

## **ОТЗЫВ**

официального оппонента на диссертацию  
**Доманской Татьяны Олеговны «Математическое моделирование нелинейных упругих деформаций композитной плоскости с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками для гармонических материалов»,**  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела.

Диссертационная работа Доманской Т.О. посвящена математическому исследованию нелинейных проблем теории упругости композитных материалов с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками. В работе построены точные аналитические решения нелинейных плоских задач для двух моделей гармонических материалов – полулинейного и Джона. Представлены результаты численного решения нелинейных задач о трещинах, полученные методом конечных элементов в пакете FreeFem++, сделано сравнение с теоретическими результатами.

Важным преимуществом используемых в диссертационной работе моделей нелинейно-упругих материалов является возможность применения методов комплексных функций для решения плоских задач нелинейной теории упругости и получения точных аналитических решений. Применимость обеих моделей для анализа больших деформаций реальных материалов, в частности, резиноподобных материалов (эластомеров) доказана экспериментальными методами в работах ряда авторов.

**Актуальность темы.** Разрушение материалов и конструкций часто происходит по причине образования трещин и их развития под влиянием внешних нагрузок. Для оценки прочности и разрушения материалов обычно используют критерии, сформулированные в напряжениях линейной теории упругости. В окрестностях вершин трещин и точек приложения сосредоточенных сил деформации и углы поворота не ограничены по величине. Выполненные в диссертации исследования на основе полных уравнений нелинейной теории упругости своевременны и актуальны для теории упругости и ее практических приложений.

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, заключения и списка цитируемых литературы. Общий объем диссертации 126 стр.

**Во введении** обоснована актуальность темы исследования, сделан обзор литературы по нелинейным проблемам трещин, сформулированы цель и задачи исследования, его научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов и их достоверность. Сформулированы положения, выносимые на защиту, и представлена апробация результатов исследования.

**В первой главе**, небольшой по объему, приведены общие уравнения плоских задач (плоская деформация и плоское напряженное состояние) нелинейной теории упругости, которые позже использованы в диссертации при решении конкретных нелинейных задач о межфазных трещинах и сосредоточенных нагрузках.

**Вторая и третья главы** являются наиболее значимыми, они содержат результаты оригинальных исследований нелинейных задач для композитной плоскости с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками. Упругие свойства композита моделируются двумя типами материалов - Джона (вторая Глава) и полулинейным (третья Глава). Методами теории комплексных функций найдены точные аналитические решения указанных задач. Напряжения, деформации и перемещения выражены через две неизвестные аналитические функции комплексного переменного, определение которых сведено к решению проблемы Римана – Гильберта нахождения кусочно-голоморфной функции по ее скачку на межфазной линии композитной плоскости.

Более детально исследован случай свободной трещины при заданных напряжениях на бесконечности. Значительный теоретический и практический интерес представляют аналитические формулы для коэффициентов интенсивности номинальных напряжений и формулы, описывающие перемещения берегов трещины (раскрытие трещины). Выяснилось, что в случае материала Джона эти формулы полностью совпадают для нелинейных и линейных задач, для полулинейного материала имеются некоторые отличия в коэффициентах формул.

На основе полученных общих решений задач о межфазных трещинах в диссертации построены асимптотические разложения номинальных напряжений и напряжений Коши в окрестностях концов трещин. Показано, что номинальные напряжения имеют особенность  $1/\sqrt{r}$ , напряжения Коши не имеют особенности. Аналогичные асимптотические разложения выполнены в окрестности точки приложения сосредоточенной силы. Получено, что номинальные напряжения имеют особенность  $1/r$ , напряжения Коши не имеют особенности, перемещения содержат логарифмическую особенность. Отмечено, что решения аналогичных задач линейной теории упругости содержат такие же типы особенностей в особых точках.

