*Журнал вычисл. математики и математ. физики, **43**(2): 268–275, 2003.*

УДК 517.968: 532.59

Разрешимость граничных интегральных уравнений для задачи о движении тела в двуслойной жидкости.

О.В. Мотыгин

(199178 С.-Петербург, В.О. Большой пр. 61, ИПМаш РАН)

Плоская линейная задача об установившемся движении тела в идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, состоящей из двух слоев различной плотности, сводится к интегральному уравнению на поверхности тела. Доказано, что данное граничное интегральное уравнение доставляет единственное решение краевой задачи для всех значений параметров задачи кроме некоторого нигде не плотного множества исключительных значений, свойства которого описаны. При этом для исследования разрешимости интегрального уравнения предложена схема, основанная на аналитическом продолжении интегрального оператора в нефизическую область параметров задачи, которая, по всей видимости, окажется особенно эффективной при исследовании интегральных уравнений для более сложных задач данного класса, в частности для пространственной задачи. Изученное интегральное уравнение может применяться в разнообразных вычислительных методах, например для расчета гидродинамических нагрузок.

1. Введение.

Настоящая работа по существу является продолжением [1], где для рассматриваемой задачи был получен ряд результатов, включая, в частности, выражения для функции Грина, волнового сопротивления, асимптотик решения на бесконечности, а также были анонсированы некоторые утверждения о существовании и единственности решения, доказанные в диссертационной работе автора [2]. При этом в [1] не обсуждались способы нахождения решений краевой задачи — данный пробел восполняется в настоящей работе.

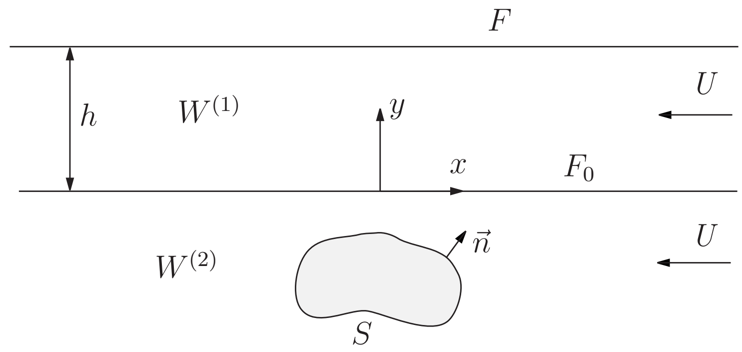
В основе настоящего исследования лежит схема, предложенная в [3] и использованная в ряде других работ (см. например [4, 5, 6]) для задачи о движении тела в однородной жидкости. При этом подходе краевая задача с использованием методов теории потенциала сводится к интегральному уравнению на поверхности тела. Разрешимость данного уравнения устанавливается при помощи теоремы об обратимости оператор-функции, зависящей аналитически от параметра, которая оказывается применимой, поскольку интегральный оператор зависит аналитически от скорости движения тела. Ввиду указанного свойства, достаточно установить обратимость оператора интегрального уравнения для некоторого значения скорости, при этом обратимость имеет место для почти всех значений кроме некоторого возможно пустого точечного множества, точный вид которого в рамках данного метода не определяется. В [6] показано, что предположение о существовании исключительных значений, обусловленное особенностями математического метода, может быть связано с существом задачи.

Особенностью рассматриваемой в настоящей работе задачи по сравнению со случаем однородной жидкости является то, что интегральный оператор зависит от двух параметров — скорости движения тела и отношения плотностей слоев. Поэтому в настоящей работе используются более общие по сравнению с применяемыми в [3] теоремы [7, 8] об обратимости оператор-функции, зависящей аналитически от нескольких параметров. Из результатов [7, 8] следует, что множество исключительных значений параметров задачи, для которых не существует ограниченный обратный оператор, представляет собой аналитическое множество. Если во внутренней точке области установлена обратимость оператора интегрального уравнения, то такое множество исключительных значений не составляет всю область значений параметров и для рассматриваемой задачи является набором изолированных точек и аналитических кривых на плоскости.

Для доказательства обратимости оператора в одной из точек области параметров задачи в [3, 4, 5, 6] рассматривалось интегральное уравнение, соответствующее предельному случаю неподвижного тела или бесконечной скорости, имея ввиду то, что разрешимость интегрального уравнения для предельной задачи известна. Поскольку при этом значение параметра, для которого уже доказана обратимость оператора интегрального уравнения, не является внутренней точкой области, а находится на ее границе, то необходимо установить близость операторов, соответствующих основной и предельной задаче, при значениях параметра близких к граничному значению. Последнее приводит к вычислениям оценки нормы разности интегральных операторов, которые особенно трудоемки в случае, когда оценку нормы надо получать в весовых пространствах как в [4, 6] или когда сами аналитические выражения интегральных операторов достаточно сложны как в случае стратифицированной жидкости.

