Materials Physics and Mechanics 29 (2016) 32-38 Received: May 2, 2016

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С УСЛОЖНЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.А. Трещев, М.В. Спасская*

ФГБОУ ВПО Тульский государственный университет, пр. Ленина 92, г. Тула, 300012, Россия

*e-mail: ma71ruska@mail.ru

Аннотация. В работе разбирается задача о круговой цилиндрической оболочке, воспринимающей равномерно распределенную нагрузку. Оболочка выполнена из материала с усложненными свойствами, а именно обладает свойством разносопротивляемости и ортотропии. В статье приведена система разрешающих уравнений поставленной задачи исследования, дополненная граничными условиями. Рассмотрено решение конкретной задачи изгиба оболочки, представлены наиболее характерные данные исследования НДС и выполнен анализ результатов расчета по классической теории при постоянных механических характеристиках с данными, полученными по предложенной модели с учетом разносопротивляемости.

1. Введение

В современной технике и в строительстве все чаще используются новые конструкционные материалы, обладающие усложненными свойствами. В основном это материалы, обладающие свойствами анизотропии и разносопротивляемости. Анизотропный материал – материал, который по разным направлениям имеет разные физико-механические свойства. Разносопротивляющийся - это материал, у которого проявляется зависимость деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния. Подобная зависимость обнаружена не только у новых материалов, каковыми являются различные композитные составы, полимеры, графиты, стеклопластики, но и у традиционных конструкционных материалов типа железобетона.

Использование классических теорий механики деформируемого твердого тела не позволяет обеспечить должную безопасность конструкций из разносопротивляющихся материалов. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов является достаточно новой актуальной областью механики деформируемого твердого тела. При этом в настоящее время в химической промышленности, строительстве, машино- и авиастроительных отраслях все больше применяются особо ответственные конструкции. Именно поэтому необходимы надежные теории расчета, согласованные с экспериментальными данными. Учет эффекта разносопротивляемости материала вносит значительные поправки в напряженно-деформированное состояние конструкций. Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния круговой цилиндрической оболочки. Для этого необходимо адаптировать определяющие соотношения максимально согласованные с экспериментальными данными, каковыми являются уравнения состояния [1], применительно к рассматриваемому типу конструкций, получить систему разрешающих

© 2016, Institute of Problems of Mechanical Engineering

дифференциальных уравнений, разработать алгоритм ее численного решения, реализовать его и решить тестовую задачу, а затем сопоставить полученные результаты с данными классической теории без учета разносопротивляемости материала.

2. Постановка задачи

Объектом исследования является круговая цилиндрическая оболочка, исходная схема которой показана на рисунке 1.

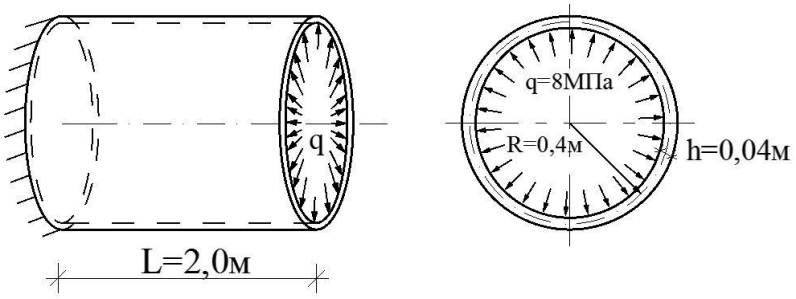

Рис. 1. Исходная схема задачи.

Геометрические характеристики: длинна оболочки $L = 2.0$ м; толщина $h = 0.04$ м; радиус срединной поверхности оболочки $R = 0.4$ м. Один торец цилиндрической оболочки полностью закреплен, а другой свободен от закреплений и загружений. Нагрузка на оболочку равномерно распределенная $q = 8$ МПа, приложенная перпендикулярно к внутренней поверхности оболочки. Материал оболочки – трехармированный тканный полимер П36-50.

Положение любой точки оболочки определяется в гауссовой системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, где β_1 - осевое направление вдоль образующей, β_2 - касательное направление, β_3 - радиальное направление. Местоположение любой точки на срединной поверхности цилиндрической оболочки определяются гауссовыми координатами β_1 и β_2.

