

УДК 532.59:534.1

О. В. Мотыгин

## Об оценках частот локализованных мод колебаний жидкости в присутствии погруженных тел

Рассматривается задача об установившихся колебаниях неограниченной жидкости со свободной поверхностью в присутствии системы погруженных горизонтальных цилиндрических тел произвольного сечения. Задача описывает взаимодействие тел с волнами, распространяющимися под произвольным углом к образующей системы тел, а также колебания жидкости в канале с вертикальными стенками. Известно, что единственность решения задачи эквивалентна отсутствию локализованных невынужденных мод колебаний. Для нахождения оценок частот, соответствующих локализованным модам, развивается критерий единственности, предложенный ранее [1]. Получены оценки частот, расположенных как на непрерывном спектре задачи, так и вне его. Приведены результаты вычислений и дано сравнение с существующими оценками.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача об установившихся колебаниях идеальной несжимаемой тяжелой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью в присутствии полностью погруженных цилиндрических тел произвольного сечения. Предполагается, что движение жидкости — безвихревое, гармоническое по времени с частотой  $\omega$ . Используется линейное приближение теории поверхностных волн. При этом граничные условия отнесены на невозмущенную свободную поверхность.

Будем рассматривать две ситуации: а) жидкость не ограничена в горизонтальных направлениях и образующая системы цилиндрических тел  $z$  составляет произвольный ненулевой угол  $\theta$  с направлением распространения поверхностных волн; б) жидкость заключена в канале с вертикальными стенками, ортогональными образующей системы цилиндрических тел. Обозначения введены на фиг. 1, где показано сечение плоскостью, ортогональной образующей цилиндров:  $W$  — занятая жидкостью область,  $S$  — смоченная поверхность тел,  $F$  — свободная поверхность  $y = 0$ ,  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль.

Рассмотрим сначала случай неограниченной в горизонтальных направлениях жидкости. Предполагается, что движение жидкости периодическое по переменной  $z$ , тогда оно описывается потенциалом скоростей  $\text{Re}\{u(x, y)e^{\pm ikz}e^{-i\omega t}\}$ , где  $k = \nu \sin \theta$  — проекция волнового вектора на ось  $z$ ,  $\nu = \omega^2/g$  — волновое число,  $g$  — ускорение свободного падения. Потенциал  $u$  удовлетворяет следующей краевой задаче:

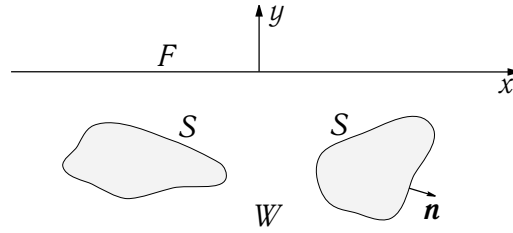
$$(\nabla^2 - k^2)u = 0 \quad \text{в } W \quad (1.1)$$

$$\partial_y u - \nu u = 0 \quad \text{на } F \quad (1.2)$$

$$\partial_n u = f \quad \text{на } S \quad (1.3)$$

$$|\nabla u| = O(|x + iy|^M) \quad \text{при } |x + iy| \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

(здесь и далее  $\partial_a = \partial/\partial a$ ). Условие (1.4) должно выполняться равномерно по  $\text{arg}(x + iy)$  для некоторого  $M > 0$ . Функция  $f$  в условии (1.3) определяется типом задачи (радиационная или дифракционная). Для описания процесса излучения или рассеяния волн, задача (1.1)–(1.4) должна



Фиг. 1

быть дополнена условиями, определяющими вид волнового движения на бесконечности

$$\int_{W \cap \{|x|=r\}} |\partial_{|x|} u - i\ell u|^2 dy = o(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty; \quad \ell = \sqrt{\nu^2 - k^2} \quad (1.5)$$

Случай  $\nu = k$  (прохождение волны вдоль образующей цилиндров) должен быть исключен из рассмотрения (см. [2]).

Данная задача также описывает колебания жидкости в канале бесконечной глубины с вертикальными стенками  $z = \pm b$ , когда образующая системы цилиндрических тел ортогональна стенкам. В этом случае движение жидкости описывается потенциалом скоростей  $\text{Re}\{u(x, y)e^{-i\omega t}\} \times \cos kz$ , где  $kb = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), или потенциалом  $\text{Re}\{u(x, y)e^{-i\omega t}\} \sin kz$ , где  $kb = (2n-1)\pi/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) (при этом на стенках выполняется условие  $\partial_n u = 0$ ). В отличие от безграничной в горизонтальных направлениях жидкости, в данном случае возможно сочетание параметров  $\nu < k$ .