В настоящей работе предлагается подход, который позволяет избавиться от значительной части вычислений, связанных с получением оценок норм интегральных операторов. Он основан на аналитическом продолжении интегрального оператора в нефизическую область параметров задачи, в данной работе это область, в которой плотность верхнего слоя имеет малые, но отрицательные значения. При этом значения параметров, отвечающие базовой или, как она была названа выше, предельной задаче о движении в однородной жидкости, заполняющей тот слой, в котором находится тело, оказываются внутри области аналитической зависимости оператора интегрального уравнения основной задачи, и его обратимость следует из обратимости оператора интегрального уравнения базовой задачи.

По всей видимости предложенная схема окажется особенно эффективной



Фиг. 1:

при исследовании спектральных свойств интегральных уравнений для более сложных задач, в частности для пространственной задачи, задачи об обтекании тела жидкостью, слои которой движутся с различной скоростью, или задачи о движении тела, пересекающего поверхность раздела слоев различной плотности. Заметим, что вопрос о разрешимости интегральных уравнений для базовых задач, описывающих взаимодействие тел с однородной жидкостью, изучен довольно хорошо (см. обзор литературы в [5]).

Опишем содержание работы. В п. 2 введены обозначения и приведена краевая задача. В п. 3 приведена функция Грина и краевая задача сведена к граничному интегральному уравнению, разрешимость которого установлена в п. 4. Единственность решения краевой задачи, доставляемого интегральным уравнением, доказана в п. 5.

2. Постановка задачи.

Рассматривается плоская линейная задача об установившемся движении тела в идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, состоящей из двух слоев различной плотности. Верхний слой жидкости ограничен сверху свободной поверхностью, нижний имеет бесконечную глубину. Предполагается, что тело представляет собой бесконечно длинный цилиндр, имеющий произвольное поперечное сечение, движется в горизонтальном направлении с постоянной скоростью в направлении ортогональном оси цилиндра и полностью погружено в один из слоев. Ввиду предположения о цилиндрической форме тела будем полагать, что движение жидкости одинаково в каждом сечении плоскостью ортогональной оси цилиндра и описывается потенциалом скоростей $u = u(x, y)$, где x и y — горизонтальная и вертикальная координаты. На фиг. 1 показан случай, когда тело находится в нижней жидкости. Воспользуемся обозначениями: $W^{(1)}$ — верхний слой жидкости плотности $\rho^{(1)}$ и глубины h, $W^{(2)}$ — нижний слой плотности $\rho^{(2)}$, причем $\rho^{(2)} > \rho^{(1)}$. Кроме того $F_0 = \{y = 0\}$ — невозмущенная поверхность раздела сред различной плотности, $F = \{y = h\}$ — невозмущенная свободная поверхность жидкости и S — смоченная поверхность тела. Предполагается, что S — кривая класса $C^{1,\varkappa}$, $0 < \varkappa \leqslant 1$, т.е. S локально задается функциями, первые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\varkappa$. В линейном приближении теории волн малой амплитуды решение представляется потенциалами скоростей $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, заданными в $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ соответственно и удовлетворяющими следующей краевой задаче (где $i = 1, 2$)

$$\nabla^2 u^{(i)} = 0 \quad \text{в} \quad W^{(i)}, \tag{2.1}$$

$$\partial_n u^{(j)} = f \quad \text{на} \quad S, \quad S \subset \overline{W^{(j)}}, \tag{2.2}$$

$$\partial_x^2 u^{(1)} + \nu \partial_y u^{(1)} = 0 \quad \text{на} \quad F, \tag{2.3}$$

$$\rho^{(1)} \left[\partial_x^2 u^{(1)} + \nu \partial_y u^{(1)} \right] = \rho^{(2)} \left[\partial_x^2 u^{(2)} + \nu \partial_y u^{(2)} \right] \quad \text{на} \quad F_0, \tag{2.4}$$

$$\partial_y u^{(1)} = \partial_y u^{(2)} \quad \text{на} \quad F_0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \nabla u^{(i)} \right| = 0, \quad \sup_{W^{(i)}} \left\{ \left| \nabla u^{(i)} \right| \right\} < \infty. \tag{2.6}$$

Здесь $\partial_a^k = \partial^k / \partial a^k$, ∂_n — производная по нормали (внешней относительно тела), $\nu = g/U^2$ — волновое число, U — скорость движения тела и g — ускорение свободного падения.

