ДИССИПАТИВНЫЕ И ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ: АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

А. К. Абрамян, С. А. Вакуленко
Институт Проблем Машиноведения РАН Санкт -Петербург

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы рассматриваем проблему хаотического поведения для диссипативных и гамильтоновых систем, описываемых системами связанных осцилляторов и системами нелинейных уравнений в частных производных.

Наша цель - описать физические и механические модели, где наблюдается возникновение различных типов структурно -устойчивого периодического и хаотического поведения и образование пространственно-временных структур. Мы описываем, каким образом это поведение зависит от параметров системы. Развитый подход чисто аналитический и результаты, даже в принципе, не могут быть получены с помощью компьютеров.

План статьи таков. Сначала мы излагаем физическую идею нашего подхода. Затем мы даем примеры фундаментальных диссипативных систем с хаотическим поведением, построенные в работах [1][2]. Отметим, что эти результаты являются аналитическими и не используют компьютерных расчетов.

Основные новые результаты статьи изложены в двух последних частях работы. Они описывают пример гамильтоновой системы с разнообразным и сложным поведением. Мы надеемся, что в последуюших работах другие более фундаментальные и простые примеры. Наша основная гипотеза состоит в том, что бесконечномерные гамильтоновы системы, близкие к вполне интегрируемым, должны демонстрировать, в некотором смысле, "неограниченно сложное"конечномерное гамильтоново поведение, в зависимости от их параметров (также как диссипативные системы, найденные в [1][2], могут иметь "неограниченно сложное"дисспативное поведение). Такое поведение является результатом взаимодействия локализованных мод. Чтобы закончить это краткое введение, отметим, что упомянутые здесь понятия "сложности", "неограниченной сложности"и хаоса, разумеется, требуют строгих математических формулировок, которые будут даны ниже.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ХАОСА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

Диссипативные динамические системы, такие, как системы реакция - диффузия и системы связанных осцилляторов, описывают много интересных и важных эффектов в физике, химии и биологии (см., например, [3],[4],[5]). Однако явное аналитическое описание решений таких систем, как правило, отсутствует. Имеется ряд результатов, которые показывают, что при определенных условиях существует так называемый глобальный аттрактор и его фрактальная или хаусдорфова размерность конечна.

Напомним некоторые определения этих основных понятий, которые будут использованы в дальнейшем [6],[7],[8],[9]. Динамическая система в банаховом пространстве H есть полугруппа S^t операторов, действующих из H в H. Многие уравнения математической физики определяют полугруппы, при подходящем выборе H [6][7]. Динамическая система называется диссипативной, если существует ограниченное множество $B \subset H$, такое, что любая траектория $S^t u,\ u \in H$ в конце концов входит в B и остается в нем: $S^t u \in B$ для $t > T_0(B, u)$. Такое множество называется поглощающим. Множество A называется притягивающим, с бассейном притяжения $\mathcal{B}(A)$, если для любой окрестности $V(A)$ образ $S^t B_0$ любого ограниченного множества, лежащего в $\mathcal{B}$: $B_0 \subset \mathcal{B}$, входит в эту окрестность на достаточно больших временах: $S^t B_0 \subset V(A)$ для $t > T_0(B_0, V(A))$. Множество глобально притягивающее, если его бассейн притяжения настолько широк, что совпадает со всем пространством H. Множество I называется инвариантным, если полупоток S^t оставляет его на месте: $S^t I = I,\ t \geq 0$. Далее, возможны различные определения аттрактора. Определения, полностью удовлетворительного как с физической, так и с математической точки зрения, пока, по-видимому, не существует [10]. Мы будем использовать следующее определение так называемого глобального аттрактора, которое наиболее употребительно в работах по математической физике: множество $A \subset H$ есть глобальный аттрактор полугруппы S^t в H, если оно есть наименьшее замкнутое инвариантное глобально притягивающее множество.

Итак, аттрактор, в некотором смысле, определяет поведение системы на больших временах t. Существование аттрактора удается доказать для широкого класса диссипативных систем. Благодаря инвариантности, мы можем сузить полугруппу S^t на аттрактор A и получить редуцированную динамику $S^t|_A$. К несчастью, в большинстве случаев аттрактор негладкое множество, и даже не финитное обьединение гладких подмногобразий. Следовательно, динамика S^t, суженная на аттрактор, не описывается, вообще говоря, системой дифференциальных уравнений.

В некоторых случаях удается найти глобальное притягивающее инвариантное множество $M \subset H$, которое является гладким многообразием. Оно получило название инерциальной поверхности [9]. Такая поверхность не есть минимальное притягивающее множество, хотя и аттрактор, и даже любое инвариантное множество обязаны лежать в M. Зато редуцированная динамика $S^t|M$, суженная на M, может быть определена с помощью системы дифференциальных уравнений. Эта редуцированная динамика получила название инерциальной динамики.

Отметим физическую интерпретацию этой динамики. Даже в бесконечномерной системе, если она диссипативна, может существовать конечное число "тайных мод", определяющих поведение системы при $t \to \infty$. В большинстве случаев такие переменные, конечно, не могут быть найдены явно. В данной статье мы приведем примеры, когда это возможно.

