



Келлер Илья Эрнстович

**ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ  
ДЕФОРМАЦИИ В МЕТАЛЛАХ С СУЩЕСТВЕННОЙ  
ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ  
И ИХ ОПИСАНИЕ В РАМКАХ ТЕОРИИ  
ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета

**АРУТЮНЯН Роберт Ашотович**

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем механики Российской академии наук им. А.Ю.Ишлинского

**РАДАЕВ Юрий Николаевич**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета

**РАДЧЕНКО Владимир Павлович**

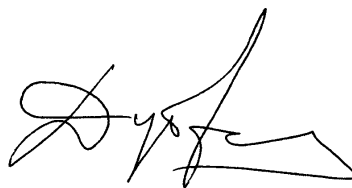
**Ведущая организация:** Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Комсомольск-на-Амуре

Защита диссертации состоится 4 декабря 2014 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 в Институте проблем машиноведения Российской академии наук по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., д. 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Института проблем машиноведения и на сайте института по адресу <http://www.ipme.ru>.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » сентября 2014 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор технических наук, профессор



В.В. Дубаренко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы и степень ее разработанности.** При определенном сочетании температурно-скоростных условий и микроструктурном состоянии самых распространенных конструкционных сталей и сплавов можно наблюдать совершенно нетипичные сценарии развития локализации деформации в испытании одноосным растяжением. Вместо неограниченного роста шейки, приводящего к разрушению, регистрируется множественное образование и замораживание шеек или распространение очагов локализации деформации. Эти нелокальные и нелинейные явления порождаются состояниями материала (высокотемпературной ползучестью, структурной сверхпластичностью, сверхпластичностью превращения, динамическим деформационным старением), характеризуемыми некоторыми особыми зависимостями напряжения от скорости деформации, тесно связанными с его устойчивостью. Исследования механики этих явлений имеют разрозненный характер. Понимание особенностей развития локализации деформации в связи с характером зависимости напряжения течения от скорости деформации имеет значение для описания связанных процессов локализации деформации и деградации внутренних и приповерхностных свойств, предшествующих вязкому разрушению и лимитирующих качество металлических изделий при их обработке давлением. Задачи деформирования вязкопластических сред решались А.А.Ильюшиным, Ю.Н.Работновым, Л.М.Качановым, С.А.Шестериковым, В.П.Мясниковым, Г.И.Быковцевым, Д.М.Климовым, О.В.Сосниным, И.А.Кийко, А.М.Локощенко, А.В.Гноевым, В.М.Чесноковым, Д.В.Георгиевским, С.Е.Александровым, Р.А.Арутюняном, В.И.Астафьевым, Ю.Н.Радаевым, Л.В.Степановой, А.П.Радченко, В.Г.Баженовым, А.А.Бурениным, И.Ю.Цвелодубом и многими другими.

На микроскопическом уровне рассмотрения неустойчивость вязкопластического деформирования металла имеет вполне естественные причины. Самоорганизация иерархии микроструктур отражает невыпуклость функционалов внутренней энергии и диссипации на некоторых масштабных уровнях. В результате в макроскопическом объеме материала при определенных условиях могут появляться или исчезать стационарные или распространяющиеся формы локализации пластической деформации. Внутренняя неустойчивость на развитой стадии пластического деформирования металлов является причиной многообразия закономерностей их поведения.

Исследования физики пластичности привели к развитию фундаментальных концепций о геометрии, нарушении локальной топологии, конфигурационных силах, самоорганизованной критичности при течении сплошного твердого тела с дефектами, представлениям о пластичности как непрерывной последовательности превращений материала.

Однако с прикладной точки зрения качество определяющих уравнений диктуется их формой, позволяющей корректно идентифицировать материальные функции и решать задачи. Удачная форма феноменологических определяющих уравнений способствует разрешению проблем существования, единственности и устойчивости решения нелинейной краевой задачи течения вязкопластической среды. Поэтому важное научное и прикладное значение имеет проникновение математической теории пластичности в области с аномальной реологией и аномальными модами локализации деформаций. Массовых результатов по пространственной задаче теории пластичности получена недавно Ю.Н.Радаевым [1] с помощью геометрических и алгебраических методов исследования нелинейных уравнений матфизики.

Нелокальность явлений развития и распространения локализации деформации выводит их за рамки принципа образца, общепринятого в теории определяющих соотношений механики деформируемого твердого тела. Разработка методов классификации моделей вязкопластичности в соответствии с качественными особенностями локализации деформации представляется нам актуальной задачей механики.

Определенные инструменты для этого может дать анализ простейшей задачи растяжения полосы со свободными границами методами устойчивости в линеаризованной и слабо-нелинейной формулировках, а также соображения симметрии нелинейной системы уравнений данной задачи, аргументом в пользу которых является автомодельный характер рассматриваемых промежуточно-асимптотических явлений.

Под (точечными) симметриями рассматриваемой системы уравнений в частных производных здесь понимаются такие её преобразования, осуществляемые конечными трансформациями в пространстве зависимых и независимых переменных, которые не изменяют её вида. Данные симметрии образуют группу, каждому элементу которой соответствует определенное инвариантное или частично-инвариантное решение системы.

Может быть поставлена задача систематического поиска частных моделей вязкопластичности среди определяющих уравнений с заданной структурой и произвольными материальными параметрами или функциями, обеспечивающими расширения группы симметрии уравнений механики. Данная задача известна как задача групповой классификации [2]; результаты ее решения для некоторых систем принадлежат Л.В.Овсянникову, В.А.Дородницыну, В.О.Бытеву, Э.А.Леоновой. Особенный интерес представляют случаи максимальных расширений группы симметрии, когда она становится бесконечномерной. Эти ситуации соответствуют существованию бесконечного числа различных инвариантно-групповых решений, что для нелинейных систем оказывается особенным случаем.

Такие исключительные состояния материала, максимально расширяющие группу симметрии нелинейных уравнений механики сплошной среды, сообщают системе максимальную свободу для достижения экстремума «функционалу диссипации» в деформируемом теле или некоторой его конечной части [3]. Если материал оказывается способным к адаптации, позволяющей подчинять локальное состояние материала существенно нелокальному экстремальному принципу, то такая адаптация способствует «притяжению» поведения материала к указанным частным его видам. Данные интуитивные соображения оправдывают поиск частных реологических состояний материала, расширяющих симметрию полевых уравнений.

В представляемой работе данная поисковая задача решается для вязкопластических сред без памяти к предыстории деформирования в рамках квазистатических изотермических процессов и двумерной формулировки уравнений. Эти гипотезы выделяют материалы, чувствительные к скорости деформации и являющиеся предельным случаем широкого класса наследственных вязкопластических сред, в которых наблюдаются нелинейные явления интересующего нас рода, асимптотический характер которых оправдывает принятые упрощения, относящиеся к «укорочению» памяти.

**Целями и задачами** диссертационной работы являются:

– Выполнение анализа экспериментальных работ по исследованию локализации деформации в металлах, свойства которых зависят от скорости деформации. Анализ существующих моделей, предназначенных для описания особенностей развития и распространения локализации деформации в вязкопластических средах. Формулировка подходов к решению проблемы классификации определяющих соотношений вязкопластичности в соответствии с особенностями развития локализации деформации при квазистатическом одноосном растяжении образца. Принятие и обоснование гипотез, позволяющих поставить наиболее простую математическую задачу. Исследование перспектив применения методов, основанных на соображениях устойчивости.

– Исследование сформулированной задачи, имеющей физическую и кинематическую нелинейности, в слабо нелинейной формулировке и ее решение методами возмущений. Получение условий существования автомодельных локализованных или распространяющихся неоднородностей свободной границы в зависимости от значения материального параметра чувствительности к скорости деформации в возмущаемом состоянии, а также нахождение формы и закономерностей эволюции во времени таких неоднородностей.

– Исследование уравнений квазистатического течения вязкопластической среды с тензорно-линейными определяющими соотношениями, связывающими тензоры напряжений и скорости деформации и имеющими произвольную материальную функцию аргумента интенсивности скорости дефор-

мации, в существенно нелинейной постановке. Поиск частных видов материальной функции, обеспечивающих расширения симметрий полевых уравнений. Поиск нелокальных по этой функции условий существования автоволновых решений таких уравнений. Для всех найденных случаев необходима разработка математического аппарата для решения краевых задач.

**Методы исследований.** Работа имеет теоретический характер. Используются соображения устойчивости уравнений в частных производных по возмущению начальных условий, метод многих масштабов асимптотического анализа, методы группового анализа и групповой классификации дифференциальных уравнений, геометрические методы решения квазилинейных/пфаффовых систем, критерий расщепляемости квазилинейных систем, качественные и численные методы исследования автоволновых систем, сеточные методы решения уравнений в частных производных.

**Значимость результатов работы.** Теоретическая ценность научных работ соискателя заключается в разработке элементов математической теории вязкопластичности с  $N$ -образной зависимостью напряжений от скорости деформаций, перспективах аналитического решения задач о распространении существенно двумерных и трехмерных автоволн локализации вязкопластической деформации. Предложенная модель содержит особенность макрокинетических свойств материала, описывающую феноменологию критического явления в металлах с существенной зависимостью напряжения течения от скорости деформации, в качестве которого могут выступать превращения металлических сплавов, деформируемых в состоянии сверхпластичности.

Практическая значимость результатов заключается в перспективах численного моделирования процессов обработки металлов давлением в горячем состоянии, сопровождающихся медленными волновыми процессами распространения очагов локализации деформации, вносящих важный вклад в качество готовых изделий и их поверхности. В частности, к таким процессам относится медленная формовка панелей в авиастроении в режиме сверхпластичности. Работа обращает внимание на роль инверсии зависимости интенсивности напряжений от интенсивности скоростей деформаций металлических сплавов, определяющей условия возникновения и течения медленных волновых процессов. Определенную практическую значимость имеют формы решений уравнений течения вязкопластического материала со степенной вязкостью с двумя видами спирально-винтовой симметрии, которые можно использовать для анализа экспериментов на кручение сплошных цилиндров.

**Достоверность** результатов обеспечивается анализом существующих экспериментальных и теоретических работ по теме диссертации, обсуждением результатов работы на профильных семинарах, подтверждается систематическим сведением полученных результатов к известным частным случаям.