При решении задачи будем использовать зависимости характерные для теории пологих тонких оболочек с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и нелинейной формализации Т. Кармана [2]:

а) компоненты деформации в срединной поверхности (удлинения и сдвиги):

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + 0.5\theta_1^2;\ \varepsilon_2 = \upsilon_{,1} + kw + 0.5\theta_2^2;\ \gamma = \upsilon_{,1} + u_{,2} + \theta_1\theta_2, \tag{1}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – удлинения; γ – сдвиг; u, υ, w – осевые, касательные и радиальные перемещения; $k = 1/R$ – главная кривизна; θ_1, θ_2 – повороты нормали к срединной поверхности:

$$\theta_1 = -w_{,1};\ \theta_2 = -w_{,2} + k\upsilon; \tag{2}$$

б) компоненты изгибной деформации (изменения кривизн и кручение):

$$\chi_1 = -w_{,11};\ \chi_2 = -w_{,22};\ \tau = -w_{,12}, \tag{3}$$

где χ_1, χ_2 – кривизны; τ – кручение;

в) компоненты деформации точки оболочки, отстоящей на расстоянии β_3 от срединной поверхности, выраженные через компоненты тангенциальных и изгибных деформаций:

$$e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3\chi_1;\ e_{22} = \varepsilon_2 + \beta_3\chi_2;\ \gamma_{12} = \gamma + 2\beta_3\tau. \tag{4}$$

Выражения (1)–(4) являются кинематическими соотношениями. Они справедливы для теории пологих оболочек в квадратичном приближении при малых упругих деформациях.

Для конкретизации структурной анизотропии материала оболочки принято ортотропное тело. В качестве физических зависимостей будем использовать упомянутые соотношения А.А. Трещева [1], которые с учётом принятых гипотез и при совпадении осей цилиндрической системы координат с главными осями анизотропии запишем в виде:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \left(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}\right)\sigma_{11} + \left[A_{1122} + B_{1122}\left(\alpha_{11} + \alpha_{22}\right)\right]\sigma_{22}; \\ e_{22} &= \left[A_{1122} + B_{1122}\left(\alpha_{11} + \alpha_{22}\right)\right]\sigma_{11} + \left(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}\right)\sigma_{22}; \\ e_{12} &= \left(A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12}\right)\tau_{12}. \end{aligned} \tag{5}$$

где A_{kkkk}, B_{kkkk}, A_{iijj}, B_{iijj}, A_{ijij}, B_{ijij} – константы, зависящие от модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации материала; $\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S$ – нормированные напряжения; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ – модуль вектора полных напряжений.

Вычисление констант определяющих соотношений для ортотропных материалов рекомендовано выполнять по результатам простейших экспериментов на одноосное растяжение и одноосное сжатие вдоль главных осей анизотропии, а также из экспериментов на сдвиг в главных плоскостях или из экспериментов по одноосному растяжению и одноосному сжатию в направлениях, ориентированных под углом 45º к главным осям анизотропии. При этом константы для ортотропного тела вычисляются следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= \left(1/E_k^+ + 1/E_k^-\right)/2; & B_{kkkk} &= \left(1/E_k^+ - 1/E_k^-\right)/2; \\ A_{iijj} &= -\left(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-\right)/2; & B_{iijj} &= -\left(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-\right)/2; \\ A_{ijij} &= \left(1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-\right) - 0.25\left[\begin{array}{l}\left(1/E_i^+ + 1/E_j^+ + 1/E_i^- + 1/E_j^-\right) - \\ -2\left(\nu_{ji}^+/E_i^+ + \nu_{ji}^-/E_i^-\right)\end{array}\right]; \\ B_{ijij} &= \sqrt{2}\left(1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-\right) - 0.125\cdot\sqrt{2}\cdot\left[\begin{array}{l}\left(1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - 1/E_j^-\right) - \\ -4\left(\nu_{ji}^+/E_i^+ - \nu_{ji}^-/E_i^-\right)\end{array}\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где $\nu_{ij}^+/E_j^+ = \nu_{ji}^+/E_i^+$; $\nu_{ij}^-/E_j^- = \nu_{ji}^-/E_i^-$; $E_k^\pm, E_i^\pm, E_j^\pm$ – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях, соответствующих главным осям анизотропии; $\nu_{ij}^\pm, \nu_{ji}^\pm$ – коэффициенты поперечной деформаций при растяжении и сжатии в направлениях соответствующих главным осям анизотропии; $E_{ij}^\pm$ – модули упругости при растяжении и сжатии в направлениях под углом 45° к соответствующим главным осям анизотропии.

Для рассматриваемого материала П36-50 [3] механические характеристики представлены в таблице 1.