Помимо теоретических исследований в этих главах приведены результаты решения нелинейных задач о межфазных трещинах, полученных методом конечных элементов в пакете FreeFem++, сделано сравнение с аналитическими расчетами. Вторая и третья главы содержат большой иллюстративный материал в виде графиков напряжений и перемещений.

В четвертой главе диссертации проведено сравнение решений нелинейных плоских задач о сосредоточенных силах и межфазных трещинах для двух моделей упругих материалов (полулинейного и Джона), полученных в двух предыдущих главах, между собой и с решениями аналогичных задач по уравнениям линейной теории упругости. Проведено также сравнение результатов расчетов, полученных по аналитическому решению задач, с результатами численного моделирования в пакете FreeFem++, и с результатами численного моделирования других авторов.

В **заключении** сформулированы основные результаты исследования, проведенного в диссертационной работе.

Перечисленные выше научные результаты являются **новыми**. Достоверность полученных результатов обеспечена строгой математической постановкой краевых задач теории упругости и математически безупречными методами решения, которые позволили получить точные аналитические решения нелинейных задач. Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, не вызывает сомнений.

Диссертационная работа Доманской Т.О. в целом имеет завершенный характер. Следует отметить хорошее оформление работы и грамотное изложение результатов. Не вызывает сомнений, что все представленные в работе аналитические и численные результаты являются оригинальными и проведены соискателем самостоятельно. В качестве замечаний и пожеланий можно отметить следующие:

1. В тексте диссертации и автореферата присутствуют повторы, например, в описании сингулярности напряжений и перемещений в окрестностях концов трещин.
2. В диссертации и автореферате есть упущения в формулах для перемещений. В некоторых формулах и на графиках присутствуют размерные перемещения, а в некоторых формулах – безразмерные величины. Можно догадаться, что перемещения отнесены к полудлине трещины, хотя об этом ничего не сказано.
3. Методом конечных элементов численно решена задача о растяжении однородной пластины с трещиной (разрезом) для модели полулинейного материала и проведено сравнение полученных результатов с результатами аналитического решения для этой модели. В дальнейшем можно было бы рассмотреть

композитную плоскость с межфазной трещиной для двух моделей материала – Джона и полулинейного, и провести сравнения численных результатов с аналитическим решением.

4. В автореферате на стр.8 и 10 в формулах для скачка перемещений появляется новая безразмерная переменная  $t$ , которая нигде не описана, тогда как в диссертации на стр.23 эта переменная описана.

Отмеченные замечания не уменьшают значимость результатов и ценность выполненной работы. Диссертант выполнил большой объем работ, показав высокую профессиональную квалификацию. На основании анализа диссертации, автореферата и опубликованных работ автора можно отметить, что представленная работа Доманской Т.О. является оригинальным и законченным научным исследованием.

Основные результаты диссертации опубликованы в 21 работе, из них три входят в список, рекомендованный ВАК, пять работ опубликованы в изданиях, индексируемых базами Web of Science и Scopus. Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации.

Таким образом, диссертация Доманской Татьяны Олеговны является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения сложных нелинейных плоских задач теории упругости для композитных и однородных материалов с межфазными трещинами и сосредоточенными нагрузками. Полученные результаты имеют важное значение для развития математических моделей и методов нелинейной теории упругости и практических приложений.

Диссертация Доманской Т. О. отвечает всем требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Доманская Татьяна Олеговна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела.

**Официальный оппонент;**

**Бригаднов Игорь Альбертович**

доктор физико-математических наук, профессор,

профессор кафедры информационных систем и

вычислительной техники федерального

государственного бюджетного образовательного

учреждения высшего образования

«Санкт-Петербургский горный университет»,

адрес: 199106, Санкт-Петербург, В. О., 21 линия, д. 2

email: brigadnov\_ia@pers.spmi.ru,

тел.: (812) 328-89-44



И.А.Бригаднова

Должность: Заместник отдела

Е.Р. Яновицкая

25

04

2019 г.