В [3] (с. 815, 822) для любого потенциала, удовлетворяющего уравнению (1.1) и условию (1.2) вне некоторого полукруга с центром на свободной поверхности, а также подчиненного условию (1.4), было получено разложение на бесконечности в виде линейной комбинации регулярных волновых решений  $e^{\nu y} \sin \ell x$ ,  $e^{\nu y} \cos \ell x$ , источника (см. (2.1)), горизонтального диполя и ряда, состоящего из безволновых решений (см. (2.7), где  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ). В случае  $\nu < k$  потенциалы источника и диполя убывают на бесконечности, а волновое слагаемое отсутствует. Тем самым, при  $\nu < k$  решение задачи (1.1)–(1.4) имеет на бесконечности оценку  $O(|x + iy|^{-n})$  для любого  $n > 0$ .

Известно (см., например, [4], § 2.2.1), что для решений однородной задачи ( $f = 0$ ) при  $\nu > k$  функционал энергии ограничен:

$$\int_W (|\nabla u|^2 + k^2 |u|^2) dx dy < \infty \quad (1.6)$$

Тем самым, единственность решения неоднородной задачи (1.1)–(1.5) при  $\nu > k$  и задачи (1.1)–(1.4) при  $\nu < k$  равносильна отсутствию решений задачи (1.1)–(1.3), (1.6) при  $f = 0$ . Без потери общности можно полагать, что решение однородной задачи — вещественный потенциал.

Однородную задачу (1.1)–(1.3), (1.6) ( $f = 0$ ) можно рассматривать как задачу о нахождении точечного спектра, где  $\nu$  — собственное значение, а  $u$  — собственная функция, или, иными словами, локализованная мода колебаний. Поскольку при  $\nu > k$  задача (1.1), (1.2) допускает решения с бесконечной энергией (за счет волнообразования на бесконечности), в этом случае можно говорить о точечном спектре, погруженном в непрерывный.

Цель настоящей работы — нахождение подмножеств пространства параметров, в которых задача (1.1)–(1.3), (1.6) при  $f = 0$  не имеет нетривиальных решений, или, иначе говоря, нахождение оценок частот локализованных мод. Для этого развит подход, предложенный [1] для

$k = 0$ . Будет показано, что метод применим в случае  $k \neq 0$  и позволяет получить оценки частот локализованных мод как на непрерывном спектре, так и вне его.

Достаточно полный обзор работ, посвященных вопросу существования локализованных мод и оценкам соответствующих частот, можно найти в [4]; для рассматриваемой задачи большинство результатов относится к частному случаю  $k = 0$ , когда движение жидкости описывается уравнением Лапласа.

Существование локализованных мод при  $\nu > k$  в общем случае  $k \neq 0$  установлено только для частично погруженных тел (см. [5]), хотя, возможно, подход, с помощью которого были получены [6] примеры неединственности в случае полностью погруженных тел при  $k = 0$ , может быть обобщен для построения примеров в общем случае  $k \neq 0$ .

Было установлено [7–9] существование решений однородной задачи (1.1)–(1.3), (1.6) для погруженных тел произвольной формы в диапазоне  $\nu < k$ , а также доказаны теоремы сравнения собственных значений для вложенных областей (принцип монотонности) [9]. Проведено [10] численное исследование симметричных локализованных мод для круговых цилиндров и выведены формулы для оценок снизу частот локализованных колебаний. Предложены [11, 12] более универсальные подходы для получения оценок.

Вопрос о единственности при  $\nu > k$  гораздо лучше изучен для частного случая  $k = 0$  и для частично погруженных тел при  $k \neq 0$  (см. [4], гл. 1, [13]). Существуют две основные схемы доказательства единственности: схема Джона (1950 г., см. [4], § 3.2, а также [11]) и так называемое тождество В. Г. Мазьи (1973 г.) (подробное описание см. [4], § 2.2). Обе схемы накладывают существенные геометрические ограничения. Так, схема Джона неэффективна для тел, достаточно удаленных друг от друга в горизонтальном направлении. Схема, основанная на тождестве В. Г. Мазьи — в некотором смысле обратная. Отыскав векторное поле с требуемыми характеристиками, можно предъявить некоторые конфигурации тел, не поддерживающих локализованные моды.

Недавно была предложена новая схема [1] доказательства единственности и получения оценок частот локализованных мод. Метод основан на совместном использовании тождества Грина и принципа максимума для эллиптических операторов и позволяет рассматривать системы из любого количества тел, имеющих произвольную геометрию. При этом нет характерного для схем, основанных на подходе Джона, ограничения, связанного с расстоянием между телами.