Таблица 1. Механические характеристики материала П36-50

E_1^+	E_1^-	E_2^+	E_2^-	ν_{12}^+	ν_{12}^-
10,3 ГПа	11,77 ГПа	17,6 ГПа	18,54 ГПа	0,188	0,215

3. Вывод системы разрешающих уравнений

Для получения системы разрешающих уравнений задачи первоначально необходимо перестроить физические зависимости (5) по типу уравнений, используемых в форме метода упругих решений А.А. Ильюшина [4], проведя указанные преобразования, получим соотношения для напряжений через деформации:

$$\sigma_{11} = C_{11}e_{11} + C_{12}e_{12} - D_{11};$$
$$\sigma_{22} = C_{12}e_{11} + C_{22}e_{12} - D_{22}; \qquad (7)$$
$$\tau_{12} = C_{66}e_{12} - D_{12},$$

где $C_{11} = A_{2222}/\Delta$; $C_{12} = -A_{1122}/\Delta$; $C_{22} = A_{1111}/\Delta$; $C_{66} = 1/A_{1122}$;

$D_{11} = (A_{2222}T_{11} - A_{1111}T_{22})/\Delta$; $D_{22} = (A_{1111}T_{22} - A_{1122}T_{11})/\Delta$;

$D_{12} = T_{12}/A_{1122}$; $T_{11} = B_{1111}\alpha_{11}\sigma_{11} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma_{22}$; $T_{12} = B_{1122}\sqrt{2}\alpha_{12}\tau_{12}$;

$T_{22} = B_{2222}\alpha_{22}\sigma_{22} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\sigma_{11}$; $\Delta = A_{1111}A_{2222} - A_{1122}^2$.

Вне зависимости от принятых определяющих соотношений, статико-геометрические уравнения не подвергаются изменениям. Поэтому остаются справедливыми положения и уравнения геометрически нелинейной теории анизотропных оболочек. Внутренние усилия и моменты приводятся к срединной поверхности $\beta_3 = 0$, и при условии $\beta_3 k << 1$ уравнения равновесия для пологих оболочек принимают вид:

$$N_{1,1} + S_{,2} + q_1 = 0; \quad N_{2,2} + S_{,1} + k(Q_2 + H_{,1}) + q_2 = 0;$$
$$M_{1,1} + H_{,2} - Q_1 - N_1\theta_1 - S\theta_2 = 0; \quad M_{2,2} + H_{,1} - Q_2 - N_2\theta_2 - S\theta_1 = 0; \qquad (8)$$
$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + kN_2 + q_3 = 0,$$

где N_k, S – усилия в срединной поверхности оболочки; Q_k – поперечные силы; M_k, H – изгибающие и крутящий моменты; q_m – интенсивности внешней нагрузки по соответствующим направлениям.

Уравнения совместности деформаций имеют традиционное представление:

$$k\chi_1 + \chi_1\chi_2 - \tau^2 - \gamma_{,12} + \varepsilon_{1,22} + \varepsilon_{2,11} = 0. \qquad (9)$$

Усилия и моменты определим обычным способом - при помощи перехода к ним от напряжений:

$$N_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk}\, d\beta_3; \quad M_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kk}\beta_3 d\beta_3; \quad Q_1 = M_{1,1}. \qquad (10)$$

В задаче оболочка воспринимает нагрузку в виде внутреннего давления q_3. С учётом симметрии рассматриваемой задачи все параметры напряженно-деформированного состояния будут зависеть только от координаты β_1. Задача будет решаться при малых прогибах, тогда кинематические зависимости (1)–(4) принимают вид:

$$\varepsilon_1 = u_{,1}; \ \varepsilon_2 = kw; \ \chi_1 = -w_{,11}; \ e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3\chi_1; \ e_{22} = \varepsilon_2. \qquad (11)$$

Принимая во внимание симметрию конкретной рассматриваемой задачи и то, что оболочка нагружена внутренним давлением q_3, уравнения равновесия (8) и уравнение совместности деформаций (9) запишутся в виде:

$$N_{1,1} = 0; \ M_{1,1} - Q_1 - N_1\theta_1 = 0; \ Q_{1,1} - kN_2 + q_3 = 0; \ k\chi_1 + \varepsilon_{2,11} = 0. \qquad (12)$$