**Научная новизна.** В работе впервые формулируется проблема классификации определяющих соотношений вязкопластичности в соответствии с возможностями описания ими особенностей локализации деформации в металлах с существенной зависимостью от скорости деформации, для решения которой использован ряд нелокальных методов, не использующих принцип образца. Впервые выведены уравнения слабо-нелинейной формулировки задачи растяжения вязкопластической полосы со свободными границами и проанализированы их автомоделные решения с наиболее медленной эволюцией. Для решения проблемы классификации в рамках нелинейной формулировки уравнений автором сформулирована гипотеза об устойчивости реологических состояний, расширяющих группу симметрии данных уравнений, в свете которой алгебраическими и геометрическими методами исследования найдено два класса вязкопластических сред, характеризующихся степенной либо некоторой немонотонной зависимостью от скорости деформаций, последний из которых в научной литературе не известен и обеспечивает максимальное расширение группы симметрии уравнений до бесконечномерной. В рамках модели со степенной реологией впервые выписаны формы решений с однородной и неоднородной спиральными цилиндрическими симметриями. Для новой модели с немонотонной материальной функцией, качественно соответствующей реологии материалов со сверхпластичностью превращения, автором развиты элементы математической теории точного и численного интегрирования краевых задач, получены и проанализированы новые центрированные автомоделные решения, исследованы новые автосолитонные решения, известные в экспериментах на одноосное растяжение образцов как «бегающие шейки».

**Положения, выносимые на защиту.** Автор защищает:

1. Формулировку проблемы классификации определяющих соотношений вязкопластичности в соответствии с описанием ими качественных особенностей локализации деформации в телах конечных размеров.

2. Анализ существующих теорий, объясняющих особенности локализации деформации в металлах с существенной зависимостью от скорости деформаций на основе соображений устойчивости.

3. Слабо-нелинейный анализ эволюции форм свободных границ вязкопластической полосы при ее одноосном растяжении в зависимости от чувствительности к скорости деформации материала.

4. Гипотезу об экстремальных свойствах (по отношению к функционалу диссипации) реологических состояний, расширяющих симметрии уравнений квазистатического течения вязкопластической среды.

5. Запись уравнений равновесия и совместности квазистатического течения вязкопластической среды с произвольной материальной функцией зависимости напряжения течения от интенсивности скоростей деформаций в

виде квазилинейной однородной системы.

6. Результат групповой классификации рассматриваемых уравнений, выявивший конечномерное расширение группы точечных симметрий на классе материальных функций степенного вида. Формы инвариантно-групповых решений, естественно записываемые в цилиндрических координатах.

7. Класс немонотонных  $N$ -образных функций в качестве материальных функций уравнений плоской деформации, необходимый и достаточный для полной интегрируемости (расщепляемости на две точно линеаризуемые подсистемы) этих уравнений и выделяющий бесконечномерные расширения групп точечных симметрий, действующих на каждую из подсистем.

8. Элементы математической теории задачи плоской деформации вязкопластической среды с материальной функцией  $N$ -образного вида, включающей приведение уравнений гиперболического и эллиптического типов к простейшему виду, методы интегрирования и кинематические соотношения в характеристических координатах уравнений гиперболического типа.

9. Класс центрированных автомодельных решений, соответствующих гиперболическому типу уравнений плоской деформации вязкопластической среды с материальной функцией  $N$ -образного вида.

10. Одномерная автоволновая система, состоящая из вязкопластического образца с материальной функцией  $N$ -образного вида и нагружающего устройства с конечной жесткостью, описывающая распространение зоны локализации деформации либо очага локализации деформации на фоне однородного распределения скорости деформаций.

**Личный вклад автора.** Работы [5-10,18-20] выполнены без соавторов. В работах [1-4,11-13] соискателю принадлежит формулировка идей и гипотез, математическая постановка и решение задачи (за исключением работы [4], в которой выкладки выполнены соавторами); концептуальная постановка задачи и обсуждение результатов проводились совместно с П.В. Трусковым. В работах [14-17] соискателю принадлежит постановка задач, соавторами выполнена техническая часть работы. Оптимальные системы подалгебр для степенной жидкости и численный анализ слабо-нелинейного приближения задачи о шейке выполнены Д.С.Петуховым под руководством соискателя.

**Апробация работы.** Результаты работы представлены на

– Euromech Colloquium-458 “Advanced Methods in Validation and Identification of Nonlinear Constitutive Equations in Solid Mechanics”, 21-23.09.2004, Москва

– Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды», 11-15.10.2005, 19-24.06.2010, Ростов-на-Дону

– Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике, 22-28.08 2006, 26-29.08.2011, Н.Новгород



- Конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела», 13-15.10.2008, Пермь
- Конференциях «Механика микронеоднородных материалов и разрушение», 24-28.03.2008, 24-28.05.2010, Екатеринбург
- XXXVII International Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”, 30.06-05.07.2009, Санкт-Петербург
- Городском семинаре по механике под руководством чл.-корр. Д.А. Индейцева, 29.01.2009, 28.01.2010, 08.11.2012, 03.04.2014 г. (представление докторской диссертации), Санкт-Петербург
- Зимних школах по механике сплошных сред, 22-29.02 2005, 24-27.02.2009, 28.02-3.03.2011, 18-22.02.2013, Пермь
- Семинаре лаборатории Института проблем механики под руководством чл.-корр. Р.В. Гольдштейна, 05.12.2012, Москва
- Городском семинаре по функционально-дифференциальным уравнениям под руководством д.ф.-м.н. В.П. Максимова и д.ф.-м.н. П.М. Симонова, 20.03.2013, Пермь
- Семинаре лаборатории дифференциальных уравнений Института гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН под руководством д.ф.-м.н. А.П. Чупахина, 23.04.2013, Новосибирск
- Семинаре лаборатории Математического института им. М.А.Стеклова под руководством академика А.Г. Куликовского, 21.05.2013, Москва
- VII и VIII Всероссийских конференциях по механике деформируемого твёрдого тела (с международным участием). 15-18.10.2013, Ростов-на-Дону; 16-21.06.2014, Чебоксары
- Семинаре отдела механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН под руководством академика Б.Д. Аннина, 21.04.2014, Новосибирск (представление докторской диссертации)
- Всероссийской конференции «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова, 18-22.04.2014, Новосибирск

**Исследования по теме диссертационной работы выполнены в рамках следующих проектов:**

- Грантов РФФИ № 10-01-96053-Урал-а и РФФИ № 13-01-00365-а
- Интеграционного проекта фундаментальных научных исследований, выполняемых совместно учеными УрО, СО и ДВО РАН № 12-С-1-1015
- Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН № 12-Т-1-1004
- Госконтракта № 8220 (2012-2013 гг.) между Министерством образования и науки Российской Федерации, УрО РАН и ИМСС УрО РАН

– Гранта Правительства Российской Федерации Пермскому национальному исследовательскому политехническому университету в рамках Постановления № 220 (договор № 14.В25.310006 от 24.06.2013).

**Публикации по теме диссертации.** Все результаты диссертации изложены в статьях [1-10] в научных журналах, рекомендованных ВАК, и статьях [11-20] в других научных изданиях.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 518 наименований. Объём работы — 330 страниц.

### **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Во **введении** обосновывается актуальность темы, формулируются цели исследования и высказывается основная его идея (см. разделы «Актуальность темы и степень ее разработанности» и «Цели и задачи исследования» автореферата), намечается план работы и выбираются необходимые методы. Содержание вводной главы отражено в публикациях автора [1,7-10,13].

В **первой главе** содержится обзор экспериментов и моделей развития локализации деформации при испытаниях одноосным растяжением металлов и сплавов, проявляющих зависимость от скорости деформации.

В экспериментах, проводимых над металлами и сплавами, находящимися в состоянии структурной (микрозеренной) сверхпластичности, обнаруживается множественное образование и замораживание шеек при аномально низкой скорости их роста. Эти особенности проявляются на фоне аномально высоких локальных по скорости деформации и температуре значений скоростного упрочнения, которое практически не сопровождается деформационным упрочнением и изменением микроструктуры. Механике структурной сверхпластичности посвящены монографии Р.А.Васина, Ф.У.Еникеева, О.М.Смирнова, Е.М.Чумаченко, М.А.Цепина.

Испытания металлических сплавов с неподготовленной структурой (А.А.Бочвар, Я.М.Охрименко, О.М.Смирнов, А.А.Пресняков [4], Я.И.Рудаев [5] и др.) сопровождаются заметным падением напряжения течения в узком диапазоне скоростей деформации и температур, обусловленным превращением, приводящим к формированию микрозеренной структуры. В этих режимах зависимость напряжения от скорости деформаций (и температуры), отвечающая предельному состоянию микроструктуры сплава, имеет немонотонный характер. В данных испытаниях регистрируется распространение очага локализации деформации — «бегающая шейка» [4]. Скорость распространения шейки, определенная в работе по данным эксперимента А.А.Преснякова [4], оказывается приблизительно равной скорости относительного движения концов образца, что свидетельствует об активном течении основного процесса, на фоне которого развивается локализация. Аналогичный немонотон-

ный характер предельной кривой зависимости нижнего предела текучести от скорости деформаций или температуры имеют сплавы, испытывающие эффект Портевена – Ле Шателье, одноосное растяжение которых обеспечивается переносом очагов локализации деформации вдоль образца. Участок инверсии зависимости от скорости деформации в обоих случаях может порождаться механизмами перестройки дислокационной структуры, динамического деформационного старения, динамической рекристаллизации, фазовых превращений, в результате которых снимается деформационное упрочнение и/или упрочнение, вызванное старением. Инверсия экспериментально зарегистрирована и описана в работах А.Надаи, С.Боднера, Н.Н.Давиденкова, Ю.Эстрина, Л.Кубина, П.Маккормика и др. Существенное локальное падение напряжения, сопровождающее превращение, родственно с аномалиями макрокинетических свойств, сопровождающими критические явления в физике; этап предварительного измельчения зерна структурной сверхпластичности маскирует этот сильно нелинейный аспект явления, изучение механики которого может дать критерий истинной сверхпластичности [4,5].

Модели существенно нелинейных диссипативных систем, описывающие переход в состояния с аномально низким напряжением течения или повышенным скоростным упрочнением и ассоциируемые со сверхпластичностью, предлагались О.Б.Наймарком, Я.И.Рудаевым, Э.Л.Аэро. В контексте сверхпластичности модели развития и распространения очагов локализации деформации нам не известны. Однако довольно хорошо развитой оказывается теория эффекта Портевена – Ле Шателье, основанная на аналогии с автоколебаниями/автоволнами в системах с N-образной зависимостью от скорости деформации. В ее развитие внесли значительный вклад А.Макрейнольдс, А.Коттрелл, А.Слизвик, Н.Н.Давиденков, П.Пеннинг [6], Ю.Эстрин, Л.Кубин, П.Маккормик [7], С.Мезарович и др. Параллельно разрабатывались идейно похожие модели внешнего сухого трения в геомеханике (Дж.Дитерих, А.Руина, Дж.Райс, Ю.Эстрин и др.). В результате была сформулирована модель, ядро которой составляет элемент с N-образной зависимостью напряжения от скорости деформации, соединенный с нагружающим устройством с конечной жесткостью, что в совокупности сводится к простейшей системе с релаксационными колебаниями. Маккормик и независимо Дитерих и Руина предложили эту сингулярную систему регуляризовать эволюционным уравнением для внутренней переменной, описывающим процесс старения/адгезии. В работах Х.Збиба, Э.Айфантиса [8], П.Хэйнера, М.Зейцера, Г.Анантакришны используется регуляризация указанной сингулярной системы оператором Лапласа, и соответствующая модель описывает автоволны локализации деформации. Кратко излагается теория определения асимптотических параметров распространения возмущения по неустойчиво-

му состоянию в открытой диссипативной распределенной системе [9]. Регуляризации конечно-разностными временными операторами, использованные М.А.Лебедкиным, Дж.Виллисом и др, описывают тонкие эффекты проявления внутренней динамики — самоорганизованную критичность и возникновение станного аттрактора. Описанные выше модели описывают возникновение устойчивого предельного цикла по жесткому сценарию и существование действительной скорости распространения очага локализации деформации, ассоциируемые с участком скоростного разупрочнения. N-образную зависимость от скорости деформаций наблюдают также при холодной вытяжке твердых полимеров (С.Л.Баженов и др.) и вискозиметрических течениях полимерных растворов (Г.В.Виноградов и др.) вместе с комплексом аналогичных автоколебательных/автоволновых явлений; модели таких сред имеют параметр порядка и эволюционное уравнение для него. Делается вывод, что обычно принимаемые модельные представления о структурной сверхпластичности не способны описывать явление «бегающей шейки» в формулировке А.А.Преснякова.