Критерий единственности [1] имеет вид неравенства, включающего интеграл по смоченной поверхности, а подынтегральное выражение включает производные функции Грина. Неравенство может быть проверено численно. При этом оценки градиента функции Грина позволяют получить простые оценки области единственности в пространстве параметров задачи — частота (или волновое число) и глубина погружения системы тел. В частности, оценки гарантируют отсутствие локализованных мод для достаточно большой глубины погружения или достаточно больших значений частоты. Ниже будет показано, что метод обеспечивает оценки частот локализованных мод как на непрерывном спектре при  $\nu > k$  (где при  $k \neq 0$  метод не имеет аналогов), так и в диапазоне  $\nu < k$  (где метод имеет некоторые преимущества и недостатки по сравнению с существующими оценками [11, 12]).

**2. Функция Грина и критерий единственности.** Воспользуемся обозначением  $G(x, y; x_0, y_0)$  для потенциала источника, расположенного в точке  $(x_0, y_0)$  и вычисленного в точке  $(x, y)$ . Тогда при  $y_0 < 0$  потенциал  $G$  как функция  $x, y$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,y)}^2 G - k^2 G &= -\delta(x - x_0, y - y_0), \quad y_0 < 0 \\ \partial_y G - \nu G &= 0, \quad y = 0 \end{aligned}$$

где  $\delta$  — дельта-функция. Кроме того, потенциал  $G$  должен быть ограничен в области  $y < 0$  с вырезанной окрестностью точки  $(x_0, y_0)$ .

Имеем (см., например, [7])

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{K_0(kr_-) - K_0(kr_+)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H(y + y_0, t) \cos(x - x_0)t dt \quad (2.1)$$

где

$$r_\pm = [(x - x_0)^2 + (y \pm y_0)^2]^{1/2} \quad (2.2)$$

$$K_n(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} \mu} \operatorname{ch} n\mu d\mu, \quad H(z, t) = \frac{e^{z\sqrt{t^2+k^2}}}{\sqrt{t^2+k^2}-\nu}$$

( $K_n(z)$  — модифицированная функция Бесселя, см., например, [14], формула 8.432.1). Подынтегральное выражение в формуле (2.1) имеет полюс первого порядка при  $\nu > k$ , в этом случае интеграл вычисляется в смысле главного значения.

Применим третье тождество Грина к гипотетической локализованной моде — решению однородной задачи (1.1)–(1.3), (1.6) — и функции Грина  $G$ . Принимая во внимание условия на свободной поверхности и ограниченность на бесконечности потенциала и его производных, находим

$$u(x_0, y_0) = \int_S u(x, y) \partial_{n(x,y)} G(x, y; x_0, y_0) ds_{(x,y)}, \quad (x_0, y_0) \in W \quad (2.3)$$

Из последней формулы следует, что

$$|u(x_0, y_0)| \leq \max_{(x,y) \in S} \{|u(x, y)|\} \int_S |\partial_{n(x,y)} G(x, y; x_0, y_0)| ds_{(x,y)}$$

Заметим, что функция Грина может быть продолжена аналитически из области  $y < 0$  в область  $y < -y_0$  (это следует, в частности, из (2.1)). Таким образом, представление (2.3) пригодно и для точек  $(x_0, y_0)$  принадлежащих свободной поверхности. Тем самым, заключаем, что

$$\sup_F |u| \leq \max_S |u| \sup_{(x_0, y_0) \in F} \left\{ \int_S |\partial_{n(x,y)} G(x, y; x_0, y_0)| ds_{(x,y)} \right\} \quad (2.4)$$

Сравним величины  $\sup_F |u|$  и  $\max_S |u|$ . Предварительно заметим, что сильный принцип максимума Хопфа (см., например, [15], теорема 3.5) гарантирует, что не являющийся константой потенциал  $u$ , который удовлетворяет уравнению (1.1), не может достигать неположительного минимума и неотрицательного максимума во внутренней точке любого конечного подмножества  $W$ . Это утверждение справедливо и для всей неограниченной области  $W$  — достаточно заметить, что потенциал локализованной моды убывает на бесконечности.

Пусть смоченная поверхность тел  $S$  достаточно регулярна — принадлежит классу  $C^1$  и во всех ее точках выполнено «условие внутренней сферы» (точка должна лежать на границе круга, находящегося в области  $W$ ). В частности, этим условиям удовлетворяют контуры класса  $C^2$ . При этих ограничениях справедливо утверждение ([15], лемма 3.4), для любой конечной области  $W_0 \subset W$  гарантирующее, что в точке на границе, в которой  $u$  достигает максимального неотрицательного (минимального неположительного) значения, любая производная по направлению, внешнему относительно тела, строго положительна (отрицательна).