Понятие инвариантной поверхности имеет смысл и для гамильтоновых систем. В частности, $n-$ солитонное решение уравнения КдВ является примером инвариантной поверхности. Дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию параметров солитона, дают пример редуцированной динамики.

Исследование структуры глобального аттрактора или инерциальной динамики возможно только при существенных ограничениях на исследуемую динамическую систему. Аттрактор и поведение траекторий на больших временах описаны для систем, обладающих функцией Ляпунова (градиентноподобных) и так называемых строго монотонных систем ([6],[7],[8],[9],[11],[12]). Приведем два важных для дальнейшего примера. Первый пример дан знаменитой основополагащей моделью Хопфилда [13] теории нейронных сетей:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} K_{ij} th(x_j) - x_i + \theta_i, \tag{2.1}$$

где x_i - состояние i -го нейрона, N -число нейронов, K_{ij} - матрица связей, описываюшая действие j-го нейрона на i -ый и θ_i - параметры, называемые порогами ("threshold"). Совокупость параметров K, N, θ будем обозначать $\mathcal{P}$.

Если матрица K симметрична, эта система -градиентно подобна, то есть существует функция $L(x)$ состояния $x = (x_1, ..., x_N)$ системы, которая не возрастает на траекториях (2.1). Имеем: $dL/dt \leq 0$, причем равенство верно тогда и только тогда, когда x точка равновесия x_{eq} (правая часть (2.1) ноль для всех i при $x = x_{eq}$). В случае "общего положения"аттрактор (2.1) может быть описан. Все траектории $x(t)$ стремятся к равновесиям $x(t) \rightarrow x_{eq}$ при $t \rightarrow \infty$. Число равновесий возрастает, вообще говоря, с ростом числа нейронов N. Отметим, что L имеет физический смысл энергии системы и наиболее существенный вклад в L имеет вид $\sum_{ij} K_{ij} th(x_i) th(x_j)$.

(Напомним, что означают слова "в случае общего положения". Для каждого N, множество параметров K, θ, для которых вышеприведенное описание поведения траекторий (2.1) может оказаться не верным, имеет меру ноль в пространстве параметров. Это можно показать с помощью теоремы Сарда).

Другой пример - это динамические системы, порожденные начально-краевыми задачами для параболических уравнений второго порядка, например:

$$u_t = \epsilon^2 \Delta u + f(x, u, \nabla u) \quad u(x,0) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{2.2}$$

где $f \in C^2$. Такая задача порождает динамическую систему в банаховом пространстве $L_p(\Omega)$, выбор p зависит от f и n. Если решения априори ограничены в какой -либо слабой норме, то классические результаты показывают [6], что эта система диссипативна и обладает конечномерным глобальным аттратором. Если f не зависит от ∇u, или пространственная размерность задачи n равна 1, тогда система (2.2) градиентно -подобна и, следовательно, к ней относится все сказанное выше о системе Хопфилда (все траектории конвергентны для случая общего положения [7][12]). Если f зависит от ∇u и $n > 1$, то система принадлежит классу строго монотонных систем и можно утверждать, что *почти* все траектории конвергентны, то есть сходятся к равновесиям $u_{eq}(x)$. Число таких равновесий и "сложность"(размерность) аттрактора растет при уменьшении ϵ. Для этого случая возможны хаотические режимы, однако они реализуемы для уравнений очень специального вида и специальных начальных данных (детали см. в [11], [12]).

Из этих примеров мы видим, что для того, чтобы получить "сложное"поведение, устойчивое по отношению к малому возмущению системы, необходимо рассматривать нейронные сети (2.1) с несимметричными матрицами K и по крайней мере двухкомпонентные системы уравнений типа (2.2). Отметим, что в реальных биологических сетях матрицы K не симметричны и действительно наблюдаются периодические и хаотические колебания

$x_i(t)$ [14].

Метод, позволяющий построить примеры диссипативных систем со сложным поведением, существенно использует идеи структурной устойчивости (грубости) и получил название метода реализации векторных полей [11].

Рассмотрим абстрактное эволюционное уравнение в гильбертовом (банаховом) пространстве H:

$$\frac{dw}{dt} = Aw + F(w, \mathcal{P}), \quad w \in H, \tag{2.3}$$

где A -отрицательно определенный самосопряженный (возможно, неограниченный) оператор, нелинейный оператор F подчинен некоторым условиям, гарантирующим существование полугруппы S^t и $\mathcal{P}$ - параметры, от которых зависит F. Учитывая наличие параметра, можно сказать, что (2.3) определяет семейство полугрупп $S^t_{\mathcal{P}}$. Относительно параметра предполагаем, что он может иметь функциональную природу, то есть также может принадлежать другому банаховом пространству B_p.

Наряду с (2.3) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = Q(p), \quad Q \in C^1(\mathcal{B}^n) \tag{2.4}$$

где $\mathcal{B}^n$ -единичный шар в пространстве R^n. Если при $|p| = 1$ векторное поле Q направлено внутрь сферы $\partial\mathcal{B}^n$, уравнения (2.4) определяют динамическую систему в шаре.