Обсуждаются альтернативные представления о волнах локализации вязкопластической деформации, высказанные Л.Е.Поповым, А.Корбелом, Х.Дыбиецом, Л.Б.Зуевым, В.И.Даниловым, М.М.Кришталом и др.

Выполненный анализ позволяет принять некоторые гипотезы и сформулировать уравнения. Рассматриваются квазистатические процессы движения несжимаемой вязкопластической среды. Реология последней принимается в форме конечной связи тензоров напряжений и скоростей деформаций как предельного случая описания наследственных свойств материала. Указанные тензоры полагаются пропорциональными, а их интенсивности — связанными некоторой функцией. Не учитываются локальные упругие свойства, деформационное упрочнение и разупрочнение материала; роль резервуара для сброса энергии в актах потери устойчивости материала отводится внешней нагружающей системе с конечной жесткостью. Пренебрегается тепловыми эффектами, а также температурой как независимой мерой термической активированности процесса вязкопластического течения. Указаны случаи, не позволяющие принять первую гипотезу; вторая оправдывается избыточностью учета в модели двух контролируемых параметров для рассматриваемых материалов, обнаруживающих температурно-скоростную аналогию (зависимость напряжения течения от параметра Зенера – Холломона). Записываются уравнения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\tau(\xi)}{\alpha\xi}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{D}$  — тензоры напряжений и скорости деформаций,  $p$  — гидростатическое давление,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор второго

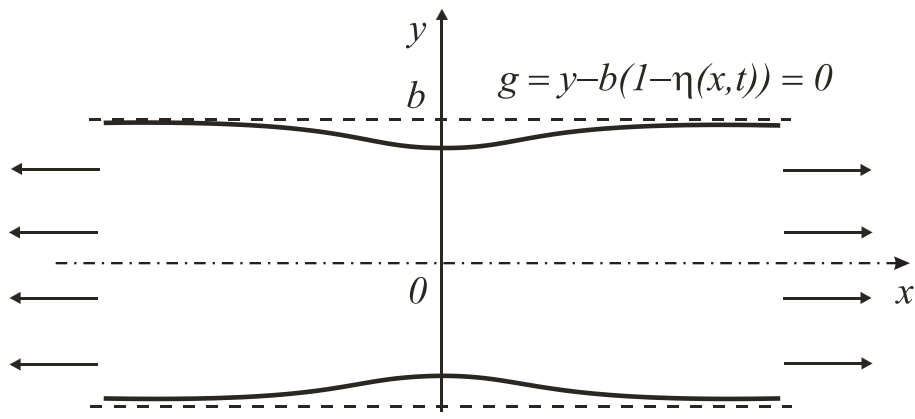


Рис. 1. Схема задачи о шейке.

ранга,  $\mathbf{v}$  — скорость перемещений,  $\xi = \sqrt{\alpha^{-1} \mathbf{D} : \mathbf{D}}$  — интенсивность скорости деформации, а  $\tau(\xi)$  — материальная функция, на которую априори не накладываются какие-либо ограничения. Множитель  $\alpha$  в определении интенсивности скорости деформации выбирается в зависимости от размерности пространства так, чтобы для задачи однородного одноосного растяжения в силу определяющих соотношений величина  $\tau = \sqrt{\alpha \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}$  (индекс  $d$  обозначает девиаторную часть) становилась равной растягивающему напряжению,  $\xi$  — скорости деформации растяжения, а  $\tau \xi$  — скорости диссипации энергии. В работе рассматривается формулировка уравнений, соответствующая плоской деформации, для которой  $\alpha = 2$ , а в гл. 4 рассматривается пространственная формулировка, для которой  $\alpha = \frac{3}{2}$ .

Данные уравнения дополняются статическими

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla g = 0 \quad (2)$$

и кинематическим

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla g = 0 \quad (3)$$

условиями на свободных границах, неявно заданных уравнением  $g(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор материальной точки,  $t$  — время (рис. 1). Кинематическое условие (3) вносит в задачу производную по времени, то есть квазистатическое течение вязкопластического тела может сопровождаться эволюцией его свободных границ.

В задаче об одноосном растяжении конечной полосы на ее концах в текущий момент времени задается распределенная растягивающая нагрузка, соответствующая некоторому значению интенсивности скорости деформации  $\xi = \xi_0$ ; для бесконечной полосы на ее концах задается условие  $\xi \rightarrow \xi_0$ .

Такая постановка имеет физическую нелинейность в определяющих соотношениях (1) и кинематическую нелинейность в условиях (2)-(3) на свободных границах. Данная задача содержит неопределенный элемент — функцию

$\tau(\xi)$ , поэтому требуется качественный анализ решений данной задачи в зависимости от вида этой функции. В задачу устойчивости одноосного растяжения полосы и слабо нелинейную формулировку задачи войдет лишь локальное значение данной функции в точке, соответствующей возмущаемому состоянию с однородным полем напряжений. В задаче в сильно нелинейной формулировке необходимо вести поиск частных видов данной функции, расширяющих симметрии уравнений (1). Уравнения (1) выполняются в точках среды, где выполнен критерий текучести  $\tau = \tau_*$ ; впрочем, для важных специализаций функции  $\tau(\xi)$ , найденных в работе, критерий выполняется автоматически (по крайней мере для автомодельных процессов, избавляющих от необходимости рассматривать переходные процессы).

Определяется функция

$$m(\ln \xi) = \frac{\ln \tau}{\ln \xi} = \frac{\tau' \xi}{\tau}, \quad (4)$$

значение которой называется чувствительностью к скорости деформаций, играющая важную роль при описании процессов течения вязкопластических сред. Известные феноменологические признаки сверхпластичности связываются с локальными или нелокальными аномалиями функции  $m(\ln \xi)$ .

Содержание главы отражено в публикациях автора [5,7,8,17].

**Вторая глава** посвящена поиску возможностей объяснения качественных различий развития локализации деформации при одноосном растяжении вязкопластической полосы соображениями устойчивости данного процесса в зависимости от локального значения материального параметра  $m$ . Показано соответствие критерия устойчивости А.А.Ильюшина [10]

$$\left( \frac{\delta b(t)}{b(t)} \right)' \bigg/ \frac{\delta b(t)}{b(t)} \bigg|_{t=0} = \frac{\delta v}{\delta b(0)} < 0, \quad (5)$$

сформулированного в терминах текущего лагранжева подхода, гидродинамическому критерию устойчивости А.Ю.Ишлинского, сформулированному в терминах эйлерового подхода. В (5)  $b(t)$  — текущая полуширина невозмущенной полосы в произвольном сечении,  $\delta b(0) < 0$  задает полуширину начального симметричного возмущения свободной границы в этом сечении, а  $\delta b(t)$  и  $\delta v$  — вызванные им возмущение полуширины полосы и компоненту возмущения скорости, принадлежащую тому же сечению. Для объяснения сопротивления локализации деформации в режиме структурной сверхпластичности обычно используется критерий устойчивости Е.Харта

$$\frac{(\delta b(t))'}{\delta b(t)} \bigg|_{t=0} = \frac{-\delta b(0)\xi_0 + \delta v}{\delta b(0)} < 0. \quad (6)$$

Хотя условие (5) исчерпывающим образом характеризует устойчивость стационарных течений вязкопластических сред без памяти к предыстории де-

формирования, его преимущество перед (6) для рассматриваемого нестационарного движения нетривиально. Критерий (6) позволяет выделять лишь такие возмущения скорости  $\delta v > 0$  (зависящие от  $m$ ), которые превосходят величину конвективной составляющей движения  $|\delta b(0)|\xi_0$  (не зависящей от  $m$ ). Поэтому более тонким инструментом нами признан критерий (5).

Анализ устойчивости задачи в соответствии с условием (5) в длинноволновом пределе позволяет сделать следующие выводы (см. рис. 2, где  $h$  и  $h_{nom}$  суть модули упрочнения для истинного и номинального напряжения, а  $m$  определен (4)). Наряду с общеизвестной областью устойчивости  $h_{nom} > 0, m > 0$  также имеется область устойчивости  $h_{nom} < 0, m < 0$ . Области  $h_{nom} > 0, m < 0$  и  $h_{nom} < 0, m > 0$  соответствуют состояниям статической неустойчивости, куда попадает структурная сверхпластичность  $h = 0$ , феномен которой связан с обратно пропорциональной зависимостью скорости роста возмущения от  $m$ :

$$\frac{\delta b(t)}{b(t)} = \frac{\delta b(0)}{b(0)} \exp(\lambda_0 \xi t), \quad \lambda = \frac{1}{m}, \quad (7)$$

то есть с замедлением развития возмущений при повышенных значениях  $m$ . С помощью данного выражения и характерного вида кривой  $m(\ln \xi)$  для структурной сверхпластичности объясняется замораживание роста шеек при одноосном растяжении образца с постоянной скоростью траверсы.

Дополнительная жесткость нагружающей системы увеличивает значения модулей упрочнения  $h, h_{nom}$  и может сделать исходное состояние с  $h = 0, m > 0$  устойчивым, а  $h = 0, m < 0$  неустойчивым. Бифуркация возникновения устойчивого предельного цикла, упомянутая в главе 1, развивается в некоторой подобласти координатного угла  $h_{nom} > 0, m < 0$  из другой ветви характеристических показателей в рамках модели Маккормика [7], учитывающей эволюцию внутренней переменной.

Содержание главы отражено в публикациях автора [2-4].