Рассмотрим теперь область  $W_R = W \cap \{|x^2 + y^2| \leq R\}$ . Очевидно, можно найти достаточно большое значение  $R$  такое, что максимальное значение  $|u|$  достигается на поверхности тел  $S$  или на отрезке свободной поверхности  $F_R = F \cap \{|x| \leq R\}$ . Заметим также, что если максимум

$|u|$  соответствует максимуму функции  $u$ , то этот максимум положителен, если минимуму — это минимальное значение отрицательно. Это означает, что можно воспользоваться приведенным выше утверждением, из которого следует, что  $\max |u|$  в области  $W_R$  не может достигаться на поверхности  $S$ , поскольку это противоречит условию (1.3). Тем самым, установлено, что либо  $u = 0$  в области  $W$ , либо

$$\sup_F |u| > \max_S |u|$$

Объединяя последнее неравенство с (2.4) приходим к утверждению: если для заданной конфигурации тел  $S$  и заданных значений параметров  $\nu$  и  $k$  выполнено неравенство

$$\sup_{(x_0, y_0) \in F} \left\{ \int_S |\partial_n(x, y) G(\nu, k; x, y; x_0, y_0)| ds_{(x, y)} \right\} < 1 \quad (2.5)$$

то однородная задача (1.1)–(1.3), (1.6) имеет только тривиальное решение.

Было показано [1], что утверждение можно распространить на случай контуров с угловыми точками и точками возврата, вдающимися в жидкость. Используя результаты [16], можно также доказать, что последнее утверждение справедливо для конфигураций, удовлетворяющих условию внешнего конуса — в частности, допустимы угловые точки, вдающиеся во внутренность тел.

Следуя описанному ранее подходу [1], можно показать, что приведенный критерий может быть усилен при помощи вспомогательных потенциалов  $\Phi_i$ , удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.2), и критерий (2.5) можно заменить неравенством

$$\sup_{(x_0, y_0) \in F} \left\{ \int_S |\partial_n(x, y) G(x, y; x_0, y_0) + \sum_i a_i(x_0, y_0) \partial_n \Phi_i(x, y; x_0, y_0)| ds_{(x, y)} \right\} \leq 1 \quad (2.6)$$

где  $a_i = a_i(x_0, y_0)$  — коэффициенты, для определения которых можно использовать задачу минимизации:

$$\min_{a_1, a_2, \dots} \int_S |\partial_n(x, y) G(x, y; x_0, y_0) + \sum_i a_i \partial_n \Phi_i(x, y; x_0, y_0)| ds_{(x, y)}, \quad (x_0, y_0) \in F$$

Это задача линейного программирования, для которой существуют эффективные алгоритмы численного решения (симплекс-метод).

В качестве вспомогательных потенциалов  $\Phi_i(x, y; x_0, y_0)$  можно использовать простые волновые решения  $e^{\nu y} e^{\pm i \ell x}$ , сингулярные решения задачи (1.1), (1.2) с особенностью, расположенной внутри тел, — мультиполи или более простые безволновые сингулярные потенциалы  $\text{Re}\{\Psi_n(x, y; x_0, y_0)\}$ ,  $\text{Im}\{\Psi_n(x, y; x_0, y_0)\}$ . Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, y; x_0, y_0) = & \nu K_n(kr_-) e^{in\tau_-} - \nu K_n(kr_+) e^{in\tau_+} - \\ & - \frac{k}{2} \left[ \sum_{\pm} K_{n\pm 1}(kr_-) e^{i(n\pm 1)\tau_-} - \sum_{\pm} K_{n\pm 1}(kr_+) e^{i(n\pm 1)\tau_+} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $r_{\pm}$  определены формулами (2.2), а  $\tau_{\pm}$  определяются соотношениями

$$x - x_0 = r_- \sin \tau_- = r_+ \sin \tau_+, \quad y = r_- \cos \tau_- + y_0 = -r_+ \cos \tau_+ - y_0$$

Заметим, что величина  $\sup$  в формулах (2.5), (2.6) определяется на неограниченном множестве  $F$ , что, конечно, неприемлемо с точки зрения применимости критерия для численной реализации. Часть свободной поверхности, на которой достаточно проверить выполнение критерия (2.6), может быть найдена при помощи оценок градиента функции Грина, которые будут получены ниже. Более подробно это описано ранее [1], там же можно найти примеры численного исследования вопроса о единственности на основе критерия (2.6) для  $k = 0$ .

**3. Оценки производных функции Грина.** Воспользовавшись представлением (2.1) и вводя обозначение  $G_0 = G(x, y; x_0, 0)$ , находим

$$\begin{aligned}\partial_x G_0 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty t H(y, t) \sin(x - x_0) t dt \\ \partial_y G_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{t^2 + k^2} H(y, t) \cos(x - x_0) t dt\end{aligned}\quad (3.1)$$

(интегралы вычисляются в смысле главного значения при  $\nu > k$ ).