В работах, посвященных исследованию задач о движении в двуслойной жидкости (см. [1] и цитируемые там работы) используется безразмерный параметр $\varepsilon = \rho^{(2)}/\rho^{(1)} - 1$, который характеризует стратификацию в том смысле, что он мал при малой стратификации жидкости. В настоящей работе будет удобнее использовать обратное отношение

$$\sigma = \varepsilon^{-1} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}.$$

Известно (см. например [1]), что линия

$$\sigma = \nu h - 1$$

делит область задания параметров ν, σ — квадрант $\nu > 0$, $\sigma > 0$ на две области

$$D_1 = \left\{ (\nu, \sigma) : \sigma > 0,\ \sigma > \nu h - 1 \right\}, \quad D_2 = \left\{ (\nu, \sigma) : \sigma > 0,\ \sigma < \nu h - 1 \right\},$$

соответствующие двум различным режимам движения. Если параметры задачи (ν, σ) принадлежат области D_2 (т.н. докритический режим движения), то в дальнем поле за телом образуются и поверхностные волны с частотой ν, и внутренние, т.е. локализованные вблизи поверхности раздела, с частотой ν_0 — положительным корнем дисперсионного соотношения

$$Q(\nu_0) = 0, \quad \text{где} \quad Q(k) = (1 + \sigma)k - (\nu - \sigma k)\, \mathrm{th}(kh). \tag{2.7}$$

При $(\nu, \sigma) \in D_1$ (закритический режим), в асимптотике при $x \to -\infty$ присутствуют только поверхностные волны.

3. Интегральное уравнение.

Будем искать решение задачи (2.1)–(2.6) в форме потенциала простого слоя:

$$u^{(i)}(z) = \int_S \mu(\zeta)\, G^{(i,j)}(z,\zeta)\,\mathrm{d}s_\zeta, \quad z = x + \mathrm{i}y \in W^{(i)}, \quad \zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \in W^{(j)}, \tag{3.1}$$

где индекс j соответствует номеру слоя, в котором находится тело, т.е. $S \subset \overline{W^{(j)}}$. В представлении (3.1), μ — неизвестная плотность и $G^{(i,j)}(z,\zeta)$ — функция Грина задачи, удовлетворяющая как функция переменных x и y условиям (2.3)–(2.5), уравнению

$$\nabla^2_{x,y}\, G^{(i,j)}(z,\zeta) = -2\pi\delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \quad -\infty < x,\xi < \infty, \quad y,\eta \in (-\infty,0)\cup(0,h)$$

и условию (2.6), где sup берется по слоям жидкости с исключенной окрестностью источника (ξ,η).

В настоящей работе, следуя [1], где приведены выражения для функции Грина, используется обозначение $G^{(i,j)}(z,\zeta)$ для того, чтобы показать, что $z \in L^{(i)}$ и $\zeta \in L^{(j)}$, где $L^{(1)}$ ($L^{(2)}$) — верхний (нижний) слой жидкости в отсутствие тела.

Далее будет подробно рассмотрен случай, когда тело движется в нижней жидкости, поскольку выражения для функций $G^{(i,2)}$ менее громоздки. Отличия для случая тела, находящегося в верхнем слое, незначительны и будут описаны ниже.

Приведем здесь представления функций $G^{(1,2)}$ и $G^{(2,2)}$, которые с точностью до замены параметров $\sigma = 1/\varepsilon$ совпадают с полученными в [1]:

$$\begin{aligned} G^{(1,2)}(z,\zeta) =& G_0^{(1,2)}(z,\zeta) + C\mathrm{e}^{\nu(y+\eta)}\sin\nu(x-\xi) + \\ &+ H(\nu h - 1 - \sigma)\, C_0(\eta)\, E(\nu_0 y)\sin\nu_0(x-\xi), \\ G^{(2,2)}(z,\zeta) =& G_0^{(2,2)}(z,\zeta) + C\mathrm{e}^{\nu(y+\eta)}\sin\nu(x-\xi) + \\ &+ H(\nu h - 1 - \sigma)\sigma\, C_0(\eta)\,\mathrm{e}^{\nu_0 y}\sin\nu_0(x-\xi), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где H — функция Хэвисайда и

$$E(t) = \left(1 + \sigma - \nu\nu_0^{-1}\right)\mathrm{ch}\, t + \sigma\,\mathrm{sh}\, t, \quad C_0(\eta) = \frac{(1+\sigma)\left(\nu_0 - \nu\,\mathrm{th}(\nu_0 h)\right)}{(\nu-\nu_0)\, Q'(\nu_0)}\mathrm{e}^{\nu_0\eta},$$

$$Q'(\nu_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\, Q(k)\Big|_{k=\nu_0} = \frac{\nu(1+\sigma) - h(\nu+\nu_0)^2\mathrm{e}^{-2\nu_0 h}}{\nu - \sigma\nu_0}, \quad C = -\frac{1+\sigma}{1+\sigma\mathrm{e}^{2\nu h}}.$$