Следуя работам [2],[11],[12], сформулируем следующее определение:

Определение. Мы скажем, что предписанная динамика (2.4) может быть *почти реализована* системой (2.3), если для любого положительного числа δ можно выбрать параметры $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n, Q, \delta)$ так, что

B1 Существует инерциальная поверхность $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \subset H$, имеющая вид

$$w = W_{\mathcal{P}}(p), \tag{2.5}$$

где $p \to W_{\mathcal{P}}(p)$ есть некоторое C^1 отображение из шара $\mathcal{B}^n$ в H;

B2 на этой поверхности редуцированная динамика $S^t_{\mathcal{P}}|_{\mathcal{M}_{\mathcal{P}}}$ определена уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = \tilde{Q}(p, \mathcal{P}), \quad \tilde{Q} \in C^1(\mathcal{B}^n) \tag{2.6}$$

и выполнена оценка

$$|Q - \tilde{Q}|_{C^1(\mathcal{B}^n)} < \delta. \tag{2.7}$$

Определение 2. Мы скажем, что семейство полугрупп (2.3) зависящее от параметра, *реализует все*, и обладает максимальной динамической сложностью, если каждая динамика (2.4) для каждой размерности n может быть почти реализована этим семейством полугрупп.

Другими словами, можно сказать, что с помощью параметров $\mathcal{P}$, динамика (2.6) на $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ может быть определена с произвольной точностью .

Отметим некоторые следствия. Если система (2.3) реализует все, то можно показать, что, в некотором смысле, ее динамика неограниченно сложна. Именно, с точностью до гомеоморфизма, все классы топологически эквивалентных структурно устойчивых аттракторов могут быть реализованы такими системами. Напомним, что структурная устойчивость системы (2.4) означает, что для достаточно малых δ, δ -малое в норме C^1 возмущение правой части системы (2.4) не меняет топологической структуры ее траекторий

[10]. Это влечет, что аттрактор A_δ возмущенной системы (2.4) топологически эквивалентен исходному аттрактору A системы (2.4). Следовательно, аттрактор (2.3) лежит на инерциальной поверхности и динамика на нем топологически эквивалентна динамике (2.4) в A.

Итак, системы, реализующие все, генерируют все топологические классы структурно устойчивых динамик. В этом смысле можно сказать, что эти системы обладают максимальной динамической сложностью. Более того, мы имеем возможность управлять этой динамикой с помощью параметров системы.

Отметим, что такой поход в какой -то мере позволяет избавиться от трудности, связанной с существованием в литературе большого числа определений хаоса. Независимо от используемого определения, если хаос структурно устойчив (а это, как хорошо известно, вполне возможно [10]), данный топологический тип хаоса возникает в нашей системе.

3. НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ХОПФИЛДА - СИСТЕМА С ДИНАМИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ МАКСИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Оказывается, что модель Хопфилда (2.1) - простейший пример системы, которая реализует все [2]. Сначала заметим, что система (2.1) действительно диссипативна. В качестве поглощающего множества можно взять $||x|| < R$, где R зависит от параметров $\mathcal{P} = (N, K, \theta)$.

Чтобы показать, что (2.1) реализует все, фиксируем некоторое произвольное n из (2.4). Покажем, что (2.1) генерирует все n-мерные динамики (2.4). Сделаем подстановку $K_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is} B_{sj}$, где $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ - новые неизвестные матрицы и $\mathbf{A}$ выбрана так, что $A_{is} = \delta_{is}$ при $i \leq n$. Эта подстановка позволяет ввести "тайные"переменные q_i, определяющие динамику на больших временах. Чтобы показать это, сделаем замену $x \to (q, z)$, где $q_i = x_i, \quad i = 1, 2...n, \quad z_i = q_i - \sum_s A_{is} q_s, \ i = n+1, ...N$. Тогда после простых подсчетов имеем [2]

$$\frac{dz_i}{dt} = -z_i + \theta_i, \quad \frac{dq}{dt} = \Phi_{\mathcal{P}}(q, z), \quad q = (q_1, ..., q_n) \tag{3.1}$$

где индекс $\mathcal{P}$ указывает на зависимость векторного поля Φ от параметров $\mathbf{A}, \mathbf{B}, N, \theta$. Первое уравнение показывает, что инерциальная поверхность дана соотношениями $z_i = \theta_i$. Тогда инерциальная динамика определена вторым уравнением, куда надо подставить $z = \theta$. Удается показать [2], что n -мерные векторные поля $\Phi_{\mathcal{P}}(q, \theta)$ на шаре $\mathcal{B}^n$ всюду плотны в множестве всех C^1 -гладких векторных полей на этом шаре. Это и доказывает, что система Хопфилда реализует все. Детали см. [2].

4. СИСТЕМА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАКСИМАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТЬЮ

Рассмотрим в двумерном прямоугольнике $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ следующую начально -краевую задачу

$$u_t = \Delta u + w(x) u + f_0(x, y) + f_1(x, y) v, \quad u(x, y, 0) = u^0(x, y) \tag{4.1}$$

$$v_t = \Delta v - a^2 v + g(x,y)thu, \quad v(x,y,0) = v^0(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}(x,y,t) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \tag{4.3}$$

где функции f_i, g и w лежат в $C^2(\Omega)$, $a > 0$. Параметрами задачи будум считать эти коэффициенты: $\mathcal{P} = (f_i, g, w, a)$.