**В третьей главе** из уравнений (1)-(3) методом многих масштабов асимптотического анализа получены уравнения эволюции малых возмущений свободной границы вязкопластической полосы при ее квазистатическом одноосном растяжении. Возмущение  $\eta(x, t)$  полагалось симметричным относительно осевой линии, исчезающим на бесконечно удаленных концах полосы и рассматривалось относительно возмущаемой конфигурации. В уравнениях (2)-(3)  $g(x, y, t) = y - b(t)(1 + \eta(x, t)) = 0$ , где  $b(t)$  — полуширина возмущаемой полосы,  $b_{,t} = -\xi_0 b$ . При выводе уравнений принималось  $m \equiv \text{const}$ , что выполняется точно для степенного вида  $\tau(\xi)$  и приближенно с точностью до малых третьего порядка по  $\epsilon = |\eta(x, t)| \ll 1$  вблизи точки перегиба кривой  $\ln \tau(\ln \xi)$ , ассоциируемой с состоянием структурной сверхпластичности. Для первого члена ряда  $\eta(x, t) = \epsilon \eta_0(\bar{x}, \bar{t}, \chi, \tau) + \epsilon^2 \eta_1(\bar{x}, \bar{t}, \chi, \tau) + \dots$ , где

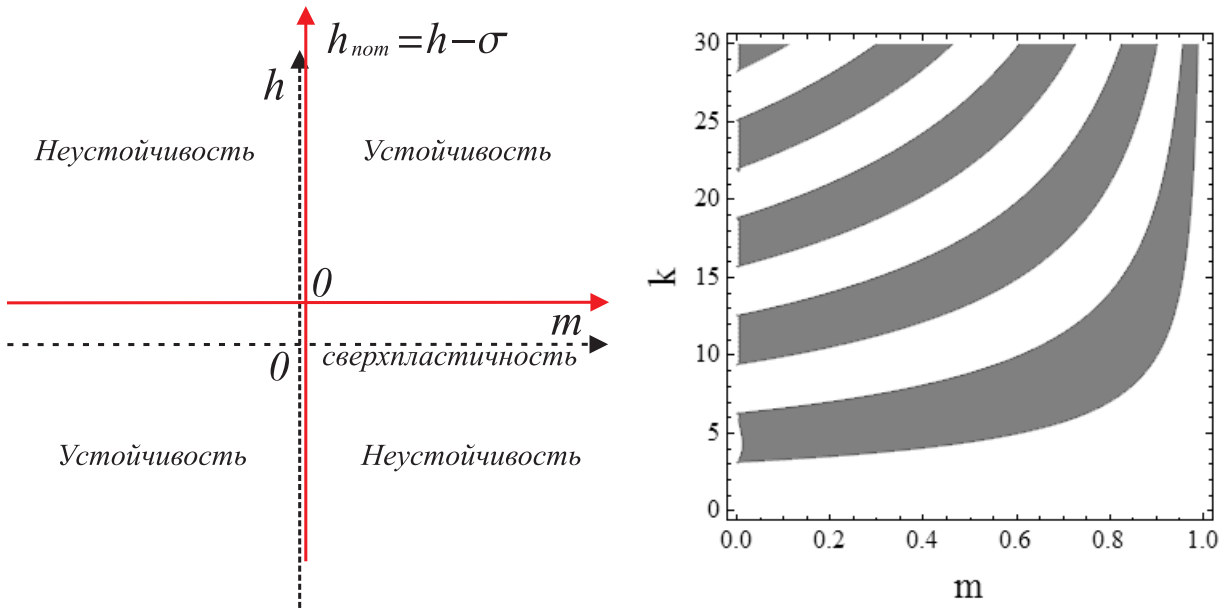


Рис. 2. Диаграмма устойчивости однородного одноосного растяжения полосы к малым возмущениям границ в длинноволновом пределе (слева) и для произвольного волнового числа (серый цвет соответствует устойчивому состоянию; при  $m > 1$ ,  $k \geq 0$  областей устойчивости нет).

$\chi = \epsilon \bar{t}$ ,  $\tau = \epsilon \bar{x}$ ,  $\bar{x} = x/b$ ,  $\bar{t} = \xi_0 t$ , имеет место уравнение

$$\eta_{0,\bar{t}} + \kappa_1 \eta_0 + \bar{x} \eta_{0,\bar{x}} + \kappa_2 \eta_{0,\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad (8)$$

где  $\kappa_1 = \frac{m-1}{m+1}$ ,  $\kappa_2 = \frac{2m+1}{3(m+1)}$ . Это уравнение имеет экспоненциально-автомодельное решение вида

$$\eta_0 = f(\zeta), \quad \zeta = \bar{x} - x_* e^{\bar{t}}, \quad (9)$$

форма которого определяется уравнением

$$\kappa_2 f_{,\zeta\zeta} + \zeta f_{,\zeta} + \kappa_1 f = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) преобразованиями  $f = \exp(-\frac{1}{4}\bar{\zeta}^2) \bar{f}$ ,  $\zeta = \kappa_2^{1/2} \bar{\zeta}$  приводится к уравнению параболического цилиндра стандартной формы  $\bar{f}_{,\bar{\zeta}\bar{\zeta}} - (\frac{1}{4}\bar{\zeta}^2 + \frac{1}{2} - \kappa_1) \bar{f} = 0$ , решение которого записывается через вырожденную гипергеометрическую функцию  $\Phi$ . В результате решение уравнения (10) принимает вид

$$f(\zeta) = a(\chi, \tau) \exp(-\frac{\zeta^2}{2\kappa_2}) \Phi\left(\frac{1-\kappa_1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\zeta^2}{2\kappa_2}\right) + b(\chi, \tau) \zeta \exp(-\frac{\zeta^2}{2\kappa_2}) \Phi\left(\frac{2-\kappa_1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\zeta^2}{2\kappa_2}\right), \quad (11)$$

где  $a, b \sim \epsilon^0$ . Это решение при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  имеет асимптотику  $f(\zeta) \sim \zeta^{-\kappa_1}$  и потому локализовано при  $m < -1$  или  $m > 1$ . На интервале  $m > 1$  форма



уединенной волны унимодальна (рис. 3), причем в пределе  $m \rightarrow -\infty$  оказывается гауссова функция  $f(\zeta) = a \exp(-\frac{\zeta^2}{2\kappa_2})$ . При значениях параметра  $m < -1$  вблизи точки  $m = -1$  уединенная волна имеет форму группового солитона (рис. 4). По мере удаления параметра  $m$  от этой точки осцилляции размываются (рис. 5) и в пределе при  $m \rightarrow -\infty$  вновь оказывается гауссова функция.

При  $m = 1$  (реология линейно-вязкой жидкости) решение уравнения (11) представляет собой кинк, описываемый интегралом вероятностей  $f(\zeta) = b \sqrt{\frac{\pi\kappa_2}{2}} \operatorname{erf}(\frac{1}{\sqrt{2\kappa_2}}\zeta)$ , и не удовлетворяет условиям локализованности. В этом случае вместо (9) необходимо использовать анзац (рис. 6)

$$\eta_0 = f(\bar{x} - x_* e^{\bar{t}}) - f(\bar{x} + x_* e^{\bar{t}}). \quad (12)$$

Уравнение (8) приводится к уравнению теплопроводности

$$\tilde{\eta}_{,\tilde{t}} - \tilde{\eta}_{,\tilde{x}\tilde{x}} = 0,$$

преобразованиями эквивалентности

$$\tilde{\eta} = e^{\kappa_1 \bar{t}} \eta_0, \quad \tilde{x} = \kappa_2^{-1/2} e^{-\bar{t}} \bar{x}, \quad \tilde{t} = \frac{1}{2} e^{-2\bar{t}},$$

сохраняющими структуру алгебры точечных симметрий этого уравнения [1], не зависящей от  $m$ . Форма решений (9), (12) означает стационарность профиля  $f(\zeta)$  относительно лагранжевой системы координат, замороженной в полосу в момент ее возмущения. Устойчивость этих профилей по критерию А.А.Ильюшина определяется медленной эволюцией решений, заключенной в функциях  $a(\chi, \tau), b(\chi, \tau)$ .

Для получения уравнений медленной эволюции используется уравнение для  $\eta_1$  относительно системы отсчета, замороженной в возмущаемую полосу:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \eta_1 + \zeta \eta_{1,\zeta} + \kappa_2 \eta_{1,\zeta\zeta} = & -\eta_{0,\tau} - \zeta \eta_{0,\chi} - p \eta_{0,\zeta\chi} + \\ & + (q_1 + q_2 \zeta^2) (\eta_{0,\chi})^2 + q_3 \zeta \eta_0 \eta_{0,\chi} + q_4 \eta_0^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $p, q_1, q_2, q_3, q_4$  — функции  $m$ . Проецирование этого уравнения на фундаментальные решения уравнения, сопряженного (13) без правой части, ведет к системе

$$\begin{aligned} \alpha a_{,\tau} + \beta b_{,\chi} + \gamma a^2 + \delta b^2 = & 0, \\ \omega b_{,\tau} + \mu a_{,\chi} + \lambda ab = & 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega, \mu, \lambda$  — функции  $m$ . Система (14) имеет массу частных решений, в том числе в виде бегущих волн, однако соответствующая таким решениям медленная эволюция очага локализации деформации оказывается не в состоянии описывать его движение.

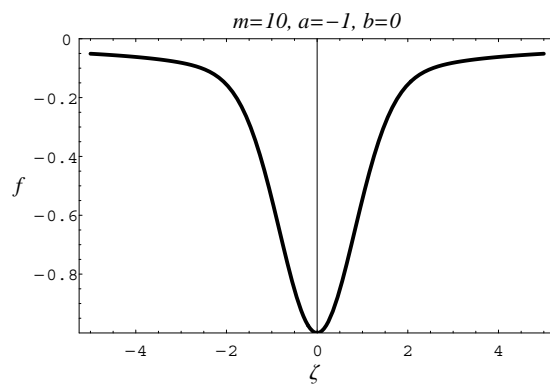


Рис. 3. Форма локализованного решения при  $m > 1$ .

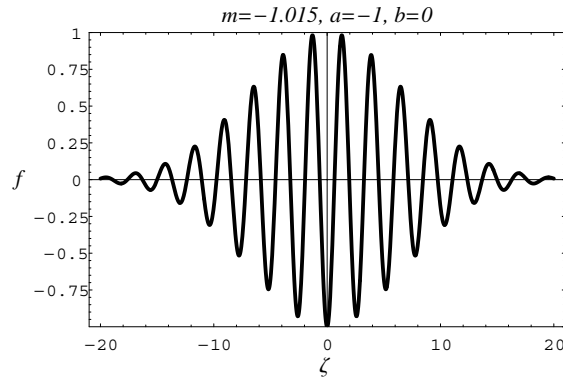


Рис. 4. Форма локализованного решения при  $m = -1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

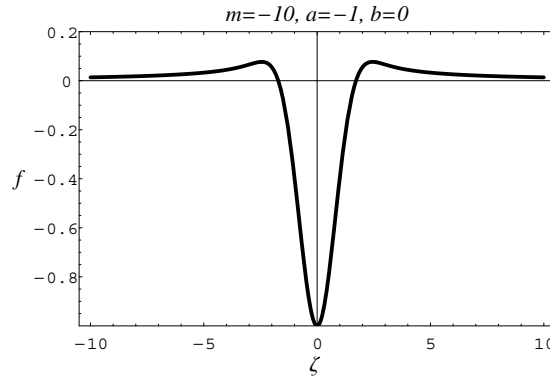


Рис. 5. Форма локализованного решения при  $m < -1$ .