Также

$$\begin{aligned} G_0^{(1,2)}(z,\zeta) =& \frac{1+\sigma}{2\pi}\int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\nu+k}{\nu-k}\,\mathrm{e}^{k(y+\eta-h)} + \mathrm{e}^{k(\eta-y+h)}\right]\frac{\cos k(x-\xi)}{Q(k)\,\mathrm{ch}(kh)} - \right. \\ &\left. - \frac{2\mathrm{e}^{-k}}{(1+\sigma-\nu h)k}\right\}\mathrm{d}k, \\ G_0^{(2,2)}(z,\zeta) =& -(2\pi)^{-1}\left\{\log|z-\zeta| + \log|z-\overline{\zeta}| + \right. \\ &\left. + 2(1+\sigma)\int_0^\infty \frac{k - \nu\,\mathrm{th}(kh)}{(k-\nu)\, Q(k)}\,\mathrm{e}^{k(y+\eta)}\cos k(x-\xi)\,\mathrm{d}k\right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Интегралы в последней формуле следует понимать как интегралы в смысле главного значения с полюсами подынтегральных выражений в точке $k = \nu$, и если $(\nu, \sigma) \in D_2$, в точке $k = \nu_0$.

Ввиду указанных свойств функции Грина потенциалы $u^{(i)}$, определенные формулой (3.1), удовлетворяют условиям (2.1), (2.3)–(2.6). Из представлений (3.3) следует, что $G^{(2,2)}(z,\zeta) + \frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|$ — гармоническая функция $z, \zeta \in L^{(2)}$. Таким образом, для потенциала простого слоя (3.1) применима теория логарифмического потенциала и справедлива формула скачка нормальной производной. Тем самым, условие (2.2) приводит к уравнению

$$-\mu(z) + \big(T\mu\big)(z) = 2\,f, \quad z \in S, \tag{3.4}$$

где

$$\big(T\mu\big)(z) = 2\int_S \mu(\zeta)\,\partial_{n(z)} G^{(2,2)}(z,\zeta)\,\mathrm{d}s_\zeta. \tag{3.5}$$

Оператор T — компактный в $L_2(S)$ (см. [9, ч. 1, § 1]). Заметим также, что в предположении о том, что S является кривой класса $C^{1,\varkappa}$, $0 < \varkappa \leqslant 1$, и $f \in C(S)$, теорема 3 [9, ч. 1, § 1] гарантирует, что решение μ уравнения (3.4) в $L_2(S)$ принадлежит $C(S)$. Тогда из теоремы 2 [9, ч. 1, § 1] следует, что потенциал (3.1) имеет правильную нормальную производную на S, совпадающую ввиду (3.4) с f, и таким образом является решением задачи (2.1)–(2.6).

Целью двух последующих разделов будет завершение доказательства следующего утверждения

Теорема 1. Для всех значений $(\nu, \sigma) \in D_i$, за исключением некоторого возможно пустого нигде не плотного множества $\Xi_i \subset D_i$, задача (2.1)–(2.6) имеет единственное решение, являющееся решением краевого интегрального уравнения (3.4) на контуре S. При этом множество исключительных значений Ξ_i является аналитическим.

Из свойств аналитических множеств, т.е. множеств заданных локально как множества общих нулей конечных наборов аналитических функций (см. например [10]), нетрудно заключить, например, что Ξ_i может состоять только из изолированных точек и кривых, конечные точки которых находятся на границе области D_i.

4. Разрешимость интегрального уравнения.

Воспользуемся результатами [7, 8] об обратимости оператора, зависящего аналитически от параметров. Следуя [7, 8] и воспользовавшись обозначением $T_{(\nu,\sigma)}$ для того чтобы подчеркнуть зависимость оператора (3.5) от параметров (ν, σ), определим

$$A_{(\nu,\sigma)} = I - T_{(\nu,\sigma)}, \quad \alpha_{(\nu,\sigma)} = \dim \operatorname{Ker} A_{(\nu,\sigma)}.$$

Тем самым, точка (ν, σ) является характеристической и принадлежит Ξ_i, если $\alpha_{(\nu,\sigma)} > 0$. Оператор $A_{(\nu,\sigma)}$ обладает свойствами необходимыми для применения результатов [7, 8], а именно зависит аналитически от параметров $(\nu, \sigma) \in D_i$,

$i = 1, 2$ — последнее является очевидным следствием представлений (3.2), (3.3) и (3.5). Кроме того, важно то, что $\mathrm{Ind}(A_{(\nu,\sigma)}) = 0$ поскольку оператор $T_{(\nu,\sigma)}$ компактный.