Можно показать, что задача (4.1) -(4.3) корректно поставлена и определяет диссипативную полугруппу [2] S^t в пространствах Соболева. Системы такого типа могут возникать в теории образования структур и фазовых переходов.

Основной результат здесь таков: эта диссипативная система имеет инерциальную поверхность, инерциальную динамику и "реализует все "[2].

Для дальнейшего распространения подхода на гамильтоновы системы важно обсудить физические идеи, лежащие в основе конструкции этой системы. (Детальное доказательство может быть обнаружено в [2]). Мы выбираем параметры задачи (4.1)-(4.3) так, чтобы инерциальная динамика описывалась бы явно и сводилась бы к системе Хопфилда.

Основная идея состоит во введении вспомогательного малого параметра ϵ и выборе специального потенциала $w = W(x,\epsilon)$ такого, что оператор $L_\epsilon u = \Delta u + Wu$ будет иметь N хорошо локализованных потенциальных ям и соответственно, почти собственных функций $\psi_i(x - x_i, \epsilon)$. Эти функции локализованы около точек x_i: $\psi_i(x - x_i, \epsilon) < C \exp(-c\epsilon^{-1}|x - x_i|)$ и удовлетворяют соотношению $A_\epsilon \psi_i = h_\epsilon$, где $h_\epsilon < C \exp(-c\epsilon^{-1}|x - x_i|)$. Собственные функции A_ϵ ортогональные всем ψ_i имеют собственные числа, отделенные интервалом $O(1)$ от мнимой оси.

Структура решения такова. Если коэффициенты g и f_i малы, порядка $O(\epsilon^\kappa)$ с некоторым показателем $\kappa > 0$, тогда для малых ϵ, имеем:

$$u = \sum_{i=1}^{m} q_i(t)\psi_i(x,\epsilon) + \tilde{u} = U(x, q(t), \epsilon) + \tilde{u}, \tag{4.4}$$

где $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, $\tilde{u}$ - малая поправка, $||\tilde{u}|| < c\epsilon^{\kappa_1}$, $\kappa_1 > 0$. Функция v есть $V + \tilde{v}$, где $V(x,y,q)$ решение краевой задачи

$$\Delta V - a^2 V + g(x,y,\epsilon)\Phi(U(x,q,\epsilon)) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0, \tag{4.5}$$

и $\tilde{v}$ - малая поправка, $||\tilde{v}|| < c\epsilon^{\kappa_2}$, $\kappa_2 > 0$.

Далее, для $q_i(t)$ имеем систему уравнений вида

$$\frac{dq_i}{dt} = \langle f_0 + f_1 v, \psi_i \rangle, \tag{4.6}$$

где $\langle f, g \rangle$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Оказывается, что если выбрать коэффициенты f_i и g в виде хорошо локализованных гауссовских пиков, тогда система (4.6), с точностью до малых поправок, сводится к уравнениям Хопфилда (2.1) [2].

Эта математическая конструкция имеет простую физическую интерпретацию. Построенное решение описывает медленную временную эволюцию амплитуд $q_i(t)$ локализованных мод. Взаимодействие между этими модами возникает следующим образом. Член $g\Phi(u)$ задает малые локализованные неоднородности в нелинейной среде. Эти неоднородности приводят к взаимодействию локализованных мод ψ_i через промежуточное поле v. Такое взаимодействие является сильно нелокальным, таким же, как взаимодействие нейронов в сети Хопфилда.

Отметим замечательное особое свойство наших систем (2.1) и (4.1)-(4.3) : мы можем предписывать топологическую структуру их динамики с помощью их параметров.

5. УСЛОЖНЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ МОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

5.1 Общие идеи подхода

Центральный вопрос, на который мы собираемся ответить в последующей части статьи, таков: существуют ли бесконечномерные гамильтоновы системы с сложной гамильтоновой динамикой, управляемой параметрами системы ?

Напомним, что многие классические уравнения математической физики (КдВ, НУШ и др.) могут быть рассмотрены как бесконечномерные гамильтоновы системы. Сейчас (как в конечномерном, так и бесконечномерном случаях) развита, в основном, теория систем, близких к интегрируемым.

Наш план состоит в рассмотрении слабовозмущенных интегрируемых бесконечномерных гамильтоновых систем. Тогда можно ожидать что динамика локализованных мод, например, солитонов, или линейных мод, в первом приближении должна быть определена некоторыми редуцированными гамильтонианами с конечным числом степеней свободы.

В этой статье мы собираемся предъявить простейшую систему типа слабо нелинейной струны, в которой, в зависимости от выбора малого возмущения и коэффициентов, редуцированный гамильтониан имеет вид:

$$H(p,q) = \sum_{j=1}^{m} p_j^2 + \omega^2 q_j^2 + \epsilon \tilde{H}(q), \tag{5.1}$$

где p, q - сопряженные переменные, $q = (q_1, ..., q_m)$, $\tilde{H}(q)$ - полином по q_i.

