На правах рукописи

СОРОКИН Владислав Сергеевич

ПРИМЕНЕНИЕ И РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПРЯМОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НОВЫХ КЛАССОВ УПРУГИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность
01.02.04– Механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем машиноведения Российской академии наук

Научный консультант: Блехман Илья Израилевич,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Исполов Юрий Григорьевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, профессор

Юшков Михаил Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет, профессор

Асташев Владимир Константинович,
доктор технических наук, профессор
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, главный научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», г. Москва

Защита состоится ___ октября 2016 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем машиноведения Российской академии наук по адресу: 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем машиноведения Российской академии наук и на сайте института по адресу http://www.ipme.ru.

Автореферат разослан ___________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор В.В. Дубаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие задачи, с которыми сталкиваются сегодня инженеры и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Среди причин, затрудняющих точное решение, можно указать, например, нелинейные уравнения движения или наличие параметрического воздействия на систему. В тоже время, решение ряда актуальных проблем, возникающих в различных областях науки и техники, возможно только при учете нелинейных факторов. Многие инженерные задачи современной техники требуют изучения динамики систем, возбуждаемых параметрически и описываемых дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. В связи с этим, для решения многих важных и актуальных для приложений задач сегодня используются приближенные и/или численные методы. Среди приближенных методов наиболее широкое распространение нашли проекционные и асимптотические методы, в частности метод многих масштабов, метод гармонического баланса и метод прямого разделения движений (МПРД) – эффективный подход к описанию и исследованию явлений, возникающих при действии высокочастотной вибрации на нелинейные механические системы. Здесь следует отметить, прежде всего, основополагающие работы Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, А. Найфе, Т. Хаяси, В.В. Болотина, И.Г. Малкина, П.Л. Капицы, а также работы Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко, Л.И. Маневича, Ф. Верхалста, К.А. Лурье, И.В. Андрианова, Я. Аврейцевича, И.И. Блехмана и других. Для исследования параметрически возбуждаемых систем широкое применение получили методы, основанные на теории Флоке, вклад в развитие которых внесли труды А.М. Ляпунова, Н.В. Маклахана, Л. Бриллоуина, В.А. Якубовича, В.М. Старжинского, а также Д. Мида, С. Синха, Р. Лэнгли, А.А. Майлыбаева, А.П. Сейраняна и других.

Однако, существующие аналитические методы исследования динамики линейных и нелинейных упругих систем и структур оказываются непригодными для решения ряда актуальных задач, так как их использование налагает слишком существенные ограничения на параметры системы и/или класс разыскиваемых решений. Например, подобные трудности возникают при исследовании распространения упругих волн в пространственно периодических структурах, сигналов микро- и нано-масштабных параметрических усилителей, колебаний линий электропередач и подвесных мостов, динамики железнодорожных путей и т.д. В этих и других случаях приходится иметь дело с упругими структурами, находящимися под сильным параметрическим воздействием или под действием многих параметрических и/или внешних сил с некратными частотами. Данные, также как и существенно-нелинейные, задачи требуют разработки новых аналитических методов исследования.

Создание новых аналитических методов, имеющих более широкую область применимости и дающих более широкий класс решений, чем традиционные асимптотические и приближенные методы позволит решить ряд актуальных задач механики деформируемого твердого тела, например, о распространении упругих волн в периодических структурах и композитных материалах, подавлении вибрации в заданных частях распределенных конструкций, управлении сигналами нелинейных микро- и нано-масштабных параметрических усилителей и т.д. В частности, эти методы могут быть полезными для решения актуальной задачи оптимизации динамических свойств упругих систем, например их собственных форм и частот колебаний, посредством пространственных модуляций параметров, что, в свою очередь, может послужить толчком к созданию новых типов структур и материалов. Также данные методы могут использоваться для исследования систем, параметры которых изменяются и по времени и по пространственной координате, например, движущихся цепей приводов, ремней машин, линий конвейеров и т.д., что представляет существенный интерес для приложений.

Цель и задачи работы. Целью настоящей работы является создание новых аналитических методов исследования динамики линейных и нелинейных упругих систем и структур, имеющих более широкую область применимости и позволяющих получить более широкий класс решений, чем традиционные асимптотические и приближенные методы. Особое внимание уделяется системам, находящимся под сильным параметрическим воздействием, а также существенно нелинейным проблемам.

В соответствии с целью работы были поставлены следующие задачи:

1. Разработать модификацию МПРД, не предполагающую введение ограничений на спектр частот воздействия на систему и позволяющую в ряде случаев отказаться и от других, обычно вводимых при использовании традиционных асимптотических методов, ограничений, в частности, решать существенно нелинейные задачи.
2. Разработать новый аналитический метод исследования динамики систем и структур, не предполагающий введение ограничений на класс разыскиваемых решений и применимый, в частности, для изучения систем, движения которых не допускают разделения по времени на быстрые и медленные.
3. Адаптировать предложенную модификацию МПРД для исследования динамики упругих систем, движения которых разделяются не по времени, а по пространственной координате, например, пространственно периодических структур.
4. Разработать аналитический метод исследования динамики пространственно периодических структур, движения которых не допускают разделения по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся компоненты, применимый, в том числе, и в нелинейных случаях, а также для изучения систем, параметры которых изменяются и по времени и по координате.

Методы исследования. Методы, предлагаемые в настоящей работе, можно рассматривать как развитие МПРД. Данные методы тесно связаны с подходами, основанными на теории Флоке, в частности методом бесконечных определителей Хилла, а также методом гармонического баланса и классическими асимптотическими методами.

Применительно к исследованию распространения упругих волн в пространственно периодических структурах модифицированный МПРД оказывается близок к методам гомогенизации, в частности, к процедуре осреднения динамических процессов в таких структурах, предложенной в (Бахвалов, Панасенко, 1984). Также имеет место связь обоих предлагаемых в работе методов с подходами к исследованию распространения упругих волн в периодических структурах, основанными на теории Флоке, например, с методом пространственных гармоник (Mead, 1996).

Научная новизна работы.

1. Предложена новая модификация МПРД, имеющая более широкую область применимости, чем его исходная формулировка и традиционные методы нелинейной динамики, в частности, методы многих масштабов и усреднения. Данная модификация может быть использована для решения задач, не предполагающих введения традиционных ограничений на спектр частот возбуждения, а также при наличии сильного параметрического воздействия на систему и (или) сильной нелинейности. Кроме того, с ее помощью удается исследовать системы, находящиеся под действием многих параметрических и (или) внешних сил с некратными частотами. Данный метод позволяет находить как стационарные, так и нестационарные решения, описывающие колебания с медленно изменяющимися амплитудами.
2. Предложен новый аналитический приближенный метод исследования линейной и нелинейной динамики систем и структур, движения которых не допускают разделения по времени на быстрые и медленные, названный Методом Изменяющихся Амплитуд (МИА). В отличие от традиционных методов нелинейной динамики, в частности, методов гармонического баланса, многих масштабов и усреднения, данный метод не предполагает введения ограничений на класс разыскиваемых решений. Метод не требует наличия малого параметра в исходных уравнениях, так что с его помощью могут быть рассмотрены системы под сильным параметрическим воздействием и с существенной нелинейностью.
3. Предложенный модифицированный МПРД адаптирован и использован для исследования динамики упругих систем, движения которых разделяются не по времени, а по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся компоненты; в частности, метод применим для изучения колебаний пространственно периодических структур.

4. Предложенный Метод Изменяющихся Амплитуд адаптирован и применен для исследования линейной и нелинейной динамики периодических структур, движения которых не допускают разделения по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся компоненты.
5. Показано, что амплитуда сигнала нелинейного параметрического усилителя может быть существенной в случае очень слабого внешнего воздействия, так что коэффициент усиления системы может принимать сколь угодно большие практически допустимые значения.
6. Получено, что максимальная амплитуда сигнала нелинейного параметрического усилителя может быть больше при наличии расстройки между частотами внешнего и параметрического воздействий, чем при ее отсутствии.
7. Для балок и струн с периодически переменными поперечными сечениями выявлено присутствие длинноволновой компоненты в их собственных формах, имеющих период близкий к периоду модуляции, что указывает на свойство неоднородных периодических структур поддерживать длинноволновые колебания на высоких частотах.
8. Выделены ключевые параметры, определяющие влияние эффектов, учитываемых в теории Тимошенко, на дисперсионное соотношение и полосы частот запирания балки, совершающей поперечные колебания. В частности выявлено, что с уменьшением гибкости балки полосы частот запирания смещаются вниз по частоте и их ширина увеличивается.
9. Предложен новый способ подавления вибрации в ограниченной конструкции, находящейся под действием произвольно распределенной периодической по времени внешней нагрузки, путем пространственных модуляций ее параметров. Эффективность способа проиллюстрирована на примере струны с переменным поперечным сечением.
10. Проведено исследование влияния различных нелинейных эффектов на дисперсионное соотношение и полосы частот запирания периодической балки Бернулли-Эйлера. Показано, что нелинейная инерция может приводить к исчезновению полос частот запирания.
11. Для продольного волнового движения в периодическом волноводе с произвольной формой корригации выявлена связь между шириной и положением полос частот запирания и амплитудами гармоник, входящих в разложение этой формы корригации в ряд Фурье.
12. Метод Изменяющихся Амплитуд адаптирован для исследования систем, параметры которых изменяются и по времени и по пространственной координате. С его помощью показано в частности, что даже малая пространственная периодичность продольно движущейся струны может привести к подавлению областей параметрической неустойчивости.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая ценность работы состоит в создании новых аналитических методов исследования динамики линейных и нелинейных упругих систем и структур, имеющих более широкую область применимости и позволяющих получить более широкий класс решений, чем традиционные асимптотические и приближенные методы.