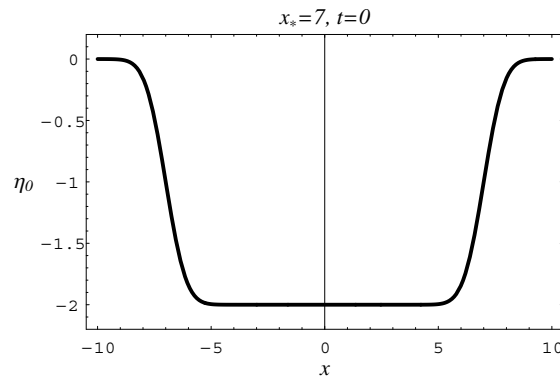


Рис. 6. Форма распределенного решения при  $m = 1$ .

Оценка радиуса сходимости асимптотического ряда в работе не делалась, но для улучшения сходимости был использован (не доказанный строго) метод многих масштабов. Численными экспериментами установлено, что найденный класс профилей свободной границы действительно претерпевает наиболее медленную эволюцию среди прочих локализованных профилей с той же амплитудой и, следовательно, наиболее слабо зависит от отброшенных членов ряда, что подтверждает его равномерную сходимость.

Слабо-нелинейный анализ процесса растяжения вязкопластической полосы не позволил учесть физическую нелинейность сложнее степенной функции. Однако в рамках такой модели удалось описать автомодельную эволюцию локализованной или распределенной формы свободной границы в зависимости от  $m$ , которая деформируется вместе с полосой. Особая роль сред со степенной вязкостью в задачах со свободной границей описана в литературе.

Содержание главы отражено в публикациях автора [5,6,14].

**Четвертая глава** посвящена выбору удобной формы записи нелинейных уравнений (1)-(3) и их исследованию алгебраическими методами.

Рассмотрена запись уравнений с использованием функции тока либо функции напряжений, предложенная А.А.Ильюшиным [10]; эти уравнения записаны в терминах функций комплексных переменных и частично проинтегрированы. Рассмотрена запись уравнений в изостатических координатах, в качестве которых всегда выступают свободные границы. Проинтегрирован случай потенциального течения, являющийся кинематически определенным. Полученные решения ни при каком виде материальной функции не соответствуют поставленной задаче со свободными границами. Рассмотренные подходы имеют определенные перспективы развития.

Более удобной оказалась запись уравнений при использовании параметрического представления декартовых компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций в форме М.Леви:

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{1}{2}\tau(\xi)\sin 2\phi, \quad \sigma_{yy} = -p + \frac{1}{2}\tau(\xi)\sin 2\phi, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2}\tau(\xi)\cos 2\phi, \quad (15)$$

$$v_{x,x} = -\xi\sin 2\phi, \quad v_{y,y} = \xi\sin 2\phi, \quad v_{x,y} + v_{y,x} = 2\xi\cos 2\phi, \quad (16)$$

удовлетворяющих уравнениям (1), где  $\phi$  — угол между одной из линий максимальных касательных напряжений и осью  $x$ . Выражения (15) подставляются в уравнения равновесия, а из (16) вместе с выражениями

$$v_{y,x} = \xi\cos 2\phi + q, \quad v_{x,y} = \xi\cos 2\phi - q, \quad (17)$$

где  $q = \frac{1}{2}(v_{y,x} - v_{x,y})$  — вихрь скорости, образуются уравнения совместности деформаций скорости

$$(v_{x,x})_{,y} = (v_{x,y})_{,x}, \quad (v_{y,y})_{,x} = (v_{y,x})_{,y}.$$

В итоге уравнения равновесия и совместности вязкопластической среды в двумерном случае записываются в виде однородной квазилинейной системы

$$\mathbf{u}_{,x} + \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}_{,y} = 0, \quad (18)$$

где  $\mathbf{u} = (\xi, \phi, p, q)^T$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tau' \sin 2\phi & 2\tau \cos 2\phi & 2 & 0 \\ -\tau' \cos 2\phi & 2\tau \sin 2\phi & 0 & 0 \\ -\cos 2\phi & 2\xi \sin 2\phi & 0 & 1 \\ -\sin 2\phi & -2\xi \cos 2\phi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\tau' \cos 2\phi & 2\tau \sin 2\phi & 0 & 0 \\ -\tau' \sin 2\phi & -2\tau \cos 2\phi & 2 & 0 \\ -\sin 2\phi & -2\xi \cos 2\phi & 0 & 0 \\ \cos 2\phi & -2\xi \sin 2\phi & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача групповой классификации системы (18) по произвольной функции  $\tau(\xi)$  выявила конечномерное расширение группы точечных симметрий на степенных функциях  $\tau = \alpha\xi^m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  (дополнительные бесконечномерные расширения имеют место при показателях степени  $m = 0$  и  $m = 1$ , которые соответствуют идеально-пластическому твердому телу и линейно-вязкой жидкости). Данная задача в терминах скоростей перемещений решена в динамической постановке В.О.Бытевым и в постановке с дополнительным учетом теплопроводности Э.А.Леоновой, где также выявлена степенная жидкость.

Уравнения равновесия и совместности записываются в виде однородной квазилинейной системы также для пространственного случая, для чего используется тригонометрическое представление тензоров напряжений и скорости деформаций. Для плоской и пространственной формулировок уравнений с функцией  $\tau(\xi)$  степенного вида ( $m \neq 0, m \neq 1$ ) найдены алгебры точечных симметрий, для которых построены системы одномерных оптимальных подалгебр. Выписаны формы некоторых решений

$$\xi = e^{b\varphi} f(\zeta), \quad \phi = \varphi + w(\zeta), \quad p = e^{mb\varphi} g(\zeta), \quad q = e^{b\varphi} h(\zeta), \quad \zeta = re^{-a\varphi}, \quad (19)$$

$$\xi = e^{\pm b\varphi} f(r, \zeta), \quad \phi = \varphi + w(r, \zeta), \quad p = e^{\pm mb\varphi} g(r, \zeta), \quad q_i = e^{\pm b\varphi} h_i(r, \zeta), \quad (20)$$

$$\zeta = z \pm \varphi, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\xi = e^{b\varphi} f(\rho, \zeta), \quad \phi = \varphi + w(\rho, \zeta), \quad p = e^{mb\varphi} g(\rho, \zeta), \quad q_i = e^{b\varphi} h_i(\rho, \zeta), \quad (21)$$

$$\rho = re^{-a\varphi}, \quad \zeta = \ln z - a\varphi, \quad i = 1, 2, 3,$$

естественно записываемых в полярных или цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ , которые могут представлять интерес для обработки экспериментов на кручение сплошных цилиндрических образцов из металлических сплавов, находящихся в состоянии структурной сверхпластичности. В (19)-(21)  $a, b$  — параметры, а функции  $f, w, g, h_i$  аргументов  $\rho, \zeta$  удовлетворяют системам нелинейных дифференциальных уравнений.

Содержание главы отражено в публикациях автора [7,15,19].

**Пятая глава** посвящена исследованию однородной квазилинейной системы (18) геометрическими методами, последовательно сводящими (18) к

нелинейной задаче на собственные значения и поиску условий полной интегрируемости уравнений в характеристических координатах [11,12].

Собственные числа оператора  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  суть действительные при гиперболическом типе системы (18)

$$\lambda_{1\pm} = \operatorname{tg}(\phi \pm \beta), \quad \lambda_{2\pm} = -\operatorname{ctg}(\phi \pm \beta), \quad \operatorname{tg} 2\beta = \sqrt{-m}, \quad m \leq 0; \quad (22)$$

и комплексные при эллиптическом ее типе

$$\lambda_{1\pm} = -\operatorname{ctg}(\tilde{\phi} \pm i\tilde{\beta}), \quad \lambda_{2\pm} = \operatorname{tg}(\tilde{\phi} \pm i\tilde{\beta}), \quad \operatorname{cth}(2\tilde{\beta}) = \sqrt{m}, \quad m > 0, \quad (23)$$

где  $\tilde{\phi} = \phi - \pi/4$ ,  $\tilde{\phi}$  — угол между одной из линий главных напряжений и осью  $x$ , а  $\beta = i\tilde{\beta} + \pi/4$ . Параметр  $\beta$  имеет действительные значения в области гиперболичности уравнений (18) при  $m \leq 0$ , а параметр  $\tilde{\beta}$  — действительные значения в области эллиптичности этих уравнений при  $m \geq 1$ . Линии в плоскости  $(x, y)$ , удовлетворяющие уравнениям  $dy/dx = -\lambda(x, y)$ , где  $\lambda = \{\lambda_{1\pm}, \lambda_{2\pm}\}$ , являются характеристиками системы (18). Выражения (22), (23) позволяют увидеть, что система (18) имеет в каждой точке при  $m < 0$  две пары ортогональных действительных характеристик, сливающихся в одну такую же пару при  $m \rightarrow 0$  (когда  $\beta \rightarrow 0$ ), а при  $m > 0$  — две пары ортогональных комплексных характеристик, сливающихся в подобную пару при  $m \rightarrow 1$  (когда  $\tilde{\beta} \rightarrow \infty$ ).

Дифференциальные соотношения на характеристиках системы (18) имеют вид

$$\begin{aligned} \tau\xi^{-1}\sqrt{m(m-1)}d\xi \pm 2\tau\sqrt{1-m}d\phi \pm 2dp - \tau\xi^{-1}\sqrt{-m}dq &= 0, \\ \tau\xi^{-1}\sqrt{m(m-1)}d\xi \pm 2\tau\sqrt{1-m}d\phi \mp 2dp + \tau\xi^{-1}\sqrt{-m}dq &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

для  $\lambda_{1\pm}$  и  $\lambda_{2\pm}$  соответственно (для эллиптического типа  $\phi$  и  $\beta$  в (24) заменяется на  $\tilde{\phi}$  и  $\tilde{\beta}$ ).

Для полной интегрируемости системы пфаффовых уравнений (24) необходимо и достаточно, чтобы функция имела вид

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{\tau_*^2 - 4\mu^2\xi^2}, & 0 \leq \xi \leq \xi_*, \\ \sqrt{4\mu^2\xi^2 - \tau_*^2}, & \xi > \xi_*, \end{cases} \quad (25)$$

где  $\xi_* = \tau_*/(2\mu)$ , причем первый случай соответствует действительным  $\alpha = \tau_*$ ,  $\gamma = 2\mu$  в (24), а второй — мнимым  $\alpha = i\tau_*$ ,  $\gamma = i2\mu$ , константам интегрирования дифференциальных уравнений для функции  $\tau(\xi)$ , к которым сводятся условия Фробениуса. Менее сильных ограничений на функцию  $\tau(\xi)$ , обеспечивающих разрешимость пфаффовой системы при записи ее дифференциальных форм в виде  $vdz + dw$ ,  $v = v(\mathbf{u})$ ,  $w = w(\mathbf{u})$ , не найдено.