Данный гамильтониан описывает динамику слабого взаимодействия локализованных мод на большом интервале времени $O(\epsilon^{-1})$. Малый параметр ϵ характеризует величину нелинейного возмущения в струне.

В последние десятилетия системы типа (5.1) интенсивно исследовались. Теория Колмогорова -Арнольда -Мозера (КАМ -теория) пзволяет описать поведение решений. Для конечного числа степеней свободы $m > 1$ здесь исследованы нетривиальные эффекты, в частности, гомоклинические траектории, расщепление сепаратрис, диффузия Арнольда, образование стохастической паутины [15]. Считается, что они ведут к хаосу.

Наша цель - доказать, что в динамике нелинейной струны может возникать широкий класс возмущенных гамильтонианов вида (5.1). Именно, в зависимости от параметров струны, здесь возникают все возможные полиномиальные возмущения $\tilde{H}(q)$ следующего вида :

$$\tilde{H}(q) = \sum_{n=3}^{p} \sum_{\mathbf{i}} C_{i_1, i_2, ..., i_n, n} q_{i_1} q_{i_2} ... q_{i_n} \tag{5.2}$$

где во внутренней сумме $\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..i_n)$ - мультииндекс, такой, что $i_1 \leq i_2 .... \leq i_n$.

Это означает, что можно изменять гамильтонову динамику взаимодействия локализованных мод в весьма широком диапозоне, изменяя параметры системы (в качестве параметров здесь выступают W_δ и $F(x,u)$, см. формулу (5.3) ниже). Такое свойство данного класса гамильтоновых систем мы предлагаем для как аналог свойства максимальной сложности динамики для диссипативных систем. Отметим, что существенные результаты о сложном поведении решений для возмущенного КдВ были получены еще в [16], однако рассмотренные там возмущения были диссипативными, и задавались сложными нелокальными функционалами. В отличие от упомянутой работы, мы рассматриваем гамильтоновы системы с полиномиальными нелинейностями.

5.2 Модель.

Рассмотрим следующую модель струны с дефектами, линейными и нелинейными:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + W_\delta(x) u = \epsilon F(x,u), \tag{5.3}$$

где $x \in \mathbf{R}$, потенциал $W_\delta(x) \in C^\infty$ зависит от второго малого параметра δ. Построение W_δ дано ниже.

Члены $W_\delta u$ и F описывают линейные и нелинейные дефекты в струне, $F(x,u)$ - полином по u с быстро убывающими по x коэффициентами, не содержащий линейных членов: $F(x,u) = O(u^2)$ при $u \to 0$. Система (5.3) гамильтонова, с бесконечным числом степеней свободы.

Сперва мы опишем асимптотику (при фиксированном малом δ и $\epsilon \to 0$) решений (5.3). Отметим, что гиперболические нелинейные уравнения хорошо изучены (см. обзор в [17]).

5.3 Построение решения.

Обозначим через L оператор Шредингера

$$Lu = -c^2 u_{xx} + W_\delta(x) u. \tag{5.4}$$

Предположим, что функция $W_\delta - \delta^{-2}$ из класса Шварца $S(\mathbf{R})$. Предположим, кроме того, что этот оператор имеет конечное число локализованных "главных "собственных функций $\Psi_i(x) \in L_2(\mathbf{R})$, где $i = 1, 2, ...N$, с собственными значениями $\omega_i^2 = O(1) > 0$, в то время как весь остальной спектр (дискретный и непрерывный) лежит в интервале $(c\delta^{-2}, \infty)$, где $c > 0$ и не зависит от δ при малых δ. Мы можем предположить, не ограничивая общности, что Ψ_j ортонормальны. При $x \to \infty$ функции Ψ_i экспоненциально убывают по x как $\exp(-\kappa_i |x|)$, где $c^2\kappa_i^2 = \delta^{-2} - \omega_i^2$.

Такой потенциал с заданными $\omega_1, ...\omega_N$ легко построить, представляя W_δ в виде суммы хорошо разделенных потенциальных ям. По существу, эта же идея использована и в [2]. Простой пример сингулярного потенциала с похожими свойствами возникает в механике [18].

Для построения W_δ рассмотрим сначала потенциал $W(x)$, такой, что $W - 1 \in S(\mathbf{R})$, имеющий минимум при $x = 0$. Можно построить этот не зависящий от δ потенциал W таким образом, что соответствующий оператор L будет иметь наименьшее собственное значение 0 и весь остальной спектр в $(2\lambda_1, \infty)$, $\lambda_1 > 0$. Далее, можно добавить к W малое возмущение $O(\delta^2)$ из класса Шварца, такое, что оператор L будет иметь наименьшее собственное значение $\delta^2\omega^2$ и весь остальной спектр в (λ_1, ∞). Полученный так W обозначим $\tilde{W}_\omega$. После этого берем произвольные точки $x_1, x_2, ..., x_N$ и строим W_δ в окрестности каждой точки как $\delta^{-2}\tilde{W}_{\omega_i}((x - x_i)/\delta)$. Склеиваем полученные потенциалы так, чтобы получить, с точностью до $O(\exp(-cd\delta^{-1}))$, постоянный потенциал для x, таких, что $\min_i |x-x_i| > d > 0$ [2]. Можно показать, что тогда при достаточно малом δ мы имеем оператор L с описанными выше свойствами.