Проинтегрировав соотношения для напряжений (7) по толщине оболочки в соответствии с правилами (10) и подставив полученные зависимости для поперечной силы в уравнение равновесия (12), приходим к первому разрешающему уравнению в смешанном виде. Кроме того, используя уравнение неразрывности деформаций (12), окончательно формируем систему двух дифференциальных уравнений в смешанном виде относительно неизвестных угла поворота и продольной силы в направлении β_1:

$$\begin{cases} \theta_{1,1} + RL_{22}N_{2,11} = -R\eta_{2,11}; \\ \theta_{1,11} - \dfrac{1}{RP_{11}}N_2 = -\dfrac{1}{P_{11}}q_3 + \dfrac{1}{P_{11}}J_{11,1}, \end{cases} \tag{13}$$

где $L_{22} = \dfrac{C_{11}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)h}$; $P_{11} = C_{11}h^3/12$;

$$\eta_2 = -\frac{C_{12}}{(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)\cdot h}I_{11} + L_{22}I_{22};\ I_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij}d\beta_3;\ J_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij}\beta_3 d\beta_3;$$

Граничные условия жесткого закрепления при $\beta_1 = 0$:

$\theta_1 = 0;\ \varepsilon_1 = 0;\ \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\eta_2/L$.

Полученные разрешающие дифференциальные уравнения достаточно сложны, поэтому для их решения следует прибегать к численным методам, из которых в данном случае наиболее просто реализуется метод конечных разностей [5]. Разрешающие уравнения в форме метода конечных разностей здесь не приводятся ввиду их чрезмерной громоздкости. Система полученных алгебраических уравнений решается методом Гаусса.

4. Решение тестовой задачи, анализ полученных результатов

Приведем некоторые наиболее характерные результаты расчета напряженно-деформированного состояния описанной выше оболочки, а именно прогибы оболочки, осевые и касательные напряжения.

Проведем сравнение результатов расчета по предложенной модели с учетом разносопротивляемости с данными, полученными по классической теории при постоянных механических характеристиках ортотропного материала.

На рисунке 2 показано, что расхождение в значениях максимальных прогибов с учетом и без учета разносопротивляемости значительное и составляет 36,7 %.

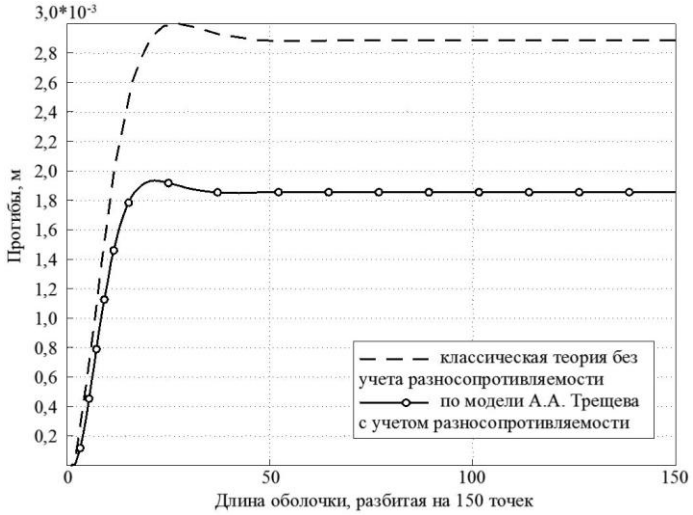

Рис. 2. Прогибы оболочки, м.

Как видно из рисунка 3, для окружных напряжений в заделке значения без учета разносопротивляемости больше на 69,8 %, чем с ее учетом. Однако, для максимальных значений растягивающих окружных напряжений данные с учетом разносопротивляемости превосходят результаты без ее учета незначительно, а именно на 5,6 %, кроме того, на расстоянии 0,3L–L разница в данных также невелика.

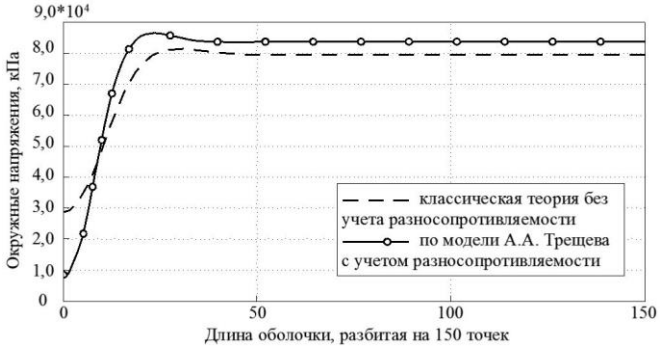

Рис. 3. Окружные напряжения, кПа.