С учетом указанных свойств теорема 1 [7] гарантирует, что множества $\Sigma_i^r \subset D_i$ ($r = 1, 2$) тех точек, для которых $\alpha_{(\nu,\sigma)} \geqslant r$, являются аналитическими множествами. Кроме того, из теоремы 3 [8] следует, что множество $\Sigma_i^1 = \Xi_i$ либо совпадает с D_i, либо есть локально главное аналитическое множество в D_i. Последнее означает (см. [10, гл. 1, п. 2.6]), что для каждой точки $a = (\nu_*, \sigma_*) \in D_i$ можно указать окрестность $P_a \subset D_i$ и аналитическую функцию $q_a(\nu, \sigma)$, такие что пересечение Σ_i^1 с P_a совпадает с множеством нулей функции $q_a(\nu, \sigma)$. Таким образом, для того чтобы убедиться в том, что Ξ_i нигде не плотно в D_i, надо найти в области D_i хотя бы одну точку (ν, σ), в которой существует ограниченный оператор $A^{-1}_{(\nu,\sigma)}$.

Для этой цели рассмотрим интегральное уравнение задачи о движении в жидкости бесконечной глубины и со свободной поверхностью $y = 0$:

$$-\mu(z) + \big(\tilde{T}\mu\big)(z) = 2\,f, \quad z \in S, \tag{4.1}$$

где

$$\big(\tilde{T}\mu\big)(z) = 2\int_S \mu(\zeta)\,\partial_{n(z)}\tilde{G}(z,\zeta)\,\mathrm{d}s_\zeta.$$

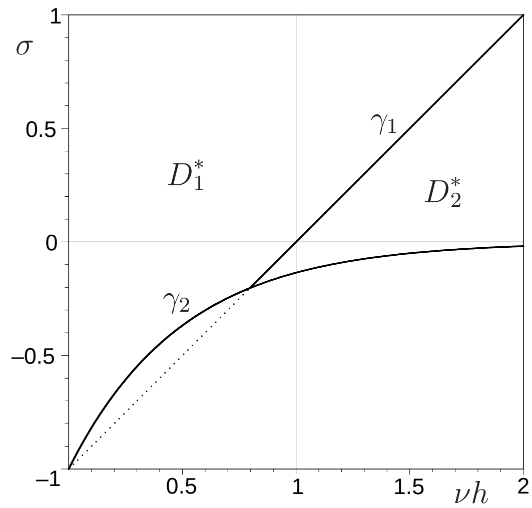
Здесь $\tilde{G}$ — функция Грина

$$\tilde{G}(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\bigg\{\log|z-\zeta| + \log|z-\overline{\zeta}| + 2\int_0^\infty \frac{\cos k(x-\xi)}{k-\nu}\mathrm{e}^{k(y+\eta)}\,\mathrm{d}k + \\ + 2\pi\mathrm{e}^{\nu(y+\eta)}\sin\nu(x-\xi)\bigg\} \tag{4.2}$$

(интеграл в последней формуле вычисляется в смысле главного значения). Известно [3], что уравнение (4.1) однозначно разрешимо в $L_2(S)$ для всех значений ν кроме возможно некоторого конечного набора значений $\nu_1, \ldots, \nu_N$.

Поскольку точка, для которой имеет место разрешимость базового интегрального уравнения (4.1), расположена на границе области параметров задачи (2.1)–(2.6), то, следуя схеме [3], необходимо установить малость $\big\|T_{(\nu,\sigma)} - \tilde{T}_{(\nu)}; L_2(S)\big\|$ при малых $\sigma > 0$ и $\nu > 0$, $\nu \neq \nu_1, \ldots, \nu_N$. Из этой оценки следует обратимость $A_{(\nu,\sigma)}$ для значений $(\nu, \sigma) \in D_i$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки $(\nu, 0)$. Как показано в [2], получение такой оценки приводит к достаточно громоздким вычислениям уже для случая полностью погруженного тела. Значительные аналитические трудности возникнут при попытке рассмотреть более общие постановки, например случай тел, пересекающих границу раздела сред, когда оценки норм операторов нужно получать не в $L_2(S)$, а в весовых пространствах и когда сами операторы являются уже не интегральными, а интегро-алгебраическими (см. например [4, 6]).

