.A.K., Yang T., Chua L.O.* Impulsive synchronization of chaotic Lur'e systems by measurement feedback // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 8, 1998, P. 1371–1381.

266. *Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O.* A unified approach to controlling chaos via arm LMI-based fuzzy control system design // IEEE Trans. Circ. Syst. I, V. 45, 1998, P. 1021–1040.

267. Tanaka T., Nakagawa M. A chaos association model with a time-dependent periodic activation function // Electronics And Communications In Japan Part III – Fundamental Electronic Science, V. 81, 1998, 52–70.

268. *Tang Y.Z., Zhang N.Y., Li Y.D.* Stable fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems // Fuzzy Sets and Systems, V. 104, 1999, P. 279–288.

269. *Tereshko V. , Shchekinova E.* Resonant control of the Rössler system // Phys. Rev. E, V. 58 (1) 1998, P. 423–426.

270. *Tian Y.C., Tade M.O., Tang J.Y.* Nonlinear open-plus-closed-loop (NOPCL) control of dynamic systems // Chaos Solitons Fractals, V. 11, 2000. P. 1029–1035.

271. *Tian Y.P.* Controlling chaos using invariant manifolds // Int. J. Control, V. 72, 1999, P. 258–266.

272. *Tian Y.C., Gao F.R.* Adaptive control of chaotic continuous-time systems with delay // Physica D, V. 117, 1998, P. 1–12.

273. *Townley S., Ilchmann A., Weiss M.G., et al.* Existence and learning of oscillations in recurrent neural networks // IEEE Trans. Neural Netw.V. 11, 2000. P. 205–214.

274. *Ushio T.* Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems // *IEEE Trans. Circ. Sys., I*, 43, P. 815–816, 1996.

275. *Van de Vorst E.L.B., Kant A.R., Van de Molengraft M.J.G., et al.* Stabilization of periodic solutions of nonlinear mechanical systems: Controllability and stability // J. Vibration Contr., V.4, 1998, 277-296.

276. *Vanecek A., Celikovsky S.* Chaos synthesis via root locus // IEEE Trans. Circ. Syst. I, V. 41, 1994, P. 59–60.

277. *Vincent T.L.* Control using chaos // IEEE Contr. Syst. Magazine, V. 17, 1997. P. 65–76.

278. *Wang X.F., Chen G.* Chaotifying a stable LTI system by tiny feedback control // IEEE Trans. Circ. Syst.–I. V. 47. 2000. P. 410–415.

279. *Wang X.F., Chen G.* Chaotifying a stable map via smooth small-amplitude high-frequency feedback control // Int. J. Circuit Theory Applic. V. 28. 2000.

280. *Wang X.F., Chen G.* Chaotification via arbitrarily small feedback controls: Theory, methods, and applications // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 10. 2000. 549–570.

281. *Wang X.F., Chen G.* On feedback anticontrol of discrete chaos // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 9. 1999. P. 1435–1441.

282. *Wang J., Wang, X.* Parametric adaptive control in nonlinear dynamical systems // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 8. 1998. P. 2215–2223.

283. *Wang J., Wang X.H.* A global control of polynomial chaotic systems // Int. J. Control. V. 72: № 10. 1999. P. 911–918.

284. *Weeks E.R., Burgess J.M.* Evolving artificial neural networks to control chaotic systems // Phys. Rev. E, V. 56, 1997. P. 1531–1540.

285. *Yang T., Yang C.M., Yang L.B.* A detailed study of adaptive control of chaotic systems with unknown parameters // Dynamics and Control, V. 8, 1998, P. 255–267.

286. *Yang T., Chua L.O.* Control of chaos using sampled-data feedback control // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 8, 1998, P. 2433–2438.

287. *Yau H.T., Chen C.K., Chen C.L.* Sliding mode control of chaotic systems with uncertainties // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 10, 2000. P. 1139–1147.

288. *Yu X.H.* Controlling chaos using input-output linearization approach // Int. J. Bifurcation Chaos. V. 7, 1997. P. 1659–1664.

289. *Yu X.H.* Variable structure control approach for controlling chaos // Chaos, Solitons, Fractals. V. 8, 1997. P. 1577–1586.

290. *Zames G., Shneydor N.A.* Dither in nonlinear systems // IEEE Trans. Autom. Contr., V. 21, 1976, P. 660–667.

291. *Zeng Y.M., Singh S.N.* Adaptive control of chaos in Lorenz system // Dynamics and Control, V. 7, 1997. P. 143–154.

292. *Zhao H., Wang Y.H., Zhang Z.B.* Extended pole placement technique and its applications for targeting unstable periodic orbit // Phys. Rev. E, V. 57, 1998, P. 5358–5365.