Воспользуемся заменой переменной ([3], § 2) и запишем

$$\partial_y G_0 = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty J(\mu) \operatorname{ch}^2 \mu d\mu, \quad J(\mu) = \frac{\exp\{-k r_- \operatorname{ch}(\mu - i\varphi)\}}{\operatorname{ch} \mu - \lambda}, \quad \lambda = \nu/k \quad (3.2)$$

Величина  $\varphi$  определяется соотношением  $\operatorname{tg} \varphi = (x - x_0)/y$ , так что  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  при  $y < 0$ . В случае  $\nu > k$  подынтегральное выражение имеет два полюса на вещественной оси, при  $\nu < k$  полюсы расположены на мнимой оси, в точках  $\mu = \pm i(\arccos(\lambda) + 2\pi n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Далее в данном разделе будем рассматривать значения  $\lambda > 1/\sqrt{2}$ .

Обратимся вначале к случаю  $\varphi \in [0, \pi/2)$ . Сдвигая контур интегрирования вверх ( $\mu \rightarrow \mu + i\pi/4$ ), находим

$$\partial_y G_0 = \frac{k}{2\pi} I_y(x - x_0, y) + \nu^2 e^{\nu y} \times \begin{cases} \ell^{-1} \sin \ell(x - x_0) & \text{при } \lambda > 1 \\ \ell_*^{-1} e^{\ell_*(x-x_0)} & \text{при } \lambda \in (1/\sqrt{2}, 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$\ell_* = \sqrt{k^2 - \nu^2}, \quad I_y(x - x_0, y) = \int_{-\infty}^\infty J(\mu + i\pi/4) \operatorname{ch}^2(\mu + i\pi/4) d\mu \quad (3.4)$$

Введем обозначения

$$\Phi_c(\mu) = k r_- \cos(\pi/4 - \varphi) \operatorname{ch} \mu, \quad \Phi_s(\mu) = k r_- \sin(\pi/4 - \varphi) \operatorname{sh} \mu$$

Пользуясь формулой (3.4), находим

$$\begin{aligned}I_y(x - x_0, y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\mu)}{g(\mu)} \exp\{-\Phi_c(\mu)\} d\mu \\ f(\mu) &= (\sqrt{2} \operatorname{ch} \mu \operatorname{ch} 2\mu - 2\lambda) \cos(\Phi_s(\mu)) + (\sqrt{2} \operatorname{ch} 2\mu + 4\lambda \operatorname{ch} \mu) \operatorname{sh} \mu \sin(\Phi_s(\mu)) \\ g(\mu) &= (\sqrt{2}\lambda - \operatorname{ch} \mu)^2 + \operatorname{sh}^2 \mu > 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

Очевидно

$$|f(\mu)| \leq \sqrt{2} \operatorname{ch} 2\mu \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu + \operatorname{sh}^2 \mu} + 2\lambda \sqrt{1 + 4 \operatorname{ch}^2 \mu \operatorname{sh}^2 \mu} = \operatorname{ch} 2\mu (\sqrt{2} \operatorname{ch} 2\mu + 2\lambda)$$

С учетом соотношения  $\operatorname{ch} 2\mu = 2 \operatorname{ch}^2 \mu - 1$  имеем

$$|f(\mu)| \leq \operatorname{ch} \mu f_1(\operatorname{ch} \mu), \quad |f(\mu)| \leq \operatorname{ch} 2\mu f_2(\operatorname{ch} \mu), \quad f_1(t) = 4t^2 + 4\lambda t - 2, \quad f_2(t) = 2t + 2\lambda \quad (3.6)$$

Поскольку  $\operatorname{ch} \mu \geq 1$ , удобно сделать замену переменной  $t \rightarrow z^2 + 1$  в  $f_1$  и  $f_2$  и  $\operatorname{ch} \mu \rightarrow z^2 + 1$  в  $g$ . Получим

$$\begin{aligned}f_1(z) &= 4z^4 + 4(2 + \lambda)z^2 + 2 + 4\lambda, \quad f_2(z) = 2z^2 + 2\lambda + 2 \\ g(z) &= 2z^4 + 2(2 - \sqrt{2}\lambda)z^2 + 1 - 2\sqrt{2}\lambda + 2\lambda^2\end{aligned}$$