Решение (5.3) для малых $\epsilon << \delta$ будем искать в виде

$$u(x,t) = U_0(x, q(t)) + \epsilon \tilde{u}(x,t), \tag{5.5}$$

где

$$U_0(x,q) = \sum_{j=1}^{N} q_j \Psi_j(x), \tag{5.6}$$

есть вклад главных локализованных мод, с амплитудами q_j, и $\tilde{u}$ есть поправка, такая, что

$$\mathbf{P}\tilde{u} = 0. \tag{5.7}$$

Здесь $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{P}_j$ есть ортогольная проекция на "главный"дискретный спектр, операторы $\mathbf{P}_j$ определены с помощью $\mathbf{P}_j u = \langle u, \Psi_j \rangle \Psi_j$. Пусть $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$. Тогда этот оператор есть проектор на ортогональное дополнение к Ψ_j. Подставляя (5.5) в (5.3) и действуя на обе части получившегося уравнения проекторами $\mathbf{P}_j$ и $\mathbf{Q}$, мы имеем следующую систему

$$\frac{d^2 q_j}{dt^2} + \omega_j^2 q_j = \langle F(x, U_0(x,q) + \tilde{u}), \Psi_j \rangle, \quad j = 1, 2, ..N, \tag{5.8}$$

$$\tilde{u}_{tt} + L\tilde{u} = \mathbf{Q} F(x, U_0(x, q(t)) + \tilde{u}). \tag{5.9}$$

Первый шаг в решении системы (5.8)-(5.9) состоит в исключении $\tilde{u}$ из (5.8) на большом интервале времени длиной порядка ϵ^{-1}. Это, как показано ниже, может быть сделано строго.

Для описания решений второго уравнения этой системы введем банахово пространство B_s функций $u(x),\ x \in \mathbf{R}$ с ограниченной нормой

$$|u|_s = \max \{ \sup_{k \in \mathbf{R}} (1+|k|)^s |\hat{u}_k|,\ \max_l |\hat{u}_l| \}, \tag{5.10}$$

где $\hat{u}_k,\ \hat{u}_l$ - коэффициенты Фурье разложения $\tilde{u}$ по собственной функциям оператора L. Здесь индекс l пробегает некоторое дискретное множество, соответствующее дискретным собственным функциям, не входящим в набор выделенных выше главных мод Ψ_j. Параметр k пробегает вещественную ось $(-\infty, \infty)$ и соответствует функциям непрерывного спектра. В качестве фазового пространство для задачи (5.8)-(5.9) выберем пространство $H_{s,T}$, состоящее из пар непрерывных по t функций $(q(t), \tilde{u}(t))$, где $t \in [0,T]$, $\tilde{u}(t) \in B_s$, и $\mathbf{Q}\tilde{u} = 0$, с нормой

$$||(q,u)||_s = \sup_{t \in [0,T]} |\tilde{u}(t)|_s + \sup_{t \in [0,T]} |q(t)|. \tag{5.11}$$

Предложение 5.1. При достаточно малом T существует ограниченное в норме $C^{2,2}$ классическое решение системы (5.8)-(5.9).

Доказательство. Запишем систему (5.8)-(5.9) в виде интегральных уравнений для коэффициентов Фурье. Например, для $\hat{u}_k$ имеем

$$\hat{u}_k(t) = b_k \cos(\omega(k)t + \beta_k) + \epsilon \omega^{-1}(k) \int_0^t \sin(\omega(k)(t-t_1))\ \hat{\tilde{F}}_k(t_1) dt_1, \quad \omega^2(k) = \delta^{-2} + c^2 k^2, \tag{5.12}$$

где b_k определены начальными данными, $\tilde{F} = \mathbf{Q}F$. Нетрудно показать, что пространство B_s с нормой $| \, |_s$ при $s > 5$ образует Банахову алгебру относительно умножения и что оно вложено в $C^2(\mathbf{R})$. Поскольку B_s - алгебра, мы имеем, используя наши предположения на F, следующую оценку коэффициентов Фурье

$$| \hat{\tilde{F}_k}(t_1)| < C_s(1+|k|)^{-s}(|\hat{F_0}_k(t_1) + P(|\tilde{u}|_s)), \tag{5.13}$$

где $F_0 = \mathbf{Q}F(x, U_0(q))$, $P(z)$ - полином, такой, что $P = O(z)$ при $z \to 0$. Аналогичная оценка имеется для $\tilde{u}_l$ (без множителя $(1+|k|)^{-s}$). Берем теперь достаточно большое R и показываем, с помощью (5.13), что для малых T интегральный оператор K, определенный правой частью (5.12), сжимающий и отображает шар радиуса R в $H_{s,T}$ в себя. Следовательно, обобщенное решение $(q, \tilde{u}) = K(q, \tilde{u})$ существует. (Оно удовлетворяет интегральному уравнению по времени вместо дифференциального). В действительности $t \to q(t) \in C^2$, и отображение $t \to \tilde{u}(t) \in B_s$ также дважды дифференцируемо по времени. Можно показать, с помощью теорем вложения, что эти временные производные лежат в C^2 при $s > 5$. Итак, классическое решение нашей задачи существует на достаточно малом интервале времени.