На рисунке 4 представлены осевые напряжения. Для них значения, полученные без учета разносопротивляемости, в заделке превышают результаты, соответствующие модели, учитывающей разносопротивляемость материала на 34,6 %. Для максимальных сжимающих осевых напряжений значение без учета разносопротивляемости превосходит результат с ее учетом на 48 %.

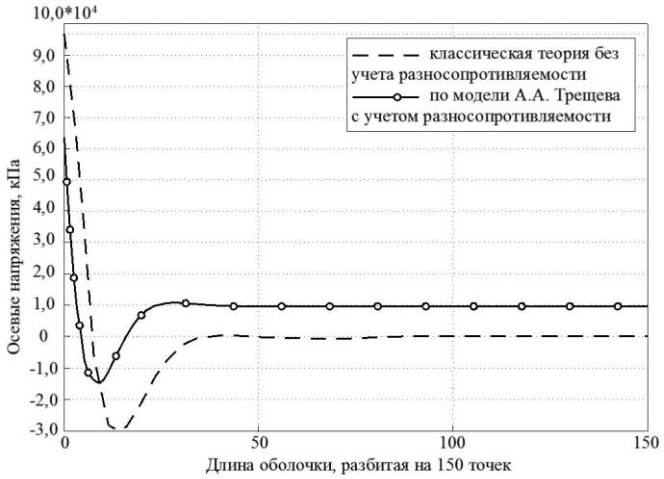

Рис. 4. Осевые напряжения, кПа.

Проанализировав результаты, представленные на рисунках 2-4, можно сделать вывод, что учет влияния разносопротивляемости при расчете цилиндрических оболочек значительно влияет на точность расчета параметров напряженно-деформированного состояния.

5. Вывод

Решение задач на основе классических теорий механики деформируемого твердого тела не позволяет обеспечить должную безопасность конструкций, выполненных из ортотропных разносопротивляющихся материалов. Учет зависимости деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния вносит значительные поправки в результаты исследований, а поэтому необходим для получения достоверных результатов расчета. Это также подтверждается решениями аналогичных задач [6, 7].

Литература

[1] А.А. Трещёв, *Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения* (ТулГУ, Тула, 2008).

[2] С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, *Пластинки и оболочки* (Наука, М., 1966).

[3] А.В. Розе, И.Г. Жигулин , М.Н. Душин // *Механика полимеров* **3** (1970) 471.

[4] А.А. Ильюшин, *Пластичность* (Изд-во АН СССР, М., 1963).

[5] П.М. Варвак, Л.П. Варвак, *Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций* (Стройиздат, М., 1977).

[6] А.А. Трещев, М.В. Спасская // *Известия ТулГУ. Технические науки* **11** (2014) 603.

[7] М.В. Спасская, А.А. Трещёв // *Строительство и реконструкция* **3(59)** (2015) 53.

STRESS-STRAIN STATE CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL MADE OF MATERIALS WITH COMPLICATED PROPERTIES

A.A. Treschev, M.V. Spasskaya*

Tula State University, Lenin Prospect 92, Tula, 300012, Russian Federation

*e-mail: ma71ruska@mail.ru

Abstract. The article is devoted the task of the circular cylindrical shell, is perceiving uniformly distributed load. The shell made of material with complicated properties, it has the property of different resistance and orthotropic. The article shows the system of resolving equations of the problem of research, supplemented by the boundary conditions. Gives the solution of the specific task of bending of the shell, shows most typical results of a study of stress-strain state and the analysis of results of calculation by the classical theory under constant mechanical characteristics with data by the proposed model under different resistant.

References

[1] A.A. Treschov, *The Theory of Deformation and durabilities for the Materials, sensitive to a kind of stress condition. Determining Correlations* (TSU, Tula, 2008). (In Russian).

[2] S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells* (McGraw-Hill book company, New York, Toronto, London, 1959).

[3] A.V. Rose, I.G. Zhigulin, M.N. Dushyn // *Mechanics of Polymers* **3** (1970) 471.

[4] A.A. Ilyushin, *Plasticity* (Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1963). (In Russian).

[5] P.M. Varvak, L.P. Varvak *The grid method in problems of calculation of building structures* (Stroyizdat, Moscow, 1977). (In Russian).

[6] A.A. Treschev, M.V. Spasskaya // *Proceedings of the TSU. Engineering* **11** (2014) 603.

[7] M.V. Spasskaya, A.A. Treschev // *Building and reconstruction* **3(59)** (2015) 53.