Будем искать коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$ , такие что  $f_n(z) - c_n g(z) \leq 0$  ( $n = 1, 2$ ). Анализ показывает, что график функции  $f_n - c_n g$  касается оси абсцисс либо в двух симметричных точках, либо в нуле. Выполняя условия

$$f_n(z) - c_n g(z) = 0, \quad f'_n(z) - c_n g'(z) = 0$$

находим

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2(1 + (3 - n)\lambda)}{(1 - \sqrt{2}\lambda)^2} \quad \text{при } 1/\sqrt{2} < \lambda \leq \lambda_n, \quad n = 1, 2 \\ c_1 &= \frac{-2 + \lambda(2 + \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{4\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda^2 - 1})}{\lambda^2 - 1} \quad \text{при } \lambda \geq \lambda_1 \\ c_2 &= \frac{\lambda(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 2\sqrt{2}\lambda^2 - 1})}{2(\lambda^2 - 1)} \quad \text{при } \lambda \geq \lambda_2 \\ \lambda_1 &= -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2(5 + 3\sqrt{2})}, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2(3 - \sqrt{2})} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Очевидно,  $\lambda_n > 1$ , поэтому формулы (3.7) определяют непрерывную зависимость  $c_n$  как функции  $\lambda$  при  $\lambda > 1/\sqrt{2}$ .

Окончательно, объединяя формулы (3.5), (3.6), получаем оценки

$$\begin{aligned} |I_y(x - x_0, y)| &\leq \frac{c_n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} n\mu \exp\{-\Phi_c(\mu)\} d\mu = \\ &= \frac{c_n}{2} K_n\left(k \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)r_-\right) \leq \frac{c_n}{2} K_n\left(\frac{kr_-}{\sqrt{2}}\right), \quad n = 1, 2 \end{aligned}$$

Применяя указанные выше преобразования к интегралу в первой формуле (3.1), получим

$$\partial_x G_0 = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(\mu) \operatorname{ch} \mu \operatorname{sh} \mu d\mu \tag{3.8}$$

Снова рассмотрим случай  $\varphi \in [0, \pi/2)$ . Сдвигая контур интегрирования вверх ( $\mu \rightarrow \mu + i\pi/4$ ), находим

$$\partial_x G_0 = \frac{k}{2\pi} I_x(x - x_0, y) - \nu e^{\nu y} \times \begin{cases} \cos \ell(x - x_0) & \text{при } \lambda > 1 \\ e^{\ell_*(x-x_0)} & \text{при } \lambda \in (1/\sqrt{2}, 1) \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} I_x(x - x_0, y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\mu)}{g(\mu)} \exp\{-\Phi_c(\mu)\} d\mu \\ s(\mu) &= \operatorname{ch} 2\mu \{ (2\lambda - \sqrt{2} \operatorname{ch} \mu) \cos(\Phi_s(\mu)) + \sqrt{2} \operatorname{sh} \mu \sin(\Phi_s(\mu)) \} \end{aligned}$$

Заметив, что

$$|s(\mu)| \leq \operatorname{ch} 2\mu (\sqrt{2} \operatorname{ch} 2\mu + 2\lambda)$$

выводим оценки

$$|s(\mu)| \leq \operatorname{ch} \mu f_1(\operatorname{ch} \mu), \quad |s(\mu)| \leq \operatorname{ch} 2\mu f_2(\operatorname{ch} \mu)$$

Аналогичные вычисления могут быть проделаны в случае  $\varphi \in (-\pi/2, 0]$  при помощи сдвига  $\mu \rightarrow \mu - i\pi/4$  контура интегрирования в представлениях (3.2) и (3.8). Таким образом, окончательно находим

$$|I_y(x - x_0, y)| \leq \frac{c_n}{2} K_n\left(\frac{kr_-}{\sqrt{2}}\right), \quad |I_x(x - x_0, y)| \leq \frac{c_n}{2} K_n\left(\frac{kr_-}{\sqrt{2}}\right) \tag{3.10}$$

**4. Оценки частот локализованных мод.** Рассмотрим некоторую систему тел  $S(Y)$ , погруженную на глубину

$$Y = \max\{y : (x, y) \in S\}, \quad Y < 0$$

Оценки производных функции Грина и критерий (2.5) позволяют найти такое подмножество пространства  $(\nu, k, Y)$ , в котором однородная задача (1.1)–(1.3), (1.6) имеет только тривиальное решение.

Пользуясь соотношениями (3.3), (3.9) и (3.10), запишем

$$\int_S |\partial_{n(x,y)} G_0| ds_{(x,y)} \leq \int_S q(\nu, k, y) ds_{(x,y)} \quad (4.1)$$

$$q(\nu, k, y) = \begin{cases} q_1(\nu, k, y) & \text{при } 0 < \nu \leq k/\sqrt{2} \\ \min\{g_1(\nu, k, y), g_2(\nu, k, y)\} & \text{при } k/\sqrt{2} < \nu < k \\ q_2(\nu, k, y) & \text{при } \nu > k \end{cases}$$

$$q_1(\nu, k, y) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \int_0^\infty t H(t) dt \right)^2 + \left( \int_0^\infty \sqrt{t^2 + k^2} H(t) dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$q_2(\nu, k, y) = \left[ \left( \nu e^{\nu y} + \frac{k}{4\pi} \min_{n=1,2} \left\{ c_n K_n \left( \frac{k|y|}{\sqrt{2}} \right) \right\} \right)^2 + \left( \nu^2 |\nu^2 - k^2|^{-1/2} e^{\nu y} + \frac{k}{4\pi} \min_{n=1,2} \left\{ c_n K_n \left( \frac{k|y|}{\sqrt{2}} \right) \right\} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  определены формулами (3.7) (где  $\lambda = \nu/k$ ).

