На правах рукописи

Витохин Евгений Юрьевич

Исследование колебательных и волновых процессов в термоупругой среде с учетом времени релаксации теплового потока

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2017

Работа выполнена в Федеральном Государственном Автономном Образовательном Учреждении Высшего Образования Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Научный руководитель:	Иванова Елена Александровна доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Муратиков Кирилл Львович доктор физико-математических наук, ФГБУН ФТИ им. Иоффе РАН, вед. научн. сотр. Отделения твердотельной электроники
	Кустова Елена Владимировна доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой гидроаэромеханики ФГБОУ ВО “Санкт-Петербургский государственный университет”
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Пермский государственный национальный исследовательский университет”

Защита состоится «___» _____ 2017 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ ИПМаш РАН.

Автореферат разослан «___» _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук, профессор В.В. Дубаренко

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Волновой характер распространения теплового импульса описан во множестве теоретических работ, а также обнаружен экспериментально. В то же время известно, что волновое уравнение теплопроводности на наномасштабном уровне предсказывает более высокие значения температур, по сравнению с классической теорией. Это предъявляет повышенные требования к эффективности систем охлаждения микроэлектронной техники. Кроме того, параболическое уравнение теплопроводности, базирующееся на классическом законе Фурье, обладает бесконечной скоростью распространения теплового импульса. В задачах с высокими скоростями температурных воздействий возникает необходимость учета конечной скорости распространения тепловых волн, что позволяет сделать гиперболическое уравнение теплопроводности. Это уравнение подробно изучено в первой половине прошлого века. В последние десятилетия теоретиков и экспериментаторов стали привлекать задачи связанной гиперболической термоупругости. Несмотря на большое количество статей по этой тематике, появившихся в недавнее время, этот вопрос остается недостаточно изученным. В частности, требует дополнительного исследования то, насколько существенный вклад в решение задачи теплопроводности вносит учет волновых слагаемых, а также какое влияние оказывает эффект связности на решение задачи гиперболической термоупругости.

Степень разработанности темы работы. Гиперболическое теории теплопроводности были предложены в работах C. Cattaneo, P. Vernotte, А.В. Лыкова и С. Л. Соболева. Гиперболическое теории термоупругости: H. Lord, Y. Shulman, A.E. Green, K.A. Lindsay, R.B. Hetnarski, J. Ignaczak, A.E. Green, P.M. Nagdi, Chandrasekharaiah, Tzou. Экспериментальные исследования: В. Пешков, Liu Y., Mandelis A., А.Н. Магунов, Wang X., В.И. Крылович, Е.В. Ивакин, Xu F., Grassmann A., Herwig H., Kaminski W., K. Mitra, Roetzel W., Ю.В. Судьенков, Н.В. Вовненко, K.V. Poletkin. Численные исследования Ciegis R., Istvan A. Veres, Б. В. Рогов. Задачи с лазерным воздействием: Э.М. Карташов, N. Yu, Зимин Б.А., Судьенков Ю.В., H.M. Youssef, Wang, Hai-Dong. Общие задачи: Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Д., А.М. Кривцов, В.А. Кузькин, Е.А. Иванова, П.А. Жилин, Иванов Ц., Энгельбрехт Ю.К., А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский. Дисперсионные соотношения: Ц. Иванов, Ю.К. Энгельбрехт, М.Б. Бабенков, A.H. Nayfeh, S. Nemat-Nasser, P. Puri, Р.Х. Швец, А.А. Лопатьев

Цель работы. Целью работы является исследование термоупругих волн и колебаний на основе модели гиперболической термоупругости Лорда–Шульмана.

Задачи работы. Анализ дисперсионных соотношений; исследование зависимости решения от времени релаксации теплового потока; определение

величин и скоростей пиков для тепловой и акустической составляющих термоупругой волны; сравнение решения классической и гиперболической задачи термоупругости.

Научная новизна работы.

- На основании численного решения связанной задачи термоупругости Лорда-Шульмана при импульсном лазерном воздействии установлено, при какой энергии облучения отклонение температуры материала от начального значения не будет превышать величину 10 °C, т.е. решение будет оставаться в пределах применимости линейной теории.