Практическая ценность работы состоит в выявлении с помощью предложенных аналитических методов ряда значимых с прикладной точки зрения эффектов и явлений, возникающих в различных линейных и нелинейных системах, в частности эффектов, связанных с распространением упругих волн в периодических структурах и композитных материалах, подавлением вибрации в заданных частях распределенных конструкций, управлением сигналами нелинейных микро- и нано- масштабных параметрических усилителей, контролем автоколебаний в автономных системах, подавлением областей параметрической неустойчивости колебаний систем с пространственно-временными модуляциями параметров, например, движущихся периодических цепей приводов, ремней машин, линий конвейеров и т.д. Предлагаемые в работе методы позволяют решить актуальную задачу создания упругих структур и систем с заданными динамическими свойствами, например, с заданными собственными формами и частотами колебаний, посредством пространственных (и/или временных) модуляций параметров, что может послужить толчком к разработке новых типов структур и материалов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1) Предложена новая модификация Метода Прямого Разделения Движений, имеющая более широкую область применимости, чем его исходная формулировка и традиционные методы нелинейной динамики, в частности, методы многих масштабов и усреднения. Данная модификация МПРД может быть использована для решения задач, не предполагающих введения традиционных ограничений на спектр частот возбуждения, т.е. в случаях, когда это возбуждение не является околорезонансным или низко- или высокочастотным. Кроме того, ее применение позволяет отказаться и от других, обычно вводимых при использовании асимптотических методов, ограничений на рассматриваемые системы, в частности, исследовать существенно нелинейные задачи и случаи сильного параметрического воздействия.
2) Предложен новый аналитический приближенный метод исследования линейной и нелинейной динамики систем и структур, движения которых не допускают разделения по времени на быстрые и медленные, названный Методом Изменяющихся Амплитуд. В отличие от традиционных методов нелинейной динамики, в частности, методов гармонического баланса, многих масштабов и усреднения, данный метод не предполагает введения ограничений на класс разыскиваемых решений. Кроме того, использование метода не требует наличия малого параметра в исходных уравнениях. В частности, с его помощью удается исследовать

системы, находящиеся под действием многих параметрических и (или) внешних сил с некратными частотами.

3) Предложенная модификация МПРД адаптирована и использована для исследования динамики упругих систем, движения которых разделяются не по времени, а по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся компоненты; в частности, метод применим для изучения колебаний пространственно периодических структур.
4) Предложенный Метод Изменяющихся Амплитуд адаптирован и использован для исследования динамики периодических структур, движения которых не допускают разделения по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся компоненты. Показана применимость метода для исследования колебаний распределенных конструкций, параметры которых изменяются и по времени и по координате.
5) С помощью предложенных в работе методов выявлен ряд значимых эффектов, возникающих в различных линейных и нелинейных системах, в частности эффекты, связанные с распространением упругих волн в периодических структурах и композитных материалах, подавлением вибрации в заданных частях распределенных конструкций, управлением сигналами нелинейных микро- и нано- масштабных параметрических усилителей, контролем автоколебаний в автономных системах, подавлением областей параметрической неустойчивости колебаний систем с пространственно-временными модуляциями параметров и т.д.

Обоснованность и достоверность результатов обеспечивается анализом существующих работ по теме диссертации, использованием математически и физически обоснованных допущений при разработке предлагаемых в работе новых аналитических методов, сравнением полученных теоретически результатов с экспериментальными данными и результатами численных расчетов, систематическим сведением полученных результатов к известным частным случаям, а также продуманной постановкой экспериментальных исследований, которые проводились при использовании высокоточных современных приборов.

Апробация работы. Результаты работы были представлены и обсуждались на: Международной конференции Euromech Colloquium 503 Nonlinear normal modes, Dimension reduction and Localization in vibrating systems, Рим (2009); Международной конференции 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011), Рим (2011); Международной школе-конференции «Актуальные проблемы механики» (Advanced Problems in Mechanics), Санкт-Петербург (2012, 2013, 2014); Международной конференции EUROMECH 532 – 1st International Colloquium on Time-periodic Systems «Current trends in theory and application», Франкфурт (2012); Международной конференции COMPDYN 2013 (4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural

Dynamics and Earthquake Engineering), Кос (2013); Международной конференции 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP 2013), Лиссабон (2013); Международной конференции 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Вена (2014); Международном конгрессе 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), Барселона (2014); Международном конгрессе 22nd International Congress on Sound and Vibration, Флоренция (2015); Международной конференции COMPDYN 2015 (5th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering), Крит (2015); Международном симпозиуме IUTAM Symposium on Analytical Methods in Nonlinear Dynamics, Франкфурт (2015); Семинаре совместной лаборатории «Вибрационной механики» ИПМаш РАН и НПК «Механобр-техника», Санкт-Петербург (2014, 2016); Городском семинаре по механике под руководством чл.-корр. РАН Д.А. Индейцева, Санкт-Петербург (2014, 2015); Семинаре им. А.А. Ильюшина кафедры теории упругости Механико-математического факультета МГУ, Москва (2016).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 25 научных работ, 12 из которых в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Вклад автора в публикации, выполненные в соавторстве, состоял в формулировке основных идей и гипотез, математической постановке задач, выполнении аналитических исследований и численных расчетов, непосредственном участии в экспериментальных исследованиях. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 310 страниц, в том числе 74 рисунка. Список литературы содержит 200 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении, являющимся первым разделом работы, описывается предмет исследования, обосновывается его актуальность, дается характеристика степени разработанности темы диссертации и проводится обзор литературы. Формулируются цели и задачи диссертации, описывается научная новизна работы, а также теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Дается общая характеристика работы с описанием методов исследования, приводятся основные положения, выносимые на защиту, также описываются степень достоверности и апробация результатов.

Проводится краткое изложение основ традиционного МПРД, при использовании которого частота внешнего колебательного воздействия на систему, как правило, предполагается высокой, т.е. много большей собственной частоты (собственных частот) системы. В результате такого воздействия обычно возникает движение системы $\boldsymbol{x}(t)$ из двух составляющих – медленной $\boldsymbol{X}(t)$ и быстрой $\boldsymbol{\psi}(t)$ (понятия «высокочастотные», «быстрые» и «медленные» формализованы в (Блехман, 1994)):

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\psi}(t, \omega t), \tag{1}$$

где ω - частота воздействия на систему, $\boldsymbol{X}$ – медленная, а $\boldsymbol{\psi}$ – быстрая 2π-периодическая по безразмерному быстрому времени $\tau = \omega t$ составляющая с нулевым средним по τ:

$$\langle \boldsymbol{\psi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\psi}(t, \tau) d\tau = 0 \tag{2}$$

(угловые скобки используются для обозначения соответствующего осреднения). Основная идея традиционного МПРД состоит в переходе от исходных уравнений движения системы к уравнениям, описывающим поведение его медленной составляющей $\boldsymbol{X}(t)$, обычно представляющей основной интерес.

Второй раздел посвящен разработке, описанию и применению новой модификации МПРД для исследования динамики систем общего вида, допускающих разделение движений по времени.

В пункте 2.1 обосновывается актуальность проблемы создания новых аналитических методов, применимых для решения задач, не предполагающих введение традиционных ограничений на спектр частот возбуждения, т.е. в случаях, когда это возбуждение не является околорезонансным или низко- или высокочастотным. Описываются главная идея и математические основы предлагаемой модификации МПРД.

Модифицированный МПРД предполагает рассмотрение безразмерных уравнений, в частности осуществляется переход от исходного размерного времени t к безразмерному времени $\tau = \omega t$. Решение исходных уравнений движения предлагается разыскивать в форме, сходной (1):

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(T_1) + \boldsymbol{\psi}(T_1, T_0), \tag{3}$$

где новые масштабы времени T_1 и T_0 определены как $T_0 = \tau$, $T_1 = \varepsilon T_0$. Здесь $\varepsilon << 1$ - искусственно введенный малый параметр, $\boldsymbol{X}$ - “медленная”, а $\boldsymbol{\psi}$ - “быстрая”, 2π - периодическая по времени T_0 переменная с нулевым средним:

$$\langle \boldsymbol{\psi}(T_1, T_0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\psi}(T_1, T_0) dT_0 = 0$$

Подобно методу многих масштабов, введенные масштабы времени T_1 и T_0 полагаются независимыми, так что $\dfrac{d^2}{d\tau^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \dfrac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2}{\partial T_1^2}$.

Таким образом, происходит отказ от используемого в традиционном МПРД требования о том, чтобы частота внешнего воздействия ω была много больше собственной частоты исходной системы. В тоже время, применение модифицированного МПРД налагает ограничения на класс разыскиваемых решений: могут быть определены только близкие к периодическим решения, описывающие колебания с медленно изменяющимися амплитудами. В качестве иллюстрации решение (3) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{b}_j(T_1)\exp(\mathrm{i}jT_0) = \boldsymbol{b}_0(T_1) + \boldsymbol{b}_1(T_1)\exp(\mathrm{i}T_0) + \boldsymbol{b}_{-1}(T_1)\exp(-\mathrm{i}T_0) \\ + \boldsymbol{b}_2(T_1)\exp(\mathrm{i}2T_0) + \boldsymbol{b}_{-2}(T_1)\exp(-\mathrm{i}2T_0) + \ldots \end{aligned}, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{b}_j(T_1)$ - медленно меняющиеся амплитуды колебаний системы, и

$$\boldsymbol{X}(T_1) = \boldsymbol{b}_0(T_1), \qquad \boldsymbol{\psi}(T_1, T_0) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \boldsymbol{b}_j(T_1)\exp(\mathrm{i}jT_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{b}_j(T_1)\exp(\mathrm{i}jT_0).$$

Как видно, решения (3), (4) характеризуются двумя масштабами времени и сходны решениям, получаемым с помощью классических асимптотических методов, например, методов многих масштабов и усреднения. Однако, в отличие от этих методов, предлагаемая модификация МПРД не требует наличия малого параметра в рассматриваемых исходных уравнениях движения. Действительно, введенный малый параметр ε является *характеристикой разыскиваемого решения*, а не рассматриваемых уравнений. Так что модифицированный МПРД может быть использован для решения уравнений, в которых выделить малый параметр не представляется возможным. В частности, с помощью данного метода удается рассмотреть системы с немалой нелинейностью, что проиллюстрировано в пунктах 2.3 и 2.4 диссертационной работы. Таким образом, область применимости модифицированного МПРД оказывается шире, чем у классических асимптотических методов и традиционного МПРД.