Существенно нелинейная материальная функция (25), гарантирующая полную интегрируемость уравнений (18), имеет  $N$ -образный вид (см. рис. 7)

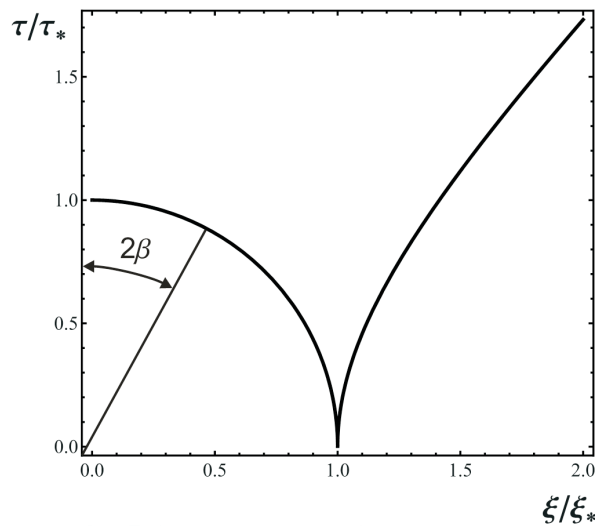


Рис. 7. Вид функции (25).

и допускает линии разрыва, разделяющие области сплошной среды с гиперболическим и эллиптическим типами оператора. Подобно уравнениям газовой динамики, где переход от гиперболического к эллиптическому типу происходит при некоторой величине модуля скорости перемещений  $|\mathbf{v}| = c$ , в данной модели такой переход имеет место при определенной величине интенсивности скорости деформации:  $\xi = \xi_*$ .

Семейству функций (25) принадлежат модели идеально-пластического твердого тела  $\tau \equiv \tau_*$  и линейно-вязкой жидкости  $\tau = 2\mu\xi$ , но не принадлежит модель Бингама  $\tau = \tau_* + 2\mu\xi$ .

В области гиперболичности интегралы уравнений (24), называемые инвариантами Римана, приводятся ниже в очередности, повторяющей последовательность собственных значений  $\lambda_{1+}$ ,  $\lambda_{1-}$  (первая строка) и  $\lambda_{2+}$ ,  $\lambda_{2-}$  (вторая строка):

$$\begin{aligned} 2\chi &= \beta + \phi + \bar{p} - \bar{\mu}q, & 2\omega &= -\beta - \phi + \bar{p} - \bar{\mu}q, \\ 2\eta &= -\beta + \phi + \bar{p} + \bar{\mu}q, & 2\zeta &= \beta - \phi + \bar{p} + \bar{\mu}q, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\bar{\mu} = \mu\tau_*$ ,  $\bar{p} = p\tau_*$ , а  $\beta \in \mathbb{R}$  определяется (22) и обозначен на рис. 7.

Функция (25) обеспечивает выполнение необходимого и достаточного условия расщепления квазилинейной системы (18) на две невзаимодействующие подсистемы [13]. Эти подсистемы определены в характеристических подпространствах  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_1 \oplus X_2 = (\beta, \phi, \bar{p}, \bar{\mu}q)$ , натянутых на пары ортогональных собственных векторов оператора  $\mathbf{L}$  (иначе говоря, образованных всевозможными линейными комбинациями инвариантов Римана  $\chi, \omega$  и  $\eta, \zeta$  соответственно).

В каждом из подпространств  $X_1$ ,  $X_2$  уравнения (18) точно линеаризуются преобразованием годографа и сводятся к простейшему виду. Например,

для  $X_1$  имеем пару уравнений

$$y_{1,\chi} + x_1 = 0, \quad x_{1,\omega} - y_1 = 0, \quad (27)$$

где  $x = x_1 \cos(\chi - \omega) - y_1 \sin(\chi - \omega)$ ,  $y = x_1 \sin(\chi - \omega) + y_1 \cos(\chi - \omega)$ , эквивалентную паре телеграфных уравнений. С использованием данных результатов разработаны безитерационные методы численного решения гиперболических задач, краевые условия для которых записываются в терминах инвариантов Римана.

В области эллиптичности система (18), (25) с  $m \geq 1$  также удовлетворяет теореме Богоявленского [12] и сводится к паре уравнений для комплексных функций  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  двух комплексных аргументов  $\tilde{\chi}, \tilde{\omega}$

$$\tilde{y}_{1,\tilde{\chi}} - \tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_{1,\tilde{\omega}} - \tilde{y}_1 = 0, \quad (28)$$

где  $2\tilde{\chi} = i\tilde{\beta} + \tilde{\phi} - i\tilde{p} - \tilde{\mu}q$ ,  $2\tilde{\omega} = -i\tilde{\beta} - \tilde{\phi} - i\tilde{p} - \tilde{\mu}q$ , а формулы связи декартовых координат  $x, y$  с  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  и  $\tilde{\chi}, \tilde{\omega}$  имеют прежний вид. Эквивалентная (28) система телеграфных уравнений имеет решение в виде пары полигармонических функций, для которых существуют интегральные представления [14], продолжающие эти функции из краевых условий.

Показано, что функция (25), обеспечивающая точную линеаризацию квазилинейной системы (18), выделяет две бесконечномерные точечные группы симметрии этой системы, действующие в каждом из характеристических подпространств  $X_1, X_2$  и генерируемые в них соответствующей парой телеграфных уравнений. Это обеспечивает существование максимального числа инвариантно-групповых решений, имеющих смысл предельных диссипативных структур, и представляет определенный научный интерес.

В области гиперболичности уравнений компоненты поля скорости перемещения в характеристических координатах физической плоскости находятся по любой паре уравнений совместной переопределенной системы (16)-(17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial s_1} - \frac{v_2}{\rho_1} &= -\xi \sin(2\phi), & \frac{\partial v_1}{\partial s_2} - \frac{v_2}{\rho_2} &= \xi \cos(2\phi) - q, \\ \frac{\partial v_2}{\partial s_1} + \frac{v_1}{\rho_1} &= \xi \cos(2\phi) + q, & \frac{\partial v_2}{\partial s_2} + \frac{v_1}{\rho_2} &= \xi \sin(2\phi), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $s_1, s_2$  — натуральные длины дуг характеристических координат, а  $\rho_1, \rho_2$  — их локальные радиусы кривизны, с учетом условия  $\phi = -\beta$  для  $X_1$  и  $\phi = \beta$  для  $X_2$ . На линиях максимальных скоростей сдвига, где  $\phi = 0$ , из (29) появляются уравнения Гейрингер [15].

В области гиперболичности уравнений рассмотрено семейство централизованных автомодельных решений, имеющих вид  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta(x, y))$ ,  $\mathbf{u} = (\beta, \phi, p, q)^T$  и приводящих к нелинейной задаче на собственные значения

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u}' = \mathbf{0}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/d\theta$ ,  $\operatorname{tg} \theta = y/x$ . Каждому из четырех ортогональных собственных векторов оператора  $\mathbf{L}(\mathbf{u})$  соответствует решение в области, ограниченной парой исходящих из особой точки прямолинейных характеристик (благодаря чему функциональный определитель преобразования системы (18) к виду (27) вырождается) и интегральной кривой в виде дуги окружности с центром в особой точке. В пределах этой области один из инвариантов Римана, соответствующий рассматриваемому собственному вектору, линейно зависит от угловой координаты, а остальные суть константы.

Ниже выписаны два представителя одного класса решений, имеющих различную кинематику:  $\chi$ -решение (для которого инвариант  $\chi$  «живой»)  $\phi = -\beta$ ,  $2\beta = \theta$ ,  $2\bar{\mu}q = -\theta$ ,  $2\bar{p} = \theta + p_*$ ,

$$v_r = \frac{\xi_* r}{2}(1 - \cos(2\theta)) + \xi_* r_* \bar{\delta} \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{\xi_* r}{2}(\sin(2\theta) - 2\theta) - \xi_* r_* \bar{\delta} \sin \theta \quad (31)$$

и  $\eta$ -решение  $\phi = \beta$ ,  $2\beta = -\theta$ ,  $2\bar{\mu}q = \theta$ ,  $2\bar{p} = \theta + p_*$ ,

$$v_r = -\frac{\xi_* r}{2}(1 - \cos(2\theta)) + \xi_* r_* \bar{\delta} \cos \theta, \quad v_\theta = -\frac{\xi_* r}{2}(\sin(2\theta) - 2\theta) - \xi_* r_* \bar{\delta} \sin \theta. \quad (32)$$

Класс решений с другим выбором констант интегрирования порождает следующие распределения скоростей:  $\chi$ -решение  $\phi = -\beta$ ,  $2\beta = \theta + \frac{\pi}{2}$ ,  $2\bar{\mu}q = -\theta$ ,  $2\bar{p} = \theta + p_*$ ,

$$v_r = \frac{\xi_* r}{2}(1 + \cos(2\theta)) + \xi_* r_* \bar{\delta} \cos \theta, \quad v_\theta = -\frac{\xi_* r}{2}(\sin(2\theta) + 2\theta) - \xi_* r_* \bar{\delta} \sin \theta \quad (33)$$

и  $\eta$ -решение  $\phi = \beta$ ,  $2\beta = -\theta - \frac{\pi}{2}$ ,  $2\bar{\mu}q = \theta$ ,  $2\bar{p} = \theta + p_*$ ,

$$v_r = -\frac{\xi_* r}{2}(1 + \cos(2\theta)) + \xi_* r_* \bar{\delta} \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{\xi_* r}{2}(\sin(2\theta) + 2\theta) - \xi_* r_* \bar{\delta} \sin \theta. \quad (34)$$

Представитель еще одного семейства решений  $\beta = \frac{1}{2}(\theta_* - \eta_* + \zeta_*) = \beta_*$ ,  $\xi = \sin(2\beta_*)$ ,  $q = q_*$  и

$$v_r = \frac{\xi_* r}{2}(\cos(4\beta_*) - 1) + \xi_* r_* \bar{\delta} \cos \theta, \quad v_\theta = -r\left(\frac{\xi_*}{2} \sin(4\beta_*) - q_*\right) - \xi_* r_* \bar{\delta} \sin \theta, \quad (35)$$

соответствующего расщепленной структуре характеристического пространства, имеет два линейно зависимых «живых» инварианта Римана и замечателен тем, что в пределе соответствует известному центрированному автомодельному решению для идеально-пластического тела [15].

Компоненты скорости (31)-(35), взятые с противоположным знаком, также являются решениями. Рис. 8 качественно иллюстрирует распределение скоростей решения (31).