Оказывается, что получения оценок $\big\|T_{(\nu,\sigma)} - \tilde{T}_{(\nu)}\big\|$ можно избежать. Для этого заметим, что при $\sigma = 0$ оператор $T_{(\nu,\sigma)}$ совпадает с $\tilde{T}_{(\nu)}$ как при $\nu h < 1$ —



Фиг. 2:

на границе области D_1, так и при $\nu h > 1$ — на границе D_2. Это очевидно следует из формул (3.2), (3.3) и (4.2), при этом в случае $\nu h > 1$ следует учесть, что (2.7) при $\sigma = 0$ переходит в соотношение $\nu_0 = \nu\,\mathrm{th}(\nu_0 h)$. Далее заметим, что оператор $T_{(\nu,\sigma)}$ может быть продолжен аналитически из области D_i через ось $\sigma = 0$. При таком расширении области аналитической зависимости из D_i в $D_i^* \supset D_i$ точка $(\nu, 0)$, $\nu \neq \nu_1, \ldots, \nu_N$, для которой установлена обратимость оператора интегрального уравнения (4.1), становится искомой внутренней точкой области аналитической зависимости оператора $A_{(\nu,\sigma)}$, в которой существует ограниченный обратный оператор $A^{-1}_{(\nu,\sigma)}$.

Для того, чтобы описать области D_1^* и D_2^* обратимся к представлениям (3.3) функции Грина. Очевидно, что аналитическая зависимость интегральных слагаемых от параметров (ν, σ) нарушается только тогда, когда соответствующие интегралы расходятся. Это происходит в случае, когда меняется структура сингулярностей в подынтегральном выражении. Это происходит в двух случаях: при $\nu_0 = 0$ корень дисперсионного соотношения (2.7) выходит на границу интервала интегрирования и при $\nu_0 = \nu$, в этом случае происходит слияние полюсов и образуется полюс второго порядка. Таким образом, несложно заметить, что функция $G^{(2,2)}$ и, следовательно, оператор $T_{(\nu,\sigma)}$, определенный в (3.5), зависят аналитически от $(\nu, \sigma) \in D_i^* \supset D_i$, где области D_i^*, $i = 1, 2$, показанные на фиг. 2, выделяются в полуплоскости $\nu > 0$ линиями γ_i, $i = 1, 2$, определенными условиями $\nu_0 = 0$, $\nu_0 = \nu$ соответственно. Ввиду (2.7) линии γ_i имеют следующие аналитические представления:

$$\gamma_1 = \big\{(\nu, \sigma) : \nu h = 1 + \sigma\big\}, \quad \gamma_2 = \big\{(\nu, \sigma) : \sigma = -\mathrm{e}^{-2\nu h}\big\}.$$

Тем самым, из разрешимости интегрального уравнения (4.1) следует разрешимость интегрального уравнения (3.1) для всех значений $(\nu, \sigma) \in D_i$, за исключением некоторого возможно пустого нигде не плотного аналитического множества $\Xi_i \subset D_i$.

Укажем здесь отличия, возникающие при применении описанной выше схемы в случае, когда тело движется в верхнем слое. Выражения для входящей в (3.1) функции Грина $G^{(i,1)}$, т.е. потенциала источника, движущегося в верхнем слое, могут быть найдены в [1]. Оператор интегрального уравнения (3.5) включает функцию $G^{(1,1)}$ вместо $G^{(2,2)}$. При $\sigma = 0$ выражение для функции $G^{(1,1)}$ совпадает с выражением для функции Грина задачи о движении в слое конечной глубины. Интегральное уравнение этой задачи хорошо изучено. А именно, из результатов [11] следует, что в закритическом режиме $\nu h < 1$ уравнение разрешимо для всех значений ν. Случай $\nu h > 1$ (т.н. докритический режим движения с присутствием волн на бесконечности за телом) изучен в [5], где разрешимость интегрального уравнения установлена для всех значений ν кроме возможно некоторой последовательности $\{\nu_i\}$, сгущающейся в точке $\nu = h^{-1}$. Тем самым внутри каждой из областей D_i^*, $i = 1, 2$ имеется точка $a = (\nu, 0)$, в которой оператор интегрального уравнения A_a обратим, таким образом все рассуждения, приведенные выше для случая тела в нижнем слое, применимы без каких-либо ограничений.

5. Единственность решения краевой задачи.