Отмечается, что использование модифицированного МПРД предполагает отказ от ряда упрощений традиционного метода. Подобно другим приближенным методам, например, гармонического баланса и бесконечных определителей Хилла, для каждой рассматриваемой задачи модифицированный МПРД предоставляет явное условие, при выполнении которого полученные результаты являются справедливыми. Также проводится оценка погрешности найденного решения. Отмечается связь модифицированного МПРД с методами, основанными на теории Флоке, также выделяются его основные преимущества перед классическим методом гармонического баланса.

В пункте 2.2, в качестве первого примера использования модифицированного МПРД, исследуется классическое уравнение Матье, описывающее колебания, возникающие в различных механических и физических системах. Отмечается значение данного уравнения для теории динамической устойчивости упругих систем и исследования распространения волн в пространственно периодических структурах, для которых оно является классическим модельным уравнением.

Исследование уравнения Матье без явного малого параметра проводится с целью иллюстрации процедуры использования модифицированного МПРД. На примере этого уравнения показывается также, что область применимости предлагаемого нового метода шире, чем у классических асимптотических методов. Также обсуждаются некоторые преимущества модифицированного

МПРД перед другими приближенными методами, в частности методом бесконечных определителей Хилла. Рассматриваемое уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt_0^2} - \delta(1+\chi\cos t_0)\varphi = 0, \qquad (5)$$

Уравнение (5) не содержит малого параметра, так как $\delta \sim 1$ и $\chi \sim 1$. С помощью модифицированного МПРД получено уравнение медленных движений, а также условие устойчивости колебаний. Определена область применимости метода, т.е. значения параметров, при которых найденное решение описывает колебания с действительно медленно изменяющимися амплитудами. Проводится оценка погрешности решения, а также его сравнение с результатами, получаемыми с помощью классической теории Флоке и функций Матье, и с результатами численных экспериментов.

Пункт 2.3 работы посвящен исследованию сигнала нелинейного параметрического усилителя при соотношении 2:1 между частотами параметрического и внешнего воздействий. Отмечается актуальность данного исследования, в частности, для резонансных микро- и нано-масштабных систем, широко используемых для усиления различного рода сигналов. Такие системы, которые можно моделировать балочными структурами, проявляют ярко выраженный нелинейный характер поведения в случае сравнительно больших амплитуд колебаний. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения динамики таких систем при учете нелинейных факторов. В качестве простейшей модели может быть использована классическая нелинейность типа Дуффинга. В работе (Rhoads, Shaw, 2010), например, был исследован околорезонансный отклик такой системы для случая слабого параметрического воздействия и малой нелинейности. В данном пункте работы мы отказываемся от этих ограничений на параметры системы; кроме того, рассматриваем более широкий диапазон частот возбуждения, что представляет интерес для приложений. Исследуемое уравнение имеет вид:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \delta z + \chi z\cos 2t_0 + kz^3 = A\cos(t_0+\phi), \qquad (6)$$

здесь z представляет отклик усилителя, γ - коэффициент диссипации, которая полагается линейной, A и χ - амплитуды внешнего и параметрического воздействий, соответственно, ϕ - сдвиг фазы, δ - квадрат собственной частоты линеаризованной системы, и t_0 - безразмерное время.

Динамика системы рассматривается при $\delta \sim 1$ и $\chi \sim 1$, так что классические асимптотические методы не могут быть использованы. Методы, основанные на теории Флоке, также оказываются неприменимыми для исследования рассматриваемой нелинейной задачи. Поэтому используется модифицированный МПРД, с помощью которого составляются уравнения быстрых и медленных движений.

Отмечается, что при $\chi > 2\gamma$, т.е. в области неустойчивости линеаризованной системы, сигнал усилителя характеризуется пятью значениями амплитуды стационарных колебаний, три из которых устойчивы, и существенно отличается от отклика классической системы Дуффинга. Показано, что при $\chi > 2\gamma$ и $A \to 0$ коэффициент усиления G рассматриваемой системы приобретает очень большие значения в широком диапазоне параметров δ и χ. Данный результат свидетельствует о том, что для резонансных систем, работающих в нелинейных режимах, может иметь место очень значительное параметрическое усиление, что ясно указывает на преимущества нелинейного параметрического усилителя перед линейным.

Проведенный анализ показывает применимость модифицированного МПРД для исследования нелинейных систем с сильным параметрическим воздействием. Также иллюстрируются преимущества предлагаемого нового метода перед классическим методом гармонического баланса: 1) возможность получения сравнительно простой и надежной оценки устойчивости найденных периодических решений и 2) возможность нахождения нестационарных решений, описывающих колебания с медленно изменяющимися амплитудами.

В пункте 2.4 для иллюстрации того, что область применимости модифицированного МПРД не ограничивается только неавтономными системами, рассматриваются самовозбуждающиеся колебания в автономных системах на примере классического уравнения Ван дер Поля с сильной нелинейностью:

$$\ddot{v} + v - \mu(1 - v^2)\dot{v} = 0, \tag{7}$$

здесь v описывает динамику системы, μ - параметр нелинейности, который не полагается малым: $\mu \not\ll 1$, точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени t_0. Для решения существенно нелинейного уравнения (7) классические асимптотические методы оказываются неприменимыми. Метод гармонического баланса, в свою очередь, позволяет найти только чисто периодические решения. Используя модифицированный МПРД, вначале были найдены установившиеся режимы колебаний рассматриваемой системы с постоянными амплитудами. С целью проверки этих результатов была проведена серия численных экспериментов, показавшая хорошее согласие между аналитическим и численным решениями при $\mu < 2$.

Далее, используя введенный малый параметр $\varepsilon << 1$ (см. (3)), были определены нестационарные решения, описывающие колебания с медленно изменяющимися амплитудами. В качестве иллюстрации, на рисунке 1 показана найденная зависимость амплитуды B_1 колебаний системы от времени t_0 (сплошная линия) при $\mu = 1$; штриховая линия соответствует численному решению исходного уравнения (7).

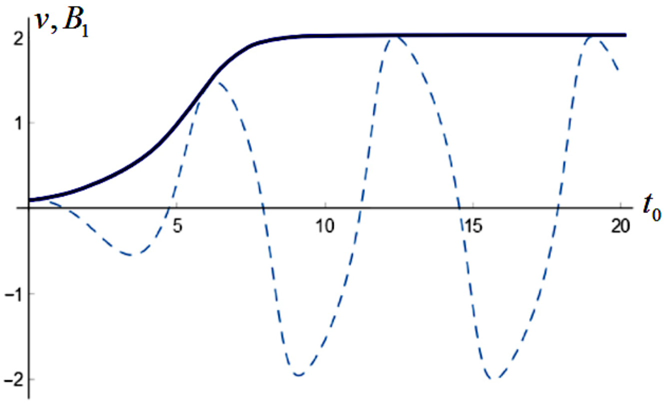

Рисунок 1. Зависимость амплитуды B_1 колебаний системы от времени t_0 (сплошная линия) и численное решение v исходного уравнения (7) (штриховая линия) при $\mu = 1$

В пункте 2.5. проводится обсуждение предложенного нового метода, модифицированного МПРД, в частности, его преимуществ по сравнению с классическим методом гармонического баланса, асимптотическими методами и подходами, основанными на теории Флоке. Также отмечаются определенные недостатки метода. Во-первых, метод является приближенным, и справедливость получаемых результатов оценивается апостериори. Во-вторых, метод накладывает ограничение на класс разыскиваемых решений: могут быть найдены только те решения, которые описывают колебания с медленно изменяющимися амплитудами. Классические асимптотические методы, например, метод многих масштабов и метод усреднения, также предполагают введение подобного ограничения на класс решений. Классический метод гармонического баланса, в свою очередь, применим для отыскания еще более узкого круга решений, а именно только чисто периодических решений. В то же время, в ряде случаев необходимо определить все решения рассматриваемых уравнений или найти решения, отличные от периодических или близких к периодическим.

Для решения таких задач в **разделе 3** работы предлагается новый аналитический метод, Метод Изменяющихся Амплитуд (МИА). В пункте 3.1. описываются главная идея и математические основы метода. Данный подход, в отличие от традиционных методов нелинейной динамики, в частности, методов гармонического баланса, многих масштабов и усреднения, а также модифицированного МПРД, не предполагает введения ограничений на класс разыскиваемых решений, т.е. позволяет находить все решения рассматриваемых дифференциальных уравнений. Решение уравнений предлагается разыскивать в форме, внешне сходной с (4):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{b}_j(t)\exp(\mathrm{i}jt) \\ &= \boldsymbol{b}_0(t) + \boldsymbol{b}_1(t)\exp(\mathrm{i}t) + \boldsymbol{b}_{-1}(t)\exp(-\mathrm{i}t) + \boldsymbol{b}_2(t)\exp(\mathrm{i}2t) + \boldsymbol{b}_{-2}(t)\exp(-\mathrm{i}2t) + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Однако, в отличие от модифицированного МПРД, амплитуды $\boldsymbol{b}_j(t)$ не полагаются изменяющимися медленно по сравнению с гармониками $\exp(ijt)$. Так что, в отличие от предложенного ранее метода, в Методе Изменяющихся Амплитуд используется один масштаб времени t, и МИА оказывается применим для исследования динамики систем и структур, движения которых не допускают разделения по времени на быстрые и медленные.

Подобно модифицированному МПРД, Метод Изменяющихся Амплитуд не требует наличия малого параметра в рассматриваемых исходных уравнениях движения. Однако, в отличие от предложенного ранее метода, МИА не предполагает введение и использование такого параметра в процессе решения, что указывает на его принципиальные отличия от асимптотических методов.