Исследуются особенности поведения одномерной динамической системы образца из вязкопластического материала с функцией (25)  $\tau = f(\xi)$  и



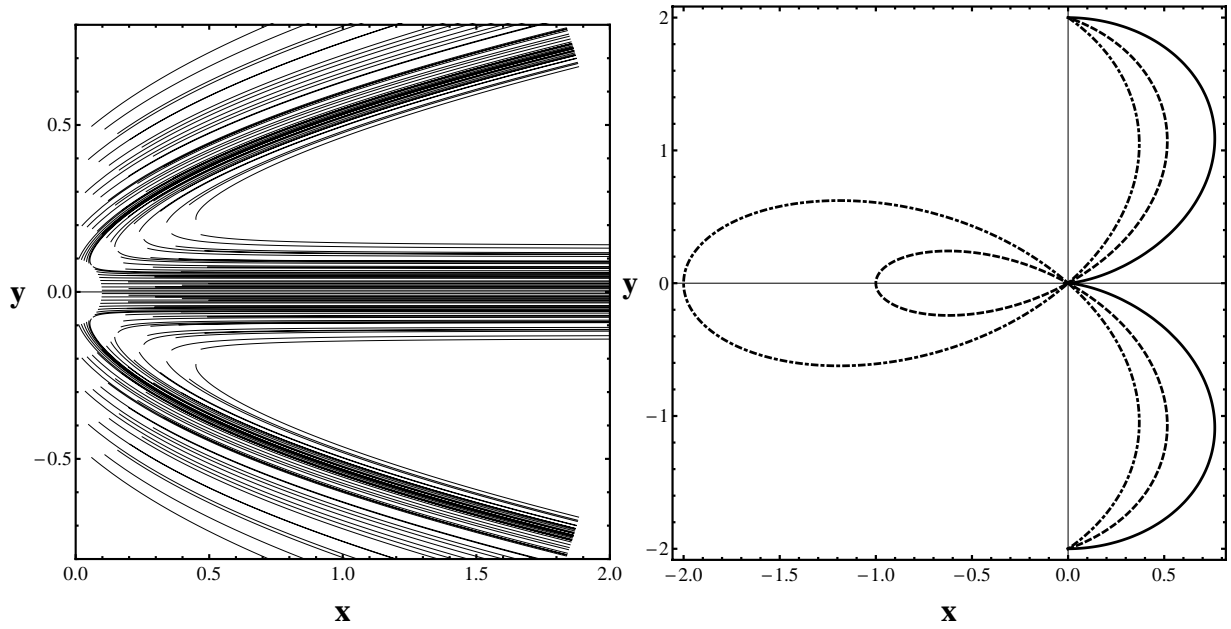


Рис. 8. Решение (31): линии тока для  $2\bar{\delta} = -0.2$  (а) и годографы компоненты скорости  $2v_r/(\xi_*\bar{r})$  для  $\bar{r} = 0.1, 0.2, 10$  (штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии соответственно). Координаты отнесены к  $r_*$ .

нагружающей системы с конечной жесткостью  $K$  и контролируемой скоростью деформации  $R$ , описываемой машинным уравнением

$$\dot{\bar{\tau}} = \bar{K}(\bar{R} - \bar{\xi}). \quad (36)$$

В (36) использованы обозначения  $\bar{\xi} = \xi/\xi_*$ ,  $\bar{R} = R/\xi_*$ ,  $\bar{K} = K/\tau_*$ ,  $\bar{\tau} = \tau/\tau_*$ ,  $\tau_* = 2\mu\xi_*$ . Специфика такой системы диктуется сингулярностью кривой  $f(\xi)$  и уже обсуждалась в [6]. Уравнение (36) регуляризуется диффузионным членом, который появляется вследствие учета распределенной шейки при испытании цилиндра на растяжение (фактора Бриджмена):

$$\dot{\bar{\xi}} = \frac{\bar{K}\xi_*(\bar{R} - \bar{\xi})}{\bar{f}'(\bar{\xi})} + D\bar{\xi}_{xx}, \quad (37)$$

где  $D > 0$  — коэффициент диффузии, приближенно положенный константой,  $\bar{f}(\bar{\xi}) = \tau_*^{-1}f(\xi)$ .

Исследование решений в виде профилей  $\xi = \xi(\zeta)$ ,  $\zeta = x - vt$ , распространяющихся с постоянной скоростью, ведет к системе

$$\bar{\xi}' - \chi = 0, \quad D\chi' + v\bar{\xi} + g(\bar{\xi}) = 0, \quad g(\bar{\xi}) = \bar{K}\xi_*(\bar{R} - \bar{\xi})/\bar{f}'(\bar{\xi}), \quad (38)$$

причем  $v$  присутствует в ней в качестве параметра. Устойчивость особых точек  $\bar{\xi} = \bar{R}$  и  $\bar{\xi} = 1$  системы (38), определяемых из условия  $g(\bar{\xi}) = 0$ , зависит от положения  $\bar{R}$  относительно единицы на числовой оси. На рис. 9

слева приведена форма функции  $g(\bar{\xi})$  при  $\bar{R} < 1$  и (на врезках) поведение фазовых траекторий вблизи особых точек (38). Устойчивость особых точек на фазовой плоскости  $\bar{\xi}, \chi$  с учетом инверсии эволюционного параметра при переходе от  $t$  к  $\zeta = x - vt$  согласуется с устойчивостью состояний автоколебательной системы (37), схематически показанной на рис. 9. На данном рисунке справа приведено численное решение уравнения (37) с параметрами  $\bar{R} = 0.25$ ,  $\bar{K}\xi_* = 0.5$ ,  $D = 0.1$ , начальными условиями  $\bar{\xi}(x, 0) = \bar{R} + \delta\bar{\xi}$ ,  $\delta\bar{\xi} = 0.1 \exp(-50x^2) > 0$  и граничными условиями  $\partial_x \bar{\xi}(0, t) = \partial_x \bar{\xi}(10, t) = 0$ . Выбранные начальные условия, задающие небольшое локальное увеличение скорости деформации (возмущение в виде шейки), качественно соответствуют поведению решения уравнения Фишера – Колмогорова [9] и гарантируют распространение фронта, асимптотические параметры которого  $v$ ,  $\lambda$  определяются единственной гетероклинической траекторией, соединяющей особые точки  $A$  и  $O$  в пределе  $\zeta \rightarrow -\infty$ . Скорость распространения фронта локализации деформации дается выражением

$$v = 2\sqrt{\bar{K}\xi_* D \operatorname{ctg}(2\beta)}, \quad (39)$$

где параметр  $\beta$  определяется выражениями (22), (4) при  $\bar{\xi} = \bar{R}$ . В частности,  $\bar{R} \rightarrow 0$  ведет к  $v \rightarrow \infty$ , а  $\bar{R} \rightarrow 1$  ведет к  $v \rightarrow 0$ . Формула (39) приводится к выражению для скорости распространения периодических автоволн локализации деформации в рамках модели Збига – Айфантиса [8].

В рассматриваемой системе при  $\bar{R} < 1$  существует также решение, следующее фазовой траектории **АВСО** (рис. 9) и возникающее в ответ на небольшое локальное уменьшение скорости деформации  $\delta\bar{\xi} < 0$ , всегда имеющее место в области перехода рабочей части образца к захвату. Распространяющийся с постоянной скоростью (39) импульс напряжения и отвечающее ему разрывное распределение скорости деформации, определенные в работе, тянут за собой предельное стационарное состояние  $\bar{\xi} \equiv 1$ . При  $\bar{R} \rightarrow 1$  такое решение, описываемое рассматриваемой системой с сингулярной силовой функцией, стремится к «автосолитону на пьедестале» и качественно соответствует данным эксперимента А.А.Преснякова. Модель предсказывает более глубокое падение напряжения течения в сверхпластических материалах, испытывающих превращение, чем в материалах, испытывающих динамическое деформационное старение. Данная тенденция в рамках модели хорошо сочетается со значительно более высокими величинами скорости распространения волны локализации деформации по отношению к скорости траверсы в материалах, испытывающих динамическое деформационное старение, по отношению к сверхпластическим материалам, испытывающим превращение. Модели [6-8] с гладкой силовой функцией способны описывать распространение исключительно периодических автоволн локализации деформации.

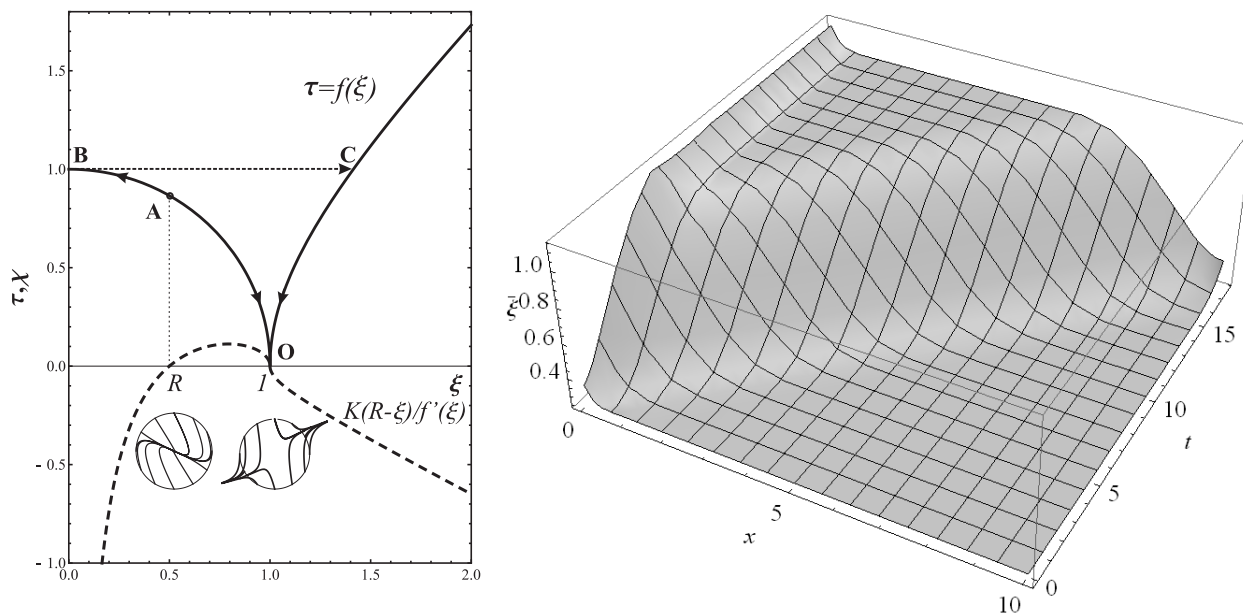


Рис. 9. Диаграмма, иллюстрирующая поведение системы при  $\bar{R} < 1$  и решение, соответствующее переходу **АО**.

Содержание главы отражено в публикациях автора [7-12,16-20].