5.4 Вывод упрощенных гамильтоновых уравнений для q_j.

Наши предположения о разделении спектра L на главные моды и спектр, отделенный от мнимой оси, играют решающую роль в доказательстве следующего утверждения.

Предложение 5.2. При достаточно малом ϵ и $|\tilde{u}(\cdot,0)|_s, |\tilde{u}_t(\cdot,0)|_s < c\epsilon$ на временах $0 < t < c\epsilon^{-1}$ имеет место оценка

$$\sup_x |\tilde{u}(x,t)| \leq C_s|\tilde{u}(\cdot,t)|_s < C(F,s,W_\delta)\epsilon. \tag{5.14}$$

Доказательство. Первое неравенство (5.14)- это простая теорема вложения. Далее, обозначим $X(t) = |\tilde{u}(\cdot,t)|_s$. Действуя как в предыдущем предложении, можно показать, что существует открытый интервал $I = (0, T_0)$ такой, что $|X(t)| \leq 1$ для $t \in I$. Следовательно, на интервале I

$$| \hat{\tilde{F}_k}(t) - \hat{F_0}_k(t))| < \tilde{C}_s(1+|k|)^{-s}X(t), \tag{5.15}$$

где $F_0 = \mathbf{Q}F(x, U_0(q(t)))$. Основная проблема - это оценка членов

$$S_k = \omega^{-1}(k)\int_0^t \sin(\omega(k)(t-t_1))\hat{F_0}_k(t_1)dt_1. \tag{5.16}$$

Прежде всего, в уравнениях (5.8) для q_j перейдем к координатам действие -угол J_j, ϕ_j. Положим

$$q_j = J^{1/2}(t)cos(\omega_j t + \phi_j(t)), \quad p_j = \omega_j J^{1/2}(t)cos(\omega_j t + \phi_j(t)). \tag{5.17}$$

Тогда имеем

$$\frac{dJ_j^{1/2}}{dt} = c_j\epsilon F_j \sin(\omega_j t + \phi_j(t)), \quad \frac{d\phi_j}{dt} = \tilde{c}_j J_j^{-1/2}\epsilon F_j \cos(\omega_j t + \phi_j(t)), \tag{5.18}$$

где $F_j = \langle F, \Psi_j \rangle$ и следовательно

$$|F_j| < c_2 \sup_x |F_0(x, U_0(x,q))| + c_3|X| < c_4(\sup_x |F_0(x, U_0(x,q))| + 1). \tag{5.19}$$

на интервале I. Эта оценка показывает, что $F_0(x,t)$ имеет следующий вид:

$$F_0(x,t) = \sum_n f_n(x) P_n(t,\tau), \quad \tau = \epsilon t, \tag{5.20}$$

где каждое f_n из класса Шварца и P_n - полином по $\cos\omega_j t, \sin\omega_j t$ с коэффициентами, зависящими от медленного времени τ. Используем теперь наши предположения о виде спектра оператора L для оценки интеграла (5.16) по t_1 от F_0. Если δ мало и

$$T_0 < c_5 \epsilon^{-1}, \tag{5.21}$$

этот интеграл допускает оценку $O(1)$ (при $\epsilon \to 0$). Следовательно, при $t \in [0, \min\{T_0, c_5\epsilon^{-1}\}]$ имеем

$$X(t) \le \epsilon C_F + \epsilon C_1 \int_0^t X(t_1) dt_1, \tag{5.22}$$

для положительной функции $X(t)$. Это интегральное неравенство немедленно дает

$$X(t) \le \epsilon \tilde{C}_F < 1, \tag{5.23}$$

при $t \in [0, \min\{T_0, c_5\epsilon^{-1}\}]$. Оценка (5.23) показывает, при малых ϵ, что на самом деле $T_0 = c_5\epsilon^{-1}$. Это завершает доказательство.

Полученный выше результат позволяет при $t = O(\epsilon^{-1})$ положить $\tilde{u} = 0$ в (5.8). Тогда, вводя потенциал $\Phi(x,u)$ с помощью соотношения $\Phi_u(x,u) = F(x,u)$, и полагая

$$\tilde{H}_F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, U_0(x,q)) dx, \tag{5.24}$$

мы видим, что уравнения (5.8) имеют гамильтонову структуру с гамильтонианом вида (5.1).

5.5 Конструкция нелинейной струны с предписанной гамильтоновой динамикой.