Из (8) видно, что МИА предполагает переход от исходной искомой функции $\boldsymbol{x}(t)$ к новым функциям $\boldsymbol{b}_j(t)$. Это делается с целью получения уравнений, не включающих время t в явном виде. Как известно (Арнольд, 1966), решение таких уравнений является намного более простой задачей, чем исследование уравнений, явно зависящих от t. Подобная же идея используется, например, в методах, основанных на теории Флоке, которые предполагают сведение уравнений с периодическими коэффициентами к системам уравнений с постоянными коэффициентами.

Переход от исходной искомой функции $\boldsymbol{x}(t)$ к новым неизвестным функциям $\boldsymbol{b}_j(t)$ предполагает возможность введения дополнительных ограничений на эти новые функции в форме серии уравнений. Например, при учете $m+1$-ой гармоники в ряду (8), т.е.

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=-m}^{m} \boldsymbol{b}_j(t)\exp(ijt)\,, \tag{9}$$

имеем $2m+1$ новых функций $\boldsymbol{b}_j(t)$, на которые можем наложить $2m$ дополнительных ограничений. В Методе Изменяющихся Амплитуд эти ограничения вводятся следующим образом: подставим анзац решения (9) в исходное рассматриваемое уравнение движения и приравняем нулю коэффициенты учитываемых низших гармоник $\exp(ijt)$. В результате получим $2m$ новых уравнений вида:

$$\boldsymbol{E}_k[\boldsymbol{b}_0(t),\boldsymbol{b}_1(t),\boldsymbol{b}_{-1}(t),...,\boldsymbol{b}_m(t),\boldsymbol{b}_{-m}(t)] = 0\ ,\quad k = 1,...,2m \tag{10}$$

Последнее $2m+1$-ое уравнение содержит все оставшиеся слагаемые исходного уравнения:

$$\boldsymbol{E}_{2m+1}[\boldsymbol{b}_0(t),\boldsymbol{b}_1(t),\boldsymbol{b}_{-1}(t),...,\boldsymbol{b}_m(t),\boldsymbol{b}_{-m}(t),t] = 0 \tag{11}$$

Таким образом, исходное уравнение движения для функции $\boldsymbol{x}(t)$ переформулировано в форме $2m+1$-го уравнения (10), (11) для новых функций $\boldsymbol{b}_j(t)$. Точное решение уравнений (10), (11) является достаточно трудной задачей и в общем случае не проще, чем решение исходного уравнения, так как (11) явно зависит от t. Однако, полученные новые уравнения являются удобными для приближенного решения. Приближение метода связано с отбрасыванием высших гармоник в уравнении (11), т.е. гармоник, отличных от удерживаемых в ряду (9). В результате уравнение (11) переписывается в виде:

$$\boldsymbol{E}^{*}_{2m+1}[\boldsymbol{b}_0(t),\boldsymbol{b}_1(t),\boldsymbol{b}_{-1}(t),...,\boldsymbol{b}_m(t),\boldsymbol{b}_{-m}(t)]=0 \ . \quad (12)$$

Как видно, оно не включает время t в явном виде, и решение системы уравнений (10), (12) является сравнительно простой задачей.

Далее отмечается связь предлагаемого нового подхода с классическим методом гармонического баланса: приближения обоих методов допустимы только при учете достаточного числа гармоник в решении. Как и модифицированный МПРД, для каждой рассматриваемой задачи МИА предоставляет явное условие, при выполнении которого приближение метода является справедливым. Метод Изменяющихся Амплитуд тесно связан с подходами, основанными на теории Флоке. В случае линейных уравнений с периодическими коэффициентами использование данных методов дает одинаковые результаты: с их помощью удается определить все решения рассматриваемых уравнений. Однако область применимости МИА существенно шире, чем у подходов теории Флоке, см. пункты 3.3, 3.4. Во-первых, предлагаемый новый метод применим для исследования нелинейных задач, во-вторых, с его помощью можно изучать системы, находящиеся под действием многих параметрических и (или) внешних сил с некратными частотами.

В пункте 3.2 работы, в качестве первого и простейшего примера использования МИА, кратко исследуется классическое уравнение Матье в более широкой области изменения параметров, чем ранее в пункте 2.2:

$$\ddot{x}+(\delta+\chi\cos 2t)x=0\,, \quad (13)$$

здесь $\delta \sim 10$ и $\chi \sim 1$, так что уравнение (13) не содержит явного малого параметра. Данное исследование проводится, в частности, с целью иллюстрации преимуществ МИА перед классическими асимптотическими методами, например, его более широкой области применимости. Также подчеркивается связь МИА с подходами теории Флоке. В результате, с помощью МИА находятся все решения уравнения (13) в рассматриваемой области изменения параметров, в частности, определяются границы устойчивости для третьего параметрического резонанса.

Пункт 3.3 посвящен исследованию сигнала нелинейного параметрического усилителя при наличии расстройки между частотами внешнего и параметрического воздействий. Такое исследование представляет существенный интерес для приложений, так как в реальных используемых микромасштабных усилителях могут возникать отклонения от строгого выполнения соотношения два к одному между этими частотами, например, из-за слабых изменений температуры среды или влияния случайных факторов и шумов, незначительных дефектов устройств и т.д. Кроме того, существенная нелинейность самих устройств может также служить причиной такого отклонения. Данное исследование является актуальным также и в связи с тем, что соотношение два к одному между частотами является оптимальным только в случае линейного усилителя; для нелинейного усилителя соотношение частот, при котором достигается максимальное усиление сигнала, пока не было установлено. Рассматривается следующее уравнение:

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2(1 + p\cos\Omega_{\text{p}}t)x + kx^3 = d\cos(\Omega_{\text{d}}t + \phi), \tag{14}$$

Здесь x представляет сигнал усилителя, β - коэффициент диссипации, которая полагается линейной, d и $p\omega^2$ - амплитуды внешнего и параметрического воздействий, соответственно, ϕ - сдвиг фазы, ω - собственная частота линеаризованной системы, и t - безразмерное время.

Рассматриваемая система находится под действием параметрического и внешнего воздействий с некратными частотами. Для исследования таких систем существующие аналитические методы, в частности, метод гармонического баланса, методы теории Флоке и классические асимптотические методы, оказываются не применимы. С помощью МИА был вначале решен линейный аналог уравнения (14). Было найдено единственное стационарное решение, являющееся квазипериодическим, а также определена его устойчивость, не зависящая от параметров внешнего воздействия.

Далее было рассмотрено нелинейное уравнение (14), найдены его стационарные решения, описывающие квазипериодические колебания. Наиболее значимый с точки зрения приложений результат, на который указывают полученные аналитически зависимости, состоит в том, что максимальная амплитуда сигнала усилителя может быть больше при наличии расстройки между частотами, чем при ее отсутствии. Так что в ряде случаев расстройка между частотами параметрического и внешнего воздействий является положительным фактором, и может быть введена в систему специально с целью увеличения максимальной амплитуды отклика усилителя. В тоже время, осредненная по времени амплитуда отклика системы всегда больше при отсутствии расстройки, чем при ее наличии. Результаты, полученные с помощью МИА, были подтверждены с помощью серии численных экспериментов.

Для дальнейшей проверки полученных результатов была проведена также серия натурных экспериментов. Рассматривались колебания консольной балки, одному из концов которой сообщалась вибрация согласно заданному закону. Вибрации вдоль оси балки соответствовали параметрическому возбуждению, поперечные вибрации – внешнему (прямому) возбуждению. С помощью лазерного датчика определялась максимальная амплитуда колебаний свободного конца балки за заданный промежуток времени. Экспериментальная установка показана на рисунке 2. В результате исследования был экспериментально подтвержден основной эффект, полученный аналитически с помощью МИА и имеющий большое прикладное значение, а именно тот факт, что максимальная амплитуда сигнала усилителя может быть больше при наличии расстройки между частотами внешнего и параметрического воздействий, чем при ее отсутствии.

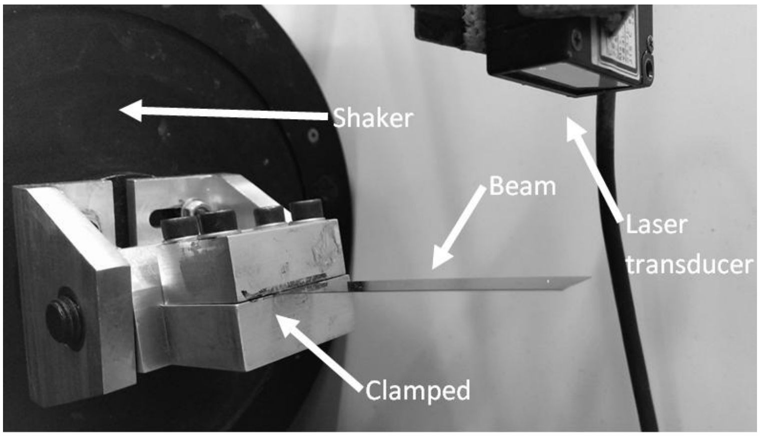

Рисунок 2. Экспериментальная установка – консольная балка, одному из концов которой сообщалась вибрация согласно заданному закону

Пункт 3.4 работы посвящен исследованию влияния характера нелинейности на сигнал параметрического усилителя. Ранее, в пунктах 2.3 и 3.3, обсуждался сигнал усилителей при наличии кубической нелинейности типа Дуффинга. Данная нелинейность описывает симметричные упругие силы, возникающие, например, при больших прогибах балок или из-за связи между их прогибом и растяжением. В тоже время, для приложений существенный интерес представляет изучение совместного влияния квадратичной и кубической нелинейностей на сигнал усилителя. Квадратичная нелинейность моделирует несимметричные упругие силы, возникающие, например, из-за несимметричности балок, их исходной кривизны или статического отклонения или при выпучивании балок (Болотин, 1956).

Как и ранее в пункте 2.3, сигнал усилителя исследуется при отсутствии расстройки между частотами параметрического и внешнего воздействий, т.е. в случае выполнения соотношения 2 к 1 между ними. Кроме того, мы не налагаем требований на амплитуду параметрического воздействия и коэффициенты нелинейности быть малыми и рассматриваем широкий диапазон частот возбуждения. Так что классические асимптотические методы не могут быть использованы, также как и подходы теории Флоке.