Покажем, что если $(\nu, \sigma) \notin \Xi_i$, то решение задачи (2.1)–(2.6), полученное при помощи (3.1) и (3.4), единственно с точностью до прибавления к $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ произвольных констант. Для этой цели воспользуемся схемой, предложенной в [4]. Рассмотрим решение u' задачи с обратным направлением движения тела. Потенциалы $u'^{(1)}$ и $u'^{(2)}$ удовлетворяют условиям задачи (2.1)–(2.6), в которой условие $\lim_{x\to+\infty} |\nabla u^{(i)}| = 0$ следует заменить на условие

$$\lim_{x\to-\infty} |\nabla u'^{(i)}| = 0.$$

Очевидно, что для задачи с обратным направлением движения справедливы рассуждения предыдущего пункта, т.е. решение задачи для всех $(\nu, \sigma) \notin \Xi'_i$ может быть получено при помощи (3.1) и (3.4), с точностью до замены координат $x \to -x$, $\xi \to -\xi$ в выражениях для функции Грина. Здесь Ξ'_i — множество характеристических значений интегрального оператора для задачи с противотоком.

Из асимптотических формул, построенных в [1], следует, что если функции f и f' в условии (2.2) ортогональны константе, то в асимптотике потенциалов $u^{(i)}$ и $u'^{(i)}$ на бесконечности отсутствуют растущие слагаемые — логарифмические и линейные (слагаемое вида $\mathrm{const}\cdot x$ представлено в асимптотике $u^{(1)}$, $u'^{(1)}$ в случае, когда тело находится в верхнем слое). Таким образом, при $x \to +\infty$ потенциал u' и его производные ограничены, а потенциал u и его производные достаточно быстро убывают, аналогичная ситуация имеет место при $x \to -\infty$. Поэтому оказывается возможным применить формулу Грина для пары функций u и u' во всей бесконечной области, занятой жидкостью (более детальное описание схемы можно найти в [4, 6, 5]). Пусть $S \in L^{(j)}$. Сложим интегралы по

$W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ с весами $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ и получим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{2} \rho^{(i)} \int_{\partial W^{(i)}} \left[u^{(i)}\, \partial_n u'^{(i)} - u'^{(i)}\, \partial_n u^{(i)}\right] \mathrm{d}s = \\ &= \rho^{(j)} \int_S \left[u^{(j)}\, \partial_n u'^{(j)} - u'^{(j)}\, \partial_n u^{(j)}\right] \mathrm{d}s - \rho^{(1)} \int_F \left[u^{(1)}\, \partial_y u'^{(1)} - u'^{(1)}\, \partial_y u^{(1)}\right] \mathrm{d}x + \\ &+ \int_{F_0} \left\{\rho^{(1)} \left[u^{(1)}\, \partial_y u'^{(1)} - u'^{(1)}\, \partial_y u^{(1)}\right] - \rho^{(2)} \left[u^{(2)}\, \partial_y u'^{(2)} - u'^{(2)}\, \partial_y u^{(2)}\right]\right\} \mathrm{d}x. \qquad (5.1) \end{aligned}$$

Из условий (2.4) и (2.5) следует, что

$$\partial_y u^{(1)} = \partial_y u^{(2)} = \frac{\rho^{(1)} \partial_x^2 u^{(1)} - \rho^{(2)} \partial_x^2 u^{(2)}}{\nu(\rho^{(2)} - \rho^{(1)})}, \quad y = 0.$$

Аналогичная формула имеет место для потенциала u'. Воспользуемся данными соотношениями и условием (2.3) для замены в интегралах в (5.1) производных потенциалов по y на выражения, содержащие вторые производные по x. Нетрудно заметить, что после интегрирования по частям интегралы по F_0 и F исчезают. Тем самым, из (5.1) имеем

$$\int_S \left[u^{(j)}\, \partial_n u'^{(j)} - u'^{(j)}\, \partial_n u^{(j)}\right] \mathrm{d}s = 0, \quad S \in L^{(j)}. \qquad (5.2)$$

Допустим, что u — нетривиальное решение однородной задачи (2.1)–(2.6), т.е. $\partial_n u = 0$ на S. Пусть $(\nu, \sigma) \notin \Xi'_i$, т.е. для любой функции $f' \in C(S)$ в (2.2) существует решение u'. Из (5.2) получаем

$$\int_S u^{(j)} f' \, \mathrm{d}s = 0.$$

Поскольку f' — произвольная функция, ортогональная константе, то $u^{(j)} = \mathrm{const}$ на S. Поскольку $\partial_n u^{(j)} = 0$, то по теореме единственности решения задачи Коши для уравнения Лапласа получаем, что $u^{(j)} = \mathrm{const}$. Далее несложно показать, что при этом $u^{(i)} = \mathrm{const}$ в свободном слое.