- Решена задача о распространении термоупругих волн, возникающих вследствие импульсного лазерного воздействия, и оценены высоты пиков на профилях температуры в классической и гиперболической термоупругости. Показано, что для металлов при временах, меньших времени релаксации теплового потока, высоты пиков достаточно сильно различаются для того, чтобы по результатам измерений можно было бы оценить, какая из указанных теорий лучше моделирует данный процесс.

- Проведен сравнительный анализ решения задачи термоупругости Лорда-Шульмана и классической термоупругости в зависимости от граничных условий. Установлено, что наибольшие количественные отличия возникают в задаче с закрепленными границами и постоянной температурой на них, наименьшие - в задаче со свободными границами и теплоизоляцией.

- В результате численных расчетов установлено, что наибольшая разница между перемещениями (деформациями) в гиперболической и классической задачах термоупругости наблюдается в промежутке между акустическим и тепловым фронтом. При уменьшении расстояния между этими фронтами разница увеличивается.

- Установлено, что во всех рассмотренных задачах при времени релаксации теплового потока, равном 0,1 нс, в первые 0,025 нс наблюдается рост скоростей квазиакустического и квазитеплового фронтов. В последующие моменты времени значения скоростей отклоняются от своего асимптотического значения не более чем на 5 %, что находится в пределах погрешности численного счета.

- Проведен асимптотический анализ дисперсионных соотношений в случае модели Лорда-Шульмана, в результате которого получены приближенные формулы для дисперсионных соотношений.

- Показано, что в случае гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана дисперсионные кривые имеют волновое число отсечки. Теоре-

тически обоснована возможность экспериментального определения времени релаксации теплового потока с использованием волнового числа отсечки.

Теоретическая и практическая значимость работы. Получены теоретические результаты, которые могут найти применение при экспериментальном определении времени релаксации теплового потока. Определены времена релаксации теплового потока, при которых отличие решения классической задачи термоупругости от решения задачи гиперболической термоупругости достаточно велико, чтобы по результатам измерений можно было оценить, какая из теорий предпочтительнее для решения данного класса задач.

Методология и методы исследования. Анализ дисперсионных соотношений производился асимптотическими методами. Решение динамических задач находилось численно, с использованием явной и неявной схемы метода конечных разностей. Численный метод реализован на языке программирования Delphi.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Значение энергии облучения, при которой отклонение температуры от начального значения в решении задачи термоупругости Лорда-Шульмана находится в пределах применимости линейной теории.

2. Определение разницы высот пиков температуры в классической и гиперболической термоупругости.

3. Определение качественных различий решений задачи термоупругости Лорда-Шульмана, соответствующих четырем видам граничных условий.

4. Оценка влияния граничных условий на отличие между решениями задач классической и гиперболической термоупругости.

5. Оценка разницы перемещений, полученных в результате решения классической и гиперболической задачи термоупругости, в зависимости от расстояния между акустическим фронтом и тепловым.

6. Определение ускорений квазитеплового и квазиакустического фронтов термоупругой волны.

7. Результаты асимптотического анализа дисперсионных соотношений термоупругости Лорда-Шульмана при малых частотах и частотах стремящихся к бесконечности.

8. Приближенные формулы, аппроксимирующие дисперсионные кривые термоупругости Лорда-Шульмана во всем частотном диапазоне.

9. Теоретическое обоснование метода экспериментального определения времени релаксации теплового потока, основанного на использовании волнового числа отсечки.

Степень достоверности. Достоверность численных результатов обусловлена хорошим совпадением с аналитическим решением, а также хорошим совпадением результатов решения, полученных с использованием явной и неявной схем интегрирования метода конечных разностей.

Апробация результатов. Основные результаты работы доложены на: XLI, XLIII, XLIV The International Summer School "Advanced Problems in Mechanics" (Санкт-Петербург, 2013, 2015 и 2016 гг.), XVII, XVIII, XIX зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2011, 2013 и 2015 гг.), XXXIX, XL, XLII Научно–практическая конференция с международным участием "Неделя науки СПбГПУ