В результате, с помощью МИА показано, что присутствие квадратичной нелинейности наряду с кубической существенно влияет на сигнал параметрического усилителя: изменяется число стационарных решений, например, можем иметь семь решений (вместо пяти), четыре из которых устойчивы, и при определенных соотношениях параметров удается получить близкий к линейному отклик усилителя с очень большой амплитудой. Таким образом, квадратичная нелинейность может явиться важным фактором, определяющим основные характеристики усилителя, например, его коэффициент усиления; такая нелинейность может быть введена в систему специально с целью улучшения характеристик усилителя.

В пункте 3.5 работы проводится обсуждение предложенного нового метода, Метода Изменяющихся Амплитуд, в частности его связи и преимуществ перед существующими аналитическими методами линейной и нелинейной динамики.

Раздел 4 работы посвящен исследованию динамики структур, движения которых допускают разделение по пространственной координате, а не по времени, на медленно и быстро изменяющиеся компоненты с помощью модифицированного Метода Прямого Разделения Движений. В частности, данный метод может быть использован для изучения распространения упругих волн в волноводах с медленно меняющимися параметрами или в пространственно периодических структурах. Подобные задачи часто встречаются в приложениях, например, при исследовании свойств композитных материалов, и поэтому имеют большое прикладное значение. Решение исходных уравнений движения относительно безразмерной координаты x_0 предлагается разыскивать в форме:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1(X_1) + \boldsymbol{\psi}(X_1, X_0). \tag{15}$$

Здесь масштабы координат X_1 и X_0 введены подобно описанному выше в разделе 2: $X_0 = x_0$, $X_1 = \varepsilon X_0$, $\varepsilon << 1$; $\boldsymbol{A}_1$ – "медленно изменяющаяся", а $\boldsymbol{\psi}$ – "быстро изменяющаяся", 2π- периодическая по безразмерной координате X_0 переменная, среднее за период по X_0 значение которой равно нулю:

$$\left\langle \boldsymbol{\psi}(X_1, X_0) \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\psi}(X_1, X_0)\,dX_0 = 0$$

Медленно изменяющаяся компонента $\boldsymbol{A}_1$ описывает длинноволновые процессы, протекающие на макро-масштабе, который определяется характерным пространственным размером задачи. Быстро изменяющаяся компонента $\boldsymbol{\psi}$ описывает коротковолновые процессы, протекающие на микро-масштабе, который определяется периодом рассматриваемой структуры. Основной интерес, как правило, представляют макро-масштабные процессы, так что одной из целей метода является получение выражений для компоненты $\boldsymbol{A}_1$. Таким образом, модифицированный МПРД позволяет находить решения, описывающие динамику структур, представимую в виде двух компонент: медленно изменяющейся (по координате) длинноволновой компоненты $\boldsymbol{A}_1$ и быстро изменяющейся коротковолновой компоненты $\boldsymbol{\psi}$.

В пункте 4.2 в качестве примера использования модифицированного МПРД для исследования структур, движения которых допускают разделение по пространственной координате, а не по времени, рассматриваются колебания одномерной распределенной системы, струны с переменным поперечным сечением. Данная система является модельной для целого ряда актуальных для приложений задач, например, о колебаниях линий электропередач, динамике подвесных мостов и тросов и т.д. Колебания струны длиной l с переменным поперечным сечением описываются уравнением:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{16}$$

Здесь ρ − плотность материала струны, S − площадь поперечного сечения, T − сила натяжения струны, $u(x,t)$ − отклонение струны. Пространственные модуляции площади поперечного сечения полагаются определяемыми соотношением: $S = S_0(1+\alpha\cos kx)$, $0 \le \alpha < 1$. Граничные условия имеют вид:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \tag{17}$$

В результате, с помощью модифицированного МПРД получены аналитические выражения, описывающие собственные формы колебаний струны, содержащие медленно и быстро изменяющиеся компоненты по пространственной координате; также определены соответствующие им собственные частоты. Проведена проверка полученных результатов с помощью серии численных экспериментов. Показано в частности, что колебания струны на высоких собственных частотах содержат длинноволновую компоненту, что может иметь определенное значение для приложений, так как указывает на свойство неоднородных периодических структур поддерживать длинноволновые колебания на высоких частотах.

Раздел 5 работы посвящен исследованию динамики пространственно периодических структур, без использования разделения движений по координате на медленно и быстро изменяющиеся составляющие, с помощью Метода Изменяющихся Амплитуд. Данный метод, в отличие от модифицированного МПРД, не налагает ограничений на класс разыскиваемых решений и позволяет находить все формы колебаний исследуемой системы в рассматриваемом диапазоне частот. Кроме того, с его помощью могут быть определены дисперсионные соотношения периодических структур, в частности их полосы частот запирания и пропускания, в том числе и в нелинейных случаях. При использовании МИА в таких задачах решение исходных уравнений движения предлагается разыскивать в форме:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{b}_j(x)\exp(\mathrm{i}jx) = \boldsymbol{b}_0(x) \\ +\boldsymbol{b}_1(x)\exp(\mathrm{i}x) + \boldsymbol{b}_{-1}(x)\exp(-\mathrm{i}x) + \boldsymbol{b}_2(x)\exp(\mathrm{i}2x) + \boldsymbol{b}_{-2}(x)\exp(-\mathrm{i}2x) + \ldots\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь амплитуды $\boldsymbol{b}_j(x)$ не полагаются изменяющимися медленно по сравнению с пространственными гармониками $\exp(ijx)$.

Задачи, рассмотренные в данном разделе работы, составляют наиболее существенную часть диссертации. Это связано, в первую очередь, с их большой прикладной значимостью. Кроме того, на их примере иллюстрируются новизна и преимущества предлагаемого нового метода, Метода Изменяющихся Амплитуд, для исследования различных задач механики деформируемого твердого тела перед существующими подходами.

Пункт 5.2 работы посвящен исследованию поперечных колебаний балки Бернулли-Эйлера с переменным поперечным сечением. Несмотря на сравнительную простоту, данная система является базовой моделью многих конструкций и сооружений, часто встречающихся в технике, например, труб, лопастей роторов и даже небоскребов. Отметим, что использование теории

Бернулли-Эйлера предполагает рассмотрение только волн, длина которых много больше толщины балки, так что деформации сдвига и инерция на поворот поперечного сечения могут не учитываться. Погонная масса $\rho A(\tilde{x})$ и жесткость $EI(\tilde{x})$ балки предполагаются периодическими функциями осевой координаты $\tilde{x}$.

В результате, используя МИА, было определено дисперсионное соотношение рассматриваемой неоднородной балки, а также ее полосы частот запирания – диапазоны частот, в которых происходит затухание волн. Далее было проведено исследование влияния модуляций на собственные частоты и формы балки в случае шарнирного закрепления. Показано, в частности, что при нецелом числе ячеек, укладывающихся в длину балки, собственные частоты балки могут лежать в полосах запирания, и такие собственные частоты изменяются наиболее существенно из-за модуляций поперечного сечения. Также выявлено присутствие длинноволновой компоненты в собственных формах, чей период близок к периоду модуляции. Полученные результаты были проверены с помощью серии численных экспериментов.

Пункт 5.3 работы посвящен определению дисперсионных соотношений и полос частот запирания балки с переменным поперечным сечением при использовании теории Тимошенко. Эта теория учитывает влияние деформаций сдвига и инерции на поворот поперечного сечения на динамику балки. Мы отказываемся от требования к длине рассматриваемых волн быть много больше толщины балки, так что рассматриваемый диапазон частот включает сравнительно высокие частоты, что является актуальным для приложений.

Уравнения, описывающие колебания балки Тимошенко с переменным поперечным сечением, имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa GA(x)\left(\alpha-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\rho A(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, \qquad (19)$$

$$\kappa GA(x)\left(\alpha-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)+\rho I(x)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}=0, \qquad (20)$$

здесь $v(x,t)$ - поперечное перемещение, а $\alpha(x,t)$ - угол поворота сечения балки, E - модуль Юнга, ρ - плотность материала балки, $I(x)$ - момент инерции поперечного сечения балки, G - модуль сдвига, κ - коэффициент сдвига и $A(x)$ - переменная площадь поперечного сечения балки.

Рассматриваются модуляции сечения балки с периодом Θ. Вводятся три безразмерных параметра β, μ и $\tilde{\omega}$. Первый параметр $\beta=\tilde{k}^2 r_0^2$ характеризует гибкость балки, здесь $\tilde{k}=2\pi/\Theta$, $r_0=\sqrt{I_0/A_0}$, так что чем больше β, тем сильнее эффекты теории Тимошенко. Второй параметр $\mu=E/(\kappa G)=2(1+\upsilon)/\kappa$ является отношением модуля упругости к модулю сдвига материала балки. Третий параметр $\tilde{\omega}=\tilde{k}^2\sqrt{EI_0/(\rho A_0)}$ является частотой, с которой волны длиной $2\pi/\tilde{k}$ распространяются в однородной балке Бернулли-Эйлера.

В результате, с помощью МИА определены дисперсионное соотношение балки и ее полосы частот запирания. В частности выявлено, что с увеличением параметра β эффекты теории Тимошенко усиливаются, и полосы частот запирания смещаются вниз по частоте и их ширина увеличивается. В случае малых значений параметра β влияние параметра μ на дисперсионное соотношение балки оказывается пренебрежимо слабым. При больших значениях β увеличение параметра μ приводит к усилению эффектов теории Тимошенко, в частности, к расширению полос частот запирания.

С целью проверки полученных результатов была проведена серия численных экспериментов с помощью программы ANSYS 16.0. В качестве иллюстрации, на рисунке 3 представлена конечно-элементная модель балки. Для всех рассмотренных значений параметров было отмечено хорошее согласие между аналитическими и численными результатами.