Граница подмножества в пространстве параметров  $(\nu, k, Y)$ , в котором неравенства (2.5) и (4.1) гарантируют отсутствие нетривиальных решений однородной задачи (1.1)–(1.3), (1.6), определяется соотношением

$$\int_{S(Y)} q(\nu, k, y) ds_{(x,y)} = 1 \quad (4.2)$$

Функция  $q(\nu, k, y)$  монотонно убывает при увеличении глубины  $y$ , поэтому отсутствие локализованных мод гарантировано для достаточно больших значений  $Y$ , а также для достаточно больших значений параметра  $\nu$ . Последнее следует из оценки  $q_2(\nu, k, y) = O(\nu^{-1})$  при  $\nu \rightarrow \infty$ .

При  $\nu/k \rightarrow 1$  имеем  $q_2(\nu, k, y) \sim k^2 e^{ky} / |k^2 - \nu^2|^{1/2}$  и график функции  $Y(\nu, k)$ , определяемой соотношением (4.2), имеет особенность. Для собственной моды, которая симметрична по  $x$  и отвечает наибольшему значению отношения  $\nu/k$ , для кругового цилиндра радиуса  $a$  с центром на глубине  $d$  была получена [7] асимптотика дисперсионного соотношения

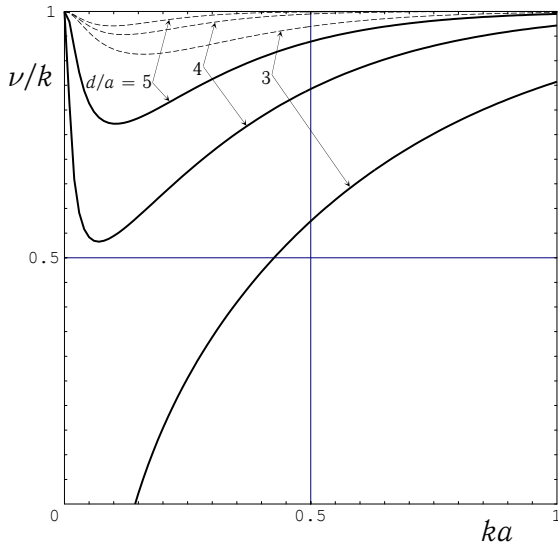
$$\nu a \sim (3\pi)^{-1/2} e^{\nu d} \left( k^2 / \nu^2 - 1 \right)^{1/4}$$

при стремлении снизу к границе непрерывного спектра ( $\nu/k \rightarrow 1 - 0$ ). Из соотношения (4.2) получаем

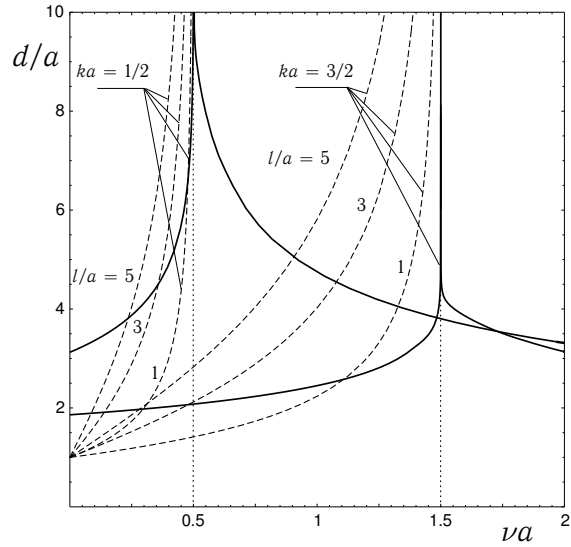
$$\nu a \sim (2\pi)^{-1} e^{\nu d} |k^2 / \nu^2 - 1|^{1/2} \quad \text{при } \nu/k \rightarrow 1$$

Очевидно, асимптотика оценки находится в соответствии с асимптотикой дисперсионного соотношения, хотя и не точна. При этом следует учесть, что асимптотика дисперсионного соотношения установлена для наибольшей собственной частоты, находящейся ниже границы непрерывного спектра и симметричной собственной моды, а уравнение (4.2) служит для оценки всех существующих мод как на непрерывном спектре, так и вне его.





Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты численного исследования единственности при помощи формулы (4.2) показаны на фиг. 2, 3, где они сопоставлены с полученными ранее результатами (см. [12] и [11] соответственно).

На фиг. 2 представлены результаты вычислений для кругового цилиндра радиуса  $a$  с центром на глубине  $d$ . Для данной геометрии полученные ранее оценки [12] гарантируют отсутствие локализованных мод в области, выделенной в пространстве параметров задачи решениями уравнения

$$K_1(ka) - K_1(k(2d - a)) - \frac{2\nu}{k} \int_0^\infty \frac{e^{(a-2d)\sqrt{t^2+k^2}} dt}{\sqrt{t^2+k^2} - \nu} = 0 \quad (4.3)$$

На фиг. 2 для  $d/a = 3, 4, 5$  сплошной линией показаны границы области единственности решения задачи (1.1)–(1.4), заданные уравнением (4.2), штриховой — границы, полученные при помощи уравнения (4.3). Отсутствие локализованных мод гарантировано в областях, расположенных под кривыми. Следует отметить, что оценки [12] более точны, но при этом, в отличие от условия (4.2), пригодны только для  $\nu < k$  и только для одного полностью погруженного тела (поскольку получены с помощью принципа монотонности [9]).

На фиг. 3 представлены результаты численного исследования условия (4.2) и сопоставление с результатами Саймона [11] для двух круговых цилиндров радиуса  $a$  с центрами на глубине  $d$  при расстоянии между центрами  $2l$  и при  $ka = 1/2, 3/2$ . Для данной геометрии при  $\nu < k$  оценки Саймона гарантируют отсутствие локализованных мод, если

$$\nu k^{-1} \leq \sin \left\{ \arctg(dl^{-1}) - \arcsin \left[ a(d^2 + l^2)^{-1/2} \right] \right\}$$

На фиг. 3 сплошной линией показаны границы области единственности решения задач (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.5), полученные при помощи формулы (4.2), штриховой — результаты Саймона при  $l/a = 1, 3, 5$ . Отсутствие локализованных мод гарантировано в областях, расположенных над кривыми. Оценки (4.2) не зависят от расстояния между телами в горизонтальном направлении, тем самым, имеется преимущество в сравнении с оценками Саймона при большом расстоянии между телами. При этом следует отметить, что результаты [11, 12] применимы только для значений  $\nu < k$ . Оценки настоящей работы для значений  $\nu > k$  (на непрерывном спектре задачи) не имеют аналогов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Motygin O. V., McIver P.* A uniqueness criterion for linear problems of wave-body interaction // IMA J. of Appl. Math. 2003. V. 68. № 3. P. 229–250.
2. *Ursell F.* On head seas travelling along a horizontal cylinder // J. Inst. Math. and its Appl. 1968. V. 4. № 4. P. 414–427.
3. *Ursell F.* The expansion of water-wave potentials at great distances // Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. V. 64. № 3. P. 811–826.
4. *Kuznetsov N. G., Maz'ya V. G., Vainberg B. R.* Linear Water Waves: A Mathematical Approach. Cambridge; New York: Univ. Press, 2002. 513 p.
5. *Мотыгин О.В.* Локализованные моды колебаний жидкости при косом набегании волн на частично погруженные тела // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 267–275.
6. *McIver M.* Trapped modes supported by submerged obstacles // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2000. V. 456. № 2000. P. 1851–1860.
7. *Ursell F.* Trapping modes in the theory of surface waves // Proc. Camb. Phil. Soc. 1951. V. 47. № 2. P. 347–358.
8. *Jones D.S.* The eigenvalues of  $\nabla^2 u + \lambda u = 0$  when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. № 4. P. 668–684.
9. *Ursell F.* Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves // J. Fluid Mech. 1987. V. 183. P. 421–437.
10. *McIver P., Evans D. V.* The trapping of surface waves above a submerged, horizontal cylinder // J. Fluid Mech. 1985. V. 151. P. 243–255.
11. *Simon M.J.* On a bound for the frequency of surface waves trapped near a cylinder spanning a channel // Theoret. and Comput. Fluid Dynamics. 1992. V. 4. № 2. P. 71–78.
12. *Motygin O. V.* On frequency bounds for modes trapped near a channel-spanning cylinder // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2000. V. 456. № 2004. P. 2911–2930.
13. *Kuznetsov N. G.* Uniqueness in the problem of an obstacle in oblique waves // С. г. Mecanique. 2003. V. 331. № 3. P. 183–188.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
15. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin etc. Springer, 1983. 524 p. = *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука 1989. 463 с.
16. *Надирашвили Н.С.* К вопросу единственности решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб. 1983. Т. 122. № 3. С. 341–358.