Пусть тело расположено в верхней жидкости, т.е. $u^{(1)} = \mathrm{const}$. Тогда условие (2.5) приобретает вид $\partial_y u^{(2)} = 0$ на F_0. Из (2.1) и (2.4) получаем $\partial_y^2 u^{(2)} = 0$ на F_0. По теореме единственности задачи Коши для уравнения Лапласа $\partial_y u^{(2)} = \mathrm{const}$ и условия (2.6) влекут $u^{(2)} = \mathrm{const}$. Если тело расположено в нижней жидкости и $u^{(2)} = \mathrm{const}$, то условие (2.5) приобретает вид $\partial_y u^{(1)} = 0$ на F_0. В соответствии с утверждением, приведенным на с. 52 работы [3], потенциал $u^{(1)}$, удовлетворяющий условиям (2.1), (2.3), (2.6) и условию $\partial_y u^{(1)} = 0$ на F_0, имеет вид $\operatorname{ch} \lambda y (m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} + m_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}) + m_3 x + m_4$, где $m_1, \ldots, m_4$ — произвольные постоянные и λ — положительный корень уравнения $\nu \operatorname{th} \lambda h = \lambda$ (который существует при $\nu h > 1$). Первое из условий (2.6) влечет $u^{(1)} = \mathrm{const}$. Таким образом, установлено что однородная задача (2.1)–(2.6), где $\partial_n u = 0$ на S, для

$(\nu, \sigma) \notin \Xi_i'$ может иметь только тривиальное решение $u^{(i)} = c_i$, $i = 1, 2$, где c_i — константы.

Следует отметить, что множество исключительных значений Ξ_i для исходной задачи и Ξ_i' для задачи с противотоком совпадают. Выше установлена единственность исходной задачи для $(\nu, \sigma) \in D_i \setminus \Xi_i'$. Из единственности задачи (2.1)–(2.6) следует разрешимость интегрального уравнения (3.4) (доказательство этого факта является стандартным в теории потенциала, см. например доказательство теоремы 4 в [9, гл. 1, § 2]). Таким образом, $\Xi_i \subset \Xi_i'$. Повторив рассуждения с заменой исходной задачи на задачу с противотоком, получим $\Xi_i \supset \Xi_i'$, т.е. $\Xi_i = \Xi_i'$. Тем самым завершено доказательство Теоремы 1.

Автор благодарит Н.Г. Кузнецова за привлечение внимания к данной теме и за обсуждение работы.

Литература

[1] *Motygin O.V., Kuznetsov N.G.,* The wave resistance of a two-dimensional body moving forward in a two-layer fluid // Journal of Engineering Mathematics 1997. V. **32**. P. 53–72.

[2] Мотыгин О.В., Волнообразование и волновое сопротивление при движении плоских тел в однородной и двуслойной жидкости: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05, СПбГУ, СПб, 1996, 114 с.

[3] *Вайнберг Б.Р., Мазья В.Г.* К плоской задаче о движении погруженного в жидкость тела // Труды Моск. мат. общества. 1973. Т. **28**. С. 35–56.

[4] *Кузнецов Н.Г., Мазья В.Г.* Об однозначной разрешимости плоской задачи Неймана–Кельвина // Мат. сборник. 1988. Т. **135**. № 4. С. 440–462.

[5] *Motygin O.,* Uniqueness and solvability in the linearized two-dimensional problem of a body in a finite depth subcritical stream // European Journal of Applied Mathematics 1999. V. **10**. P. 141–155.

[6] *Kuznetsov, N., Motygin, O.* On the resistanceless statement of the two-dimensional Neumann–Kelvin problem for a surface-piercing tandem // IMA Journal of Applied Mathematics. 1999. V. **62**: 81–99.

[7] *Крейн С.Г., Трофимов В.П.* О голоморфных оператор-функциях нескольких комплексных переменных // Функц. анализ и его приложения. 1969. Т. **3**. № 4. С. 85–86.

[8] *Крейн С.Г., Трофимов В.П.* О нетеровых операторах, голоморфно зависящих от параметров // Труды Мат. факультета ВГУ, Труды семинара по функц. анализу. Сб. статей по функц. пространствам и операторным уравнениям. Воронеж 1970. С. 63–85.

[9] *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. 1988. Т. **27**. С. 131–228.

[10] *Чирка Е.М.* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985. 272 с.

[11] *Lahalle, D.* Calcul des efforts sur un profil portant d'hydroptere par couplage eléments finis – représentation intégrale // ENSTA Rapport de Recherche. 1984. V. **187**.