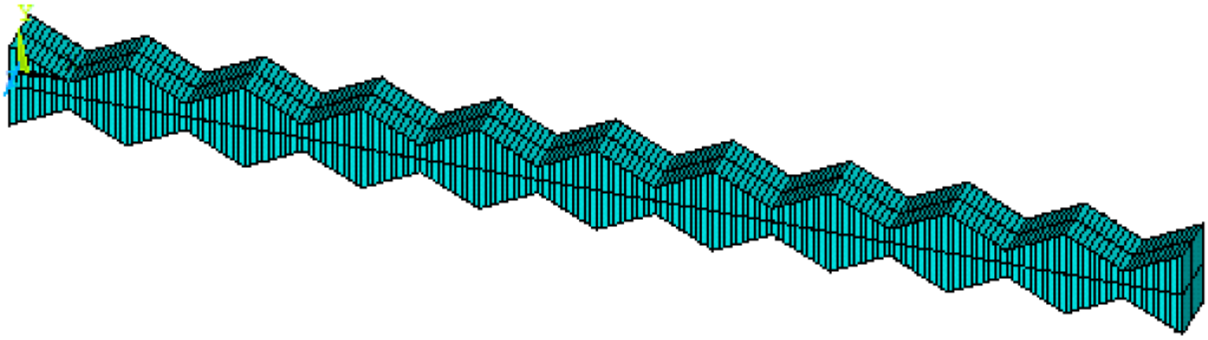

Рисунок 3. Конечно-элементная модель балки

Пункт 5.4 работы посвящен актуальной для приложений задаче о подавлении вибрации в заданном месте распределенной конструкции, находящейся под действием периодической по времени нагрузки. Задача рассматривается в нетрадиционной постановке: исследуются колебания конструкции под действием *распределенной* нагрузки при учете граничных условий. Используется пассивный контроль колебаний: периодические по пространственной координате модуляции параметров конструкции выступают в качестве средства подавления вибрации. В качестве примера рассматриваются колебания струны. Подавление вибрации в заданном месте струны осуществляется путем пространственных модуляций ее поперечного сечения. Данная система является модельной для целого ряда актуальных для приложений задач, например, о колебаниях линий электропередач под действием ветра и/или дождя, динамике подвесных мостов и тросов, взаимодействии коллоидов и мембран в биохимии и т.д. Более того, рассматриваемая задача позволяет выявить ряд общих эффектов и сделать выводы об эффективности предлагаемого способа подавления вибрации.

Уравнение колебаний рассматриваемой струны имеет вид

$$\rho S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{21}$$

где в дополнение к обозначениям, введенным в уравнении (16), $f(x,t)$ - распределенная внешняя нагрузка, периодическая по времени:

$f(x,t) = f(x,t+\Theta)$. Рассматриваются колебания струны с нулевыми начальными и простейшими граничными условиями: $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Вначале исследуется случай гармонической по координате внешней нагрузки. Отмечается, что для решения соответствующего безразмерного уравнения, получаемого из (21) и не содержащего малого параметра, асимптотические методы оказываются неприменимы. Метод гармонического баланса позволяет получить только чисто периодические решения этого уравнения, нас же интересуют все решения. В результате с помощью МИА были определены параметры модуляции поперечного сечения струны, обеспечивающие существенное снижение вибрации в заданном месте струны. Выявлены условия, при которых предлагаемая техника подавления вибрации является наиболее эффективной. Далее был рассмотрен случай постоянной по координате внешней нагрузки. С помощью МИА были найдены решения соответствующих безразмерных уравнений движения, и определены значения параметров модуляции площади поперечного сечения струны, обеспечивающие подавление вибрации в ее заданном месте.

Затем проводится исследование случая произвольно распределенной внешней нагрузки. Для всех рассмотренных значений параметров задачи найденная с помощью МИА модуляция площади поперечного сечения приводит к существенному снижению вибрации в заданном месте струны. Так что предлагаемый способ подавления вибрации оказывается эффективным в случаях гармонической по координате, постоянной и произвольно распределенной нагрузок.

Пункт 5.5 посвящен исследованию влияния нелинейных факторов на дисперсионные соотношения и полосы частот запирания периодической балки Бернулли-Эйлера. Отмечается, что нелинейные эффекты, возникающие в пространственно периодических структурах, изучены далеко не полностью, в то время как для многих приложений влияние нелинейных факторов на отклик структуры носит ключевой характер.

В работе (Болотин, 1956) было отмечено, что характер нелинейности для балки Бернулли-Эйлера существенно зависит от конкретных граничных условий. Например, при отсутствии ограничений на продольные движения концов балки, возможны большие прогибы, так что необходимо использовать точную (нелинейную) формулировку для кривизны балки, а также учитывать нелинейную инерцию, связанную с продольными движениями балки. Эффекты нелинейного материала также могут иметь значение в этом случае. Если продольные движения обоих концов балки ограничены, то другой источник нелинейности становится наиболее существенным, а именно связь изгиба с растяжением балки.

В первом случае, когда ограничения на продольные движения концов балки отсутствуют, и возможны большие прогибы, уравнение колебаний балки

Бернулли-Эйлера с переменным поперечным сечением при учете нелинейных факторов приобретает вид (см. например, (Болотин, 1956)):

$$\rho A_0\left(1+\chi_A \sin(k\tilde{x}+\phi)\right)\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2}-\left(\tilde{N}\tilde{w}'\right)' \\ +EI_0\left[\left(1+\chi_I \sin(k\tilde{x}+\phi)\right)\left(1+\frac{1}{2}\left(\tilde{w}'\right)^2-\tilde{\beta}_n\left(\tilde{w}''\right)^2\right)\tilde{w}''\right]''=0, \tag{22}$$

здесь $\tilde{w}(\tilde{x},\tilde{t})$ - поперечное смещение сечения балки с продольной координатой $\tilde{x}$ в момент времени $\tilde{t}$, штрих обозначает производную по $\tilde{x}$, E - модуль Юнга, а ρ - плотность материала балки, коэффициент $\tilde{\beta}_n$ определяет нелинейность материала балки (отношения между напряжением и деформацией), $\tilde{N}$ - дополнительная нелинейная инерционная сила:

$$\tilde{N}(\tilde{x},\tilde{t})=\int \rho A(\tilde{x})\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{t}^2}d\tilde{x}=-\frac{1}{2}\int \rho A(\tilde{x})\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2}\left[\int\left(\tilde{w}'\right)^2 d\tilde{x}\right]d\tilde{x}\,. \tag{23}$$

Как видно, удельная масса балки $\rho A(\tilde{x})$ и (линейная) изгибная жесткость $EI(\tilde{x})$ полагаются изменяющимися гармонически по осевой координате $\tilde{x}$ с амплитудами χ_A и χ_I соответственно, и пространственной частотой k.

Показано, что влияние нелинейностей на колебания балки зависит не только от величины реальных отклонений $\tilde{w}$ балки, но и от значения параметра k. Например, при больших k, т.е. в случае быстро изменяющегося (по координате) поперечного сечения, это влияние будет существенным даже при сравнительно малых реальных отклонениях балки.

В случае, когда движения обоих концов балки в продольном направлении ограничены, и имеет место связь изгиба с растяжением балки, уравнение колебаний приобретает вид (см. например, (Томсен, 2003)):

$$\left(EI(\tilde{x})\tilde{w}''\right)''+\rho A(\tilde{x})\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2}-\frac{1}{\int_0^{\tilde{l}}\frac{1}{EA(\tilde{x})}d\tilde{x}}\left(\eta\tilde{l}+\frac{1}{2}\int_0^{\tilde{l}}\left(\tilde{w}'\right)^2 d\tilde{x}\right)\tilde{w}''=0 \tag{24}$$

здесь η описывает малое исходное растяжение балки, и $\tilde{l}$ - длина балки.

Уравнения (22), (24) являются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями с сильным параметрическим возбуждением, и решение таких уравнений с помощью традиционных методов исследования пространственно периодических структур или стандартных асимптотических методов не является возможным. Поэтому мы используем предлагаемый в работе новый подход, МИА. С его помощью найдены решения исходных уравнений движения, описывающие распространяющиеся (или затухающие) волны с безразмерной частотой ω и волновым числом κ. В результате, определены дисперсионные соотношения $\kappa=\kappa(\omega)$ рассматриваемых нелинейных периодических балок при различных значениях параметров.

Показано, в частности, что полосы частот запирания сдвигаются в область более высоких частот из-за нелинейной кривизны, в то время как влияние нелинейного материала приводит к противоположному эффекту. Ширина полос частот запирания оказывается слабо зависящей от этих источников нелинейности. Показано, что исходное растяжение балки существенно влияет на ее дисперсионное соотношение: полосы частот запирания могут быть сдвинуты в область более высоких (или низких) частот, при этом существенно изменяется их ширина. Также могут возникнуть новые полосы частот запирания. Изолированное влияние нелинейности из-за связи изгиба с растяжением балки оказывается подобным влиянию нелинейной кривизны, хотя данный источник нелинейности является существенным при намного меньших отклонениях балки.

Показано, что среди рассмотренных источников нелинейности самое существенное влияние на дисперсионное соотношение балки с переменным поперечным сечением оказывает нелинейная инерция. Данный источник нелинейности приводит к исчезновению полос частот запирания.

Полученные результаты были проверены с помощью серии численных и натурных экспериментов. В натурных экспериментах использовались две стальных балки длинной 1 м с прямоугольным поперечным сечением постоянной толщины h и переменной ширины b. Внешнее воздействие было в форме удара, для чего использовался специальный молоток с датчиками. В результате определялись амплитудно-частотные характеристики балок, и выявлялись их полосы частот запирания. Балки подвешивались на мягких резинках, моделирующих свободные граничные условия. Акселерометр присоединялся к одному из концов балки (точка 6) и измерял ускорение в направлении оси y, см. рисунок 4. Импульс сообщался в точках 1-5. Полученные экспериментально результаты показали недостаточность линейной теории для описания отклика балок и необходимость учета нелинейных факторов, что и было сделано в настоящем пункте работы.