**В заключении** диссертации сделаны следующие выводы.

1. Для решения проблемы классификации определяющих соотношений вязкопластичности в соответствии с описанием ими особенностей локализации деформации были приняты некоторые гипотезы и поставлена задача одноосного растяжения вязкопластической полосы со свободными границами и произвольной реологической функцией, ограничения на которую предложено искать с помощью подходов, основанных на соображениях устойчивости, слабо нелинейной формулировке задачи, алгебраических и геометрических методах исследования нелинейных систем.

2. Аномально высокая способность сопротивляться локализации деформации, множественное возникновение и замораживание шеек при одноосном растяжении металлических образцов в состоянии структурной сверхпластичности вполне объясняется методами устойчивости в сочетании с реологическими особенностями данного состояния.

3. Методом многих масштабов асимптотического анализа выведены уравнения эволюции малых симметричных возмущений свободных границ полосы при ее одноосном растяжении. Выяснено, что кроме равномерного растяжения полосы в некоторых диапазонах изменения параметра  $m$  существуют автомодельные профили свободных границ в виде простых и сложных локализованных структур, вмороженных в материал полосы, эволюция которых в быстрых переменных не зависит от  $m$ . Установлено, что найденные

профили обладают наиболее медленной эволюцией по сравнению с произвольными локализованными профилями той же амплитуды, что говорит о равномерной сходимости асимптотического ряда. Установлено, что полученные уравнения точно отражают физическую нелинейность, соответствующую степенному закону вязкости с параметром  $m$  в качестве показателя, вариации которого не изменяют группу симметрии данных уравнений.

4. Найден класс степенных материальных функций ( $m \neq 0, m \neq 1,$ ) выделяющий конечномерное расширение группы точечных симметрий рассматриваемой системы в существенно нелинейной формулировке. Найдены формы инвариантно-групповых решений, естественно записываемые в цилиндрических координатах и представляющие интерес для идентификации определяющих соотношений высокотемпературной ползучести металлических сплавов (в том числе находящихся в состоянии структурной сверхпластичности) с применением испытаний на кручение сплошных цилиндров.

5. Найден класс немонотонных материальных функций с сингулярной точкой (N-функций), необходимый и достаточный для полной интегрируемости рассматриваемой системы в существенно нелинейной формулировке, отвечающей плоской деформации, и расщепляемости ее на две не взаимодействующие подсистемы. При определенной величине интенсивности скорости деформации у данных функций меняется характер монотонности, что обеспечивает существование линий разрыва, разделяющих области сплошной среды с гиперболическим  $m \leq 0$  и эллиптическим  $m > 0$  типами оператора, аналогичным ударным волнам в уравнениях газовой динамики. В предельных случаях  $m \rightarrow 0, m \rightarrow 1$  материальная функция сводится к идеально-пластическому твердому телу и линейно-вязкой жидкости. Обнаруженный класс функций выделяет бесконечномерное расширение групп точечных симметрий, действующих в каждом из двумерных характеристических подпространств исследуемой нелинейной системы, обеспечивая существование максимально широкого класса ее инвариантно-групповых решений.

6. В терминах инвариантных характеристических подпространств уравнения гиперболического и эллиптического типов приведены к простейшему виду. В областях, где полевые уравнения имеют гиперболический тип, а граничные условия записываются в терминах инвариантов Римана, предложен метод численного решения задач Коши и Гурса, а также смешанной задачи, каждая из которых распадается на две несвязанные подзадачи, которые могут решаться параллельно. Получена система уравнений для компонент поля скоростей перемещений в терминах характеристических координат. В областях, где уравнения имеют эллиптический тип, система сводится к паре комплекснозначных телеграфных уравнений относительно двух комплексных независимых переменных, решения которых суть полигармонические функ-

ции. Для уравнений в области гиперболичности найдены центрированные автомодельные решения, характеристики которых имеют точку пересечения и из которых склеиваются решения более сложных задач. Исследованы потоки среды, соответствующие распределениям скоростей данных решений, имеющие разнообразные нетривиальные качественные особенности.

7. Исследовано поведение системы образца из вязкопластического материала с  $N$ -образной материальной функцией и нагружающего устройства с конечной жесткостью, где также учтен фактор Бриджмена, приведший к появлению в уравнении диффузионного члена. Для данной нелинейной динамической системы обнаружены два типа решений, описывающих распространение фронта или очага локализации деформации с постоянной скоростью, асимптотическое выражение для которой найдено. Наличие сингулярной точки  $N$ -функции есть важное условие существования таких решений, когда контролируемая в эксперименте скорость деформации не превышает критического значения и соответствует отрезку материальной функции с  $m < 0$ . Показано, что решение, описывающее расширение зоны локализации деформации, следующей за фронтом, образуется из возмущения в виде шейки, а решение с перемещением очага локализации деформации на фоне состояния с однородной скоростью деформации самопроизвольно зарождается в зоне перехода рабочей части образца к захватам. Последнее способно описывать как быстрые автоволны при малом падении напряжения, так и медленные автоволны при значительном падении напряжения, что качественно соответствует наблюдаемым явлениям в условиях динамического деформационного старения либо сверхпластичности превращения.

Обсуждаются оставшиеся нерешенными задачи и перспективы развития результатов работы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. 340 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 300 с.
4. Пресняков А.А., Аубакирова Р.К. К вопросу о скоростной чувствительности напряжений течения при растяжении. Проблемы прочности. 1985. №5. С. 205-207.
5. Рудаев Я.И. О фазовых переходах в сверхпластичности. Проблемы прочности. 1990. №10. С. 50-54.
6. Penning P. Mathematics of the Portevin-Le Chatelier effect. Acta metall. 1972. V.20. P.1169-1175.

7. Estrin Y., Ling C.P., McCormick P.G. Localization of plastic flow: spatial vs temporal instabilities. *Acta Metal. Mater.* 1991. V.39, N.11. P.2943-2949.
8. Zbib H.M., Aifantis E.C. On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation. III. On the structure and velocity of the Portevin-Le Chatelier bands. *Res mechanica.* 1988. V.23. P.293-305.
9. Van Saarloos W. Front propagation into unstable states. *Physics Reports.* 2003. V.386, N2-6. P.29-222.
10. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластического тела. *Ученые записки МГУ. Механика.* 1940. Вып. 39. С. 3-81.
11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1988. 686 с.
12. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
13. Bogoyavlenskij O.I. Decoupling problem for systems of quasi-linear pde's. *Commun. Math. Phys.* 2007. N.269. P.545-556.
14. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.II. Функции нескольких переменных. М.: Наука-Физматлит, 1985. 716 с.
15. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.

## **ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИИ**

1. Келлер И.Э., Трусов П.В. Обобщение теории Бишопа – Хилла пластического формоизменения монокристалла. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 1997. №6. С. 93-102.
2. Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация металлов при больших деформациях: один механизм образования пространственно-модулированных вихревых структур. *Прикладная механика и техническая физика.* 2002. Т.43, №2. С. 176-186.
3. Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация геометрически-нелинейной моментной кристаллической среды. *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2003. №2. С. 105-115.
4. Келлер И.Э., Трусов П.В., Шишкина О.В., Давыдов Д.В. Подход к аттестации определяющих соотношений сверхпластичности, основанный на устойчивости. *Прикладная механика и техническая физика.* 2007. Т.48. №6. С. 170-177.
5. Келлер И.Э. Равновесные формы свободной границы при одноосном растяжении нелинейно-вязкой полосы. *Прикладная механика и техническая физика.* 2010. №1. С. 117-124.

6. Келлер И.Э. Задача о шейке при одноосном растяжении нелинейно-вязкой полосы. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. №4, ч.4. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. С. 1525-1526.
7. Келлер И.Э. Интегрируемость уравнений равновесия и совместности вязкопластической среды с отрицательной чувствительностью к скорости деформации. Доклады Академии наук. 2013. Т.451. №6. С. 643-646.
8. Келлер И.Э. Численное решение краевых задач квазистатического течения вязкопластической среды с отрицательной чувствительностью к скорости деформации. Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т.6, №4. С. 438-450.
9. Келлер И.Э. Решения типа Прандтля – Майера уравнений вязкопластичности с отрицательной чувствительностью к скорости деформации. Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. №1. С. 54-64.
10. Келлер И.Э. Интегрируемость уравнений равновесия и совместности вязкопластической среды с N-образной зависимостью от скорости деформации. Вестник КРСУ. 2014. Т14, №2. С. 125-128.
11. Келлер И.Э., Трусов П.В. Модель равновесной локализации деформации. Математическое моделирование систем и процессов: Сборник научных трудов. Пермь: РИО ПГТУ, 2002. №10. С. 75-87.
12. Келлер И.Э., Трусов П.В. К описанию локализованного профиля и периода фрагментированной структуры, образующейся при больших холодных деформациях металла. Вестник УГТУ. 2004. №22. С. 69-74.
13. Келлер И.Э., Трусов П.В. Подход к построению определяющих соотношений сверхпластичности. Сборник научных трудов «Молодежная наука Прикамья». Выпуск 4. Пермь: РИО ПГТУ, 2004. С. 27-32.
14. Болдырев К.Е., Келлер И.Э. Исследование устойчивости автомоделльных форм эволюции свободной границы при одноосном растяжении нелинейно-вязкой полосы. Сборник трудов всероссийской конференции молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах», 26-27 ноября 2010 г. Пермь: ПГУ, 2010. С. 43-46.
15. Келлер И.Э., Петухов Д.С. Задача о шейке при одноосном растяжении нелинейно вязкой полосы: интегрирование уравнения Ильюшина. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. №5. С. 126-129.
16. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Исследование геометрии пфафтовой системы уравнений равновесия несжимаемой вязкопластической среды. Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. №4. С. 169-172.

17. Келлер И.Э., Колосков В.М., Бачурихин В.П., Мерзляков А.Ф., Кыласова Т.А., Петухов Д.С. Экспериментальное изучение высокопластичных состояний металлов и поиск их рационального теоретического описания. «Региональный конкурс РФФИ - Урал. Результаты научных исследований по инициативным проектам за 2010-2012 гг.»: Сборник статей. Пермь: ПНЦ УрО РАН, 2013. С. 67-71.
18. Келлер И.Э. Интегрируемость уравнений медленного движения вязкопластической среды с N-образной зависимостью от скорости деформации. Сборник трудов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твёрдого тела. 15-18.10.2013 г., Ростов-на-Дону. Р./Д.: Изд-во ЮФУ, 2013. Т. II. С. 6-9.
19. Келлер И.Э. Полностью интегрируемые уравнения течения активной вязкопластической среды. «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение»: Тезисы докладов Всероссийской конференции, приуроченной к 95-летию академика Л.В.Овсянникова. Новосибирск, 18-22 апреля 2014 г. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2014. С. 70-71.
20. Келлер И.Э. Модель активной вязкопластической среды. Сборник трудов VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела. 16-21.06.2014 г., Чебоксары. Чебоксары: Изд-во ЧГПУ, 2014. Ч. I. С. 187-189.

Подписано в печать 5.09.2014 г. Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ № 1968/2014.