Предложение. Если частоты ω_i "в общем положении", то тогда имеет место следующее. Каково бы ни было полиномиальное возмущение $\tilde{H}(q)$ вида (5.2), найдется такое полиномиальное по u возмущение F в (5.3), что $\tilde{H}_F(q)$, определенное по (5.24), равно предписанному:

$$\tilde{H}_F(q) = \tilde{H}(q).$$

Доказательство основано на специальном выборе $\Phi = \sum_{n=0}^{p} f_n(x) u^{n+2}$. Положим

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} Y_{kn} \delta_1 \rho\left(\frac{x - \bar{x}_{kn}}{\delta_1}\right), \tag{5.25}$$

где $\rho(z)$ - положительная гладкая функция с носителем в $(-1,1)$, интеграл от которой равен 1, δ_1 -малый параметр, Y_{kn}- неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Число M_n равно числу мультииндексов $\mathbf{i}$ длины n (см. формулу (5.2)). Точки $\bar{x}_{kn} > 0$ выберем так, чтобы можно было бы заменить собственную функцию Ψ_j на ее экспоненциальную асимптотику. Заметим теперь, что

$$C_{i_1,i_2,\ldots i_n} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \Psi_{i_1}(x) \Psi_{i_2}(x) \ldots \Psi_{i_n}(x) dx.$$

Следовательно, мы замечаем, что коэффициенты Y_{kn} могут быть определены, для каждого n, из линейной алгебраической системы M_n уравнений относительно M_n неизвестных Y_{kn}. При нашем выборе $\bar{x}_{kn}$ и малом δ_1 эти системы, с точностью до малых поправок, принимают вид

$$\sum_{k}^{M_n} \exp(-\theta_{\mathbf{i}}) Y_{kn} = B_{\mathbf{i},n} \tag{5.26}$$

где, как в (5.2), сумма берется по M_n мультииндексам длины n, правые части $B_{\mathbf{i},n}$ пропорциональны данным $C_{\mathbf{i},n}$ и показатели $\theta_{\mathbf{i}}$ определены соотношениями

$$c^2 \theta_{\mathbf{i}}^2 = \sum_{k=1}^{n} \delta^{-2} - \omega_{i_k}^2. \tag{5.27}$$

Согласно классическим идеям КАМ теории, все $\theta_{\mathbf{i}}$ различны для различных мультииндексов $\mathbf{i}$, если частоты ω_{i_k} "в общем положении". (Напомним, что $i_1 \le i_2 ... \le i_n$). Эти частоты могут быть выбраны как угодно за счет выбора W_δ.

Но тогда определитель системы (5.26) - это определитель Ван дер Монда и он не равен нулю. Это показывает возможность нахождения Y_{kn} и заканчивает доказательство.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что как в диссипативных, так и консервативных нелинейных распределенных системах, взаимодействие между локализованными модами может быть очень сложным. Подбирая соответсвующим образом неоднородность среды, можно получить любую структурно -устойчивую динамику в случае диссипативных систем и любой полиномиальный гамильтониан - в консервативном случае. Итак, для некоторых классов нелинейных распределенных систем (как гамильтоновых, так и диссипативных) их динамика может быть неограниченно сложной и, кроме того, контролируемой параметрами системы.

Работа поддержана РФФИ, грант No. 99-01-00694.

Список литературы

[1] S. A. Vakulenko, Annales de L'Institut H. Poincarè Physique Théorique 1997. V. 66, p. 373.
[2] S. A. Vakulenko, Advances in Differential Equations 2000, V. 5, p.1739
[3] G. Nicolis and I. Prigogine, " Self-Organization in Non-Equilibrium Systems". New-York: Wiley, 1977.
[4] H. Haken, " Synergetic, An Introduction", 3rd ed. Berlin, Heidelberg, New -York: Springer, 1983.
[5] Y. Kuramoto, " Chemical oscillations, waves and turbulence'.' Berlin: Springer, 1984.
[6] Ладыженская О. А. Успехи Мат. Наук, 1987, т.42, вып. 6, С. 25.
[7] J. K. Hale, " Asymptotic behavior of dissipative systems". Providence: American Mathematical Society, 1988.
[8] A. B. Babin and M. I. Vishik, J. Math. Pures Appl. 1983, V. 62 (1983), p. 441.
[9] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, " Integrable manifolds and inertial manifolds for dissipative differential equations ". New-York : Springer 1989.
[10] Ю. Ильяшенко, Вейгу Ли, Нелокальные бифуркации, Москва: МЦНМО: ЧеРо, 1999.
[11] P. Poláčik, J. Diff. Equations. 1995 V. 119, p. 24.
[12] E. N. Dancer and P. Poláčik, Memoirs of Amer. Math. Society. 1999. V. 140, N668.
[13] J. J. Hopfield, *Proc. of Natl. Acad. USA* 1982. V. 79, p. 2554.
[14] Edwards R., Mathematical Methods in the Applied Sciences 1996, V. 19 (1996) p. 651.
[15] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников, Успехи физ. наук, 1988 т. 156, вып. 2, С. 193.
[16] Н. В. Николенко, Успехи Мат. Наук 1980. т. 35, С.121.
[17] J. Bourgain, in "Hyperbolic equations and frequency interactions", eds. L. Caffarelli, Weinan E, IAS/PARC City Mat. Series, V5, American Math. Society, Inst. for Adv. Studies, 1999.
[18] A. K. Abramyan, J. of Technical Acoustic 1995. V.2, N3, p.5.