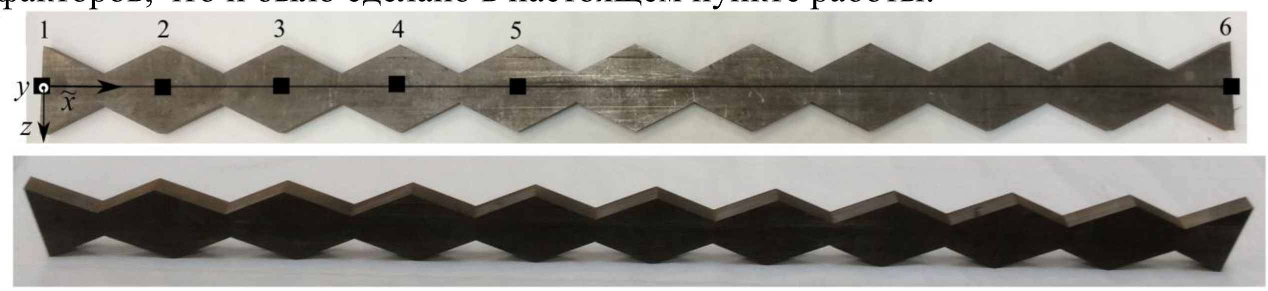

Рисунок 4. Экспериментальная балка толщиной h = 15 мм.

Пункт 5.6 работы посвящен определению полос частот запирания для продольного волнового движения в прямом периодическом волноводе. Изучается влияние формы корригации волновода на положение и ширину полос частот запирания. Рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left(\tilde{h}(\tilde{x})\frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{x}}\right)-\frac{1}{c^2}\tilde{h}(\tilde{x})\frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2}=0. \qquad (25)$$

Такой волновод можно рассматривать как упругий слой с переменной толщиной $\tilde{h}(\tilde{x})$, так что волновая скорость c в (25) определяется как $c=\sqrt{E/(\rho(1-\upsilon^2))}$, здесь E - модуль упругости, ρ - плотность, а υ - коэффициент Пуассона материала слоя. Также данное уравнение описывает продольные волны в неоднородном стержне. В этом случае $c=\sqrt{E/\rho}$, и $\tilde{h}(\tilde{x})$ - переменная площадь поперечного сечения стержня. В обоих случаях $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{t})$ описывает продольное смещение с координатой $\tilde{x}$ в момент времени $\tilde{t}$.

Рассматривается форма корригации общего вида, что позволяет выявить важные закономерности в образовании полос частот запирания. В частности, с помощью МИА определена связь между шириной полос запирания и амплитудами гармоник, входящих в разложение формы корригации в ряд Фурье. Показано также, что положение полос запирания не зависит от этих амплитуд. Для общей симметричной формы корригации ширина каждой нечетной полосы запирания зависит только от одной гармоники в разложении данной формы корригации, при этом номер этой гармоники равен номеру полосы запирания. Ширины четных полос запирания, однако, зависят от всех гармоник. Выявлены низкочастотные полосы запирания, которые располагаются ниже частоты, соответствующей наименьшей гармонике в разложении формы корригации в ряд Фурье. Для общей несимметричной формы корригации получено, что форма и положение каждой полосы запирания контролируется только одной гармоникой в разложении данной формы корригации, при этом номер этой гармоники равен номеру полосы запирания. Полученные результаты применимы для определения положения и ширины всех полос запирания для произвольной формы корригации, что указывает на их теоретическую и прикладную значимость.

Пункт 5.7 работы посвящен исследованию распространения поперечных волн в продольно движущейся струне. В отличие от предыдущих исследований по данной тематике, рассматривается динамика *неоднородной* струны, движущейся с переменной скоростью. Струна предполагается периодической по продольной координате, что является актуальным для описания реальных систем, например цепей приводов, ремней машин, линий конвейеров и т.д. Таким образом, исследуется динамика структуры с *пространственно-временными* модуляциями параметров. Целью исследования является выявление того, как пространственная периодичность струны может повлиять на ее динамику и устойчивость. Используя принцип Гамильтона, получено следующее уравнение, описывающее поперечные колебания струны, см. например (Светлицкий, 1987):

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho A' v\frac{\partial u}{\partial t}+\left(\rho A\dot{v}+\rho A' v^2-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2\rho A v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+(\rho A v^2-P)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (26)$$

Здесь ρ - плотность материала струны, $A(x)$ - переменная площадь поперечного сечения, $u=u(x,t)$ - поперечное смещение точки струны в момент времени t находящейся в положении x, P - сила натяжения струны, $v(t)$ - переменная скорость движения струны в продольном направлении.

Для изучения динамики струны Метод Изменяющихся Амплитуд используется в более общей формулировке, чем во всех предыдущих случаях. Данная формулировка подразумевает представление решения в виде ряда с амплитудами, переменными и по координате и по времени. Так что задача сводится к рассмотрению бесконечной системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами для этих амплитуд. В результате, с помощью метода показано, что даже малая пространственная периодичность движущейся струны может оказывать существенное влияние на характер ее колебаний, в частности, привести к подавлению областей параметрической неустойчивости. Такая периодичность может быть как неотъемлемой чертой рассматриваемой структуры, так и вводится специально для контроля ее динамики.

Рассмотренная задача свидетельствует о потенциале использования МИА для исследования динамики распределенных систем, параметрически возбуждаемых по разным пространственным координатам, например периодических по двум координатам пластин, оболочек и т.д.

Пункт 5.8 работы посвящен обсуждению результатов, полученных с помощью МИА при исследовании динамики пространственно периодических структур, движения которых не допускают разделения по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся компоненты.

В заключении сформулированы итоги и основные результаты исследования. Также обсуждаются рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

а) Предложена новая модификация Метода Прямого Разделения Движений, имеющая более широкую область применимости, чем его исходная формулировка и традиционные методы нелинейной динамики, в частности, методы многих масштабов и усреднения. Данная модификация МПРД может быть использована для решения задач, не предполагающих введение традиционных ограничений на спектр частот возбуждения, т.е. в случаях, когда это возбуждение не является околорезонансным или низко- или высокочастотным. Кроме того, ее применение позволяет также отказаться и от других, обычно вводимых при использовании асимптотических методов, ограничений на рассматриваемые системы, в частности, исследовать существенно нелинейные задачи.

б) Модифицированный МПРД применим для исследования нелинейных задач и систем, находящихся под действием многих параметрических и (или) внешних сил с некратными частотами, поэтому область его применимости шире, чем у методов, основанных на теории Флоке, например, метода бесконечных определителей Хилла.

в) Модифицированный МПРД позволяет находить нестационарные и непериодические решения, описывающие колебания с медленно изменяющимися амплитудами, что указывает на его преимущества перед классическим методом гармонического баланса.

г) С помощью модифицированного МПРД показано, что амплитуда сигнала нелинейного параметрического усилителя может быть существенной в случае очень слабого внешнего воздействия, так что коэффициент усиления системы может принимать сколь угодно большие практически допустимые значения. Данный факт свидетельствует о том, что в нелинейных резонансных системах может иметь место более существенное параметрическое усиление, чем в линейных.

д) На примере классического уравнения Ван дер Поля показано, что модифицированный МПРД может быть использован для исследования самовозбуждающихся колебаний, возникающих в существенно нелинейных автономных системах.

е) Предложен новый аналитический приближенный метод исследования линейной и нелинейной динамики систем и структур, движения которых не допускают разделения по времени на быстрые и медленные, названный Методом Изменяющихся Амплитуд (МИА). В отличие от традиционных методов нелинейной динамики, в частности, методов гармонического баланса, многих масштабов и усреднения, данный метод не предполагает введения ограничений на класс разыскиваемых решений.

ж) Использование Метода Изменяющихся Амплитуд не требует наличия малого параметра в исходных уравнениях, так что область его применимости оказывается шире, чем у классических асимптотических методов, в частности методов многих масштабов и усреднения. С помощью метода, например, могут быть рассмотрены системы под сильным параметрическим воздействием и с существенной нелинейностью.

з) На примере исследования сигнала нелинейного параметрического усилителя при наличии расстройки между частотами внешнего и параметрического воздействий показано, что МИА применим для изучения линейных и нелинейных систем под действием сил с некратными частотами, так что область применимости метода шире, чем у существующих аналитических методов, в частности, метода гармонического баланса и методов теории Флоке.

и) С помощью МИА получено, что максимальная амплитуда сигнала нелинейного параметрического усилителя может быть больше при наличии расстройки между частотами внешнего и параметрического воздействий, чем при ее отсутствии. Так что такая расстройка может стать положительным фактором, и вводиться в систему специально с целью увеличения максимальной амплитуды отклика усилителя. В тоже время, средняя по времени амплитуда отклика системы всегда больше при отсутствии расстройки, чем при ее наличии.

к) С помощью МИА показано, что присутствие квадратичной нелинейности наряду с кубической существенно влияет на сигнал параметрического усилителя: изменяется число стационарных решений (устойчивых и неустойчивых), и при определенных соотношениях параметров удается получить близкий к линейному сигнал с большой амплитудой. Таким образом, квадратичная нелинейность может явиться важным фактором, определяющим основные характеристики усилителя, например его коэффициент усиления; более того, такая нелинейность может быть введена в систему специально с целью улучшения показателей усилителя.

л) Предложенный модифицированный МПРД адаптирован и использован для исследования динамики упругих систем, движения которых разделяются не по времени, а по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся составляющие; в частности, метод применим для изучения пространственно периодических структур.

м) С помощью модифицированного МПРД получены аналитические выражения, описывающие собственные формы струны с периодически переменным поперечным сечением, допускающие разделение по пространственной координате; также определены соответствующие им собственные частоты. Показано, что колебания струны на высоких собственных частотах содержат длинноволновую компоненту, что имеет определенный интерес для приложений, так как указывает на свойство неоднородных периодических структур поддерживать длинноволновые колебания на высоких частотах.

н) Предложенный МИА адаптирован и применен для исследования линейной и нелинейной динамики периодических структур, движения которых не допускают разделения по пространственной координате на медленно и быстро изменяющиеся. Проиллюстрированы новизна и преимущества предлагаемого нового метода перед существующими подходами механики деформируемого твердого тела.

о) С помощью МИА определены дисперсионное соотношение и полосы частот запирания балки Бернулли-Эйлера с переменным поперечным сечением. Также получены аналитические выражения, описывающие собственные частоты и формы балки. Показано, в частности, что собственные частоты могут лежать в полосах запирания, и такие собственные частоты изменяются наиболее существенно из-за модуляций поперечного сечения балки.

п) На примере балки Тимошенко с переменным поперечным сечением показана применимость Метода Изменяющихся Амплитуд для исследования пространственно периодических структур, допускающих распространение двух видов волн: поперечных и сдвиговых.

р) С помощью МИА выделены ключевые параметры, определяющие влияние эффектов, учитываемых в теории Тимошенко, на дисперсионное соотношение и полосы частот запирания балки, совершающей поперечные колебания. В частности выявлено, что с увеличением гибкости балки эффекты теории Тимошенко усиливаются, и полосы частот запирания смещаются вниз по частоте и их ширина увеличивается.

с) Предложен новый способ подавления вибрации в ограниченной конструкции, находящейся под действием распределенной внешней нагрузки, путем введения пространственных модуляций ее параметров. Эффективность способа проиллюстрирована на примере струны с переменным поперечным сечением для случаев гармонической по координате, постоянной и произвольно распределенной нагрузок. С помощью МИА определены параметры модуляции поперечного сечения струны, обеспечивающие существенное снижение вибрации в ее заданном месте.

т) С помощью МИА проведено исследование влияния слабой нелинейности на дисперсионное соотношение и полосы частот запирания периодической балки Бернулли-Эйлера. Рассматривались два случая: 1) случай больших прогибов, когда учитывались нелинейная кривизна, нелинейный материал и нелинейная инерция балки и 2) случай, когда имеет место нелинейность из-за связи изгиба с растяжением балки. В результате, показано, что полосы частот запирания сдвигаются в область более высоких частот из-за нелинейной кривизны, в то время как влияние нелинейного материала приводит к противоположному эффекту. Ширина полос частот запирания оказывается слабо зависящей от этих источников нелинейности. Показано, что исходное растяжение балки существенно влияет на ее дисперсионное соотношение: полосы частот запирания могут быть сдвинуты в область более высоких (или низких) частот, при этом существенно изменяется их ширина. Также могут возникнуть новые полосы частот запирания. Изолированное влияние нелинейности из-за связи изгиба с растяжением балки оказывается подобным влиянию нелинейной кривизны, хотя данный источник нелинейности оказывается существенным при намного меньших отклонениях балки.

у) Показано, что среди рассмотренных источников нелинейности для периодической балки Бернулли-Эйлера, совершающей изгибные колебания, самое существенное влияние на ее дисперсионное соотношение оказывает нелинейная инерция. Данный источник нелинейности приводит к исчезновению полос частот запирания.

ф) С помощью МИА определены ширина и положение всех полос частот запирания для продольного волнового движения в периодическом волноводе с произвольной формой корригации, который может рассматриваться как упругий слой с переменной толщиной или как стержень с переменным поперечным сечением. Выявлена связь между шириной полос запирания и амплитудами гармоник, входящих в разложение формы корригации в тригонометрический ряд Фурье. Показано также, что положение полос запирания не зависит от этих амплитуд.

х) Метод Изменяющихся Амплитуд адаптирован для исследования систем, параметры которых изменяются и по времени и по пространственной координате. Также проиллюстрирован потенциал использования метода для исследования динамики распределенных систем, периодичных по двум (или трем) пространственным координатам с разными периодами.

ц) С помощью МИА проведено исследование динамики неоднородной периодической струны, движущейся в продольном направлении с переменной скоростью. В результате показано, что даже малая пространственная периодичность движущейся струны может оказывать существенное влияние на характер ее колебаний, в частности, привести к подавлению областей параметрической неустойчивости.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Neumeyer, S., **Sorokin, V.S.,** Thomsen J.J., (2016) Effects of quadratic and cubic nonlinearities on a perfectly tuned parametric amplifier. *Journal of Sound and Vibration*, в печати
2. **Sorokin, V.S.** (2016) Effects of corrugation shape on frequency band-gaps for longitudinal wave motion in a periodic elastic layer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 139 (4), 1898, http://dx.doi.org/10.1121/1.4945988
3. **Sorokin, V.S.,** Thomsen, J.J. (2016) Effects of weak nonlinearity on dispersion relation and frequency band-gaps of a periodic Bernoulli-Euler beam. *Proceedings of the Royal Society A*, 472: 20150751, http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2015.0751
4. Blekhman, I.I., **Sorokin, V.S.** (2015) Effects produced by oscillations applied to nonlinear dynamic systems: a general approach and examples. *Nonlinear Dynamics*, 83 (4), pp. 2125-2141
5. **Sorokin, V.S.,** Thomsen, J.J. (2015) Eigenfrequencies and eigenmodes of a beam with periodically continuously varying spatial properties. *Journal of Sound and Vibration*, 347, pp. 14–26
6. Blekhman, I.I., **Sorokin, V.S.** (2015) Extension of the method of direct separation of motions for problems of oscillating action on dynamical systems. *Procedia IUTAM: Symposium Analytical Methods in Nonlinear Dynamics*, 19, pp. 75–82
7. **Sorokin, V.S.,** Thomsen, J.J. (2015) The method of varying amplitudes for solving (non)linear problems involving strong parametric excitation. *Proceedings of the IUTAM Symposium on Analytical Methods in Nonlinear Dynamics*, Frankfurt, Germany, 6–9 July, 2 pp.
8. **Sorokin, V.S.,** Thomsen, J.J. (2015) Vibration suppression for strings with distributed loading using spatial cross-section modulation. *Journal of Sound and Vibration*, 335, pp. 66–77

9. **Sorokin, V.S.,** Thomsen, J.J. (2015) Weakly nonlinear dispersion and stop-band effects for periodic structures. *Proceedings of COMPDYN 2015 (5th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, 2015)*, Crete, Greece, 25–27 May, 1 pp.
10. **Sorokin, V.S.,** Thomsen, J.J. (2015) Effects of weak nonlinearity on dispersion relations and frequency band-gaps of periodic structures. *Proceedings of 22nd International Congress on Sound and Vibration*, Florence, Italy, 12–16 July, 7 pp.
11. **Sorokin, V.S.** (2014) On the unlimited gain of a nonlinear parametric amplifier. *Mechanics Research Communications*, 62, pp. 111–116
12. **Sorokin, V.S.** (2014) Analysis of motion of inverted pendulum with vibrating suspension axis at low-frequency excitation as an illustration of a new approach for solving equations without explicit small parameter. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 63, pp. 1–9
13. **Сорокин, В.С.** (2014) Гомогенизация одномерных колебательных систем с пространственно модулируемыми параметрами. *Прикладная Математика и Механика*, 78 (3), с. 346-355.
14. **Sorokin, V.S.** (2014) Suppression of vibration in bounded structures subjected to action of a distributed load by continuous spatial modulations of their parameters. *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI)*, Barcelona, Spain, 20 – 25 July, 2 pp.
15. **Sorokin, V.** (2014) On the response of a nonlinear parametric amplifier driven beyond resonance. *Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014)*, Vienna, Austria, 6 – 11 July, 2 pp.
16. **Sorokin, V.S.** (2013) Motion of a pendulum with vibrating suspension axis at unconventional values of parameters. *Proceedings of the XLI Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics-2013"*, Saint-Petersburg, Russia, 1 – 6 July, pp. 568-578
17. **Sorokin, V.S.** (2013) A new approach to the analysis of oscillations of one-dimensional spatially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332 (14), pp. 3552–3563
18. **Sorokin, V.S.** (2013) Analysis of time-periodic systems when corresponding equations do not contain a small parameter explicitly. *in Z. Dimitrovová, J.R. de Almeida, R. Goncalves (eds.) "Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems (ICOVP 2013)"*, Lisbon, Portugal, 9-12 September, 2013, AMPTAC, ISBN 978-989-96264-4-7, 10 pp.
19. **Sorokin, V.S.** (2013) Analysis of oscillations of one-dimensional spatially periodic structures. An unconventional approach and some new effects. *Proceedings of COMPDYN 2013 (4th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering)*, Kos Island, Greece, 12–14 June, 15 pp.
20. **Sorokin, V.S.** (2012) Oscillations of one-dimensional systems with spatially periodic geometry characteristics. *Proceedings of the EUROMECH 532 – 1st*

International Colloquium on Time-periodic Systems «Current trends in theory and application», TU Darmstadt, Germany, August 27–30, 4 pp.

21. **Sorokin, V.S.** (2012) Analysis of one-dimensional systems with spatially modulated parameters as a dissemination of the concept of vibrational mechanics. *Proceedings of the XXXX Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics-2012"*, Saint-Petersburg, Russia, 2 – 8 July, pp. 345-349
22. **Sorokin, V.** (2011) On broadening of the applicability range of the method of direct separation of motions. *Proceedings of the 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)*, Rome, Italy, 24-29 July, 2 pp.
23. Blekhman, I.I., **Sorokin, V.S.** (2010) On the separation of fast and slow motions in mechanical systems with high-frequency modulation of the dissipation coefficient. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, Issue 23, pp. 4936-4949
24. Блехман, И.И., **Сорокин, В.С.** (2009) Осциллятор Фидлина и некоторые особенности применения метода прямого разделения движений в нелинейной механике. *Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика*. под редакцией В.В. Белецкого, Д.А. Индейцева, А.Л. Фрадкова. СПб: Наука, с. 192-214.
25. Blekhman, I.I., **Sorokin, V.S.** (2009) Fidlin oscillator featuring the method of direct separation of motions in nonlinear mechanics. *Book of Abstracts Euromech Colloquium 503 Nonlinear normal modes, Dimension reduction and Localization in vibrating systems*, Rome (Frascati), Italy, 27 September - 2 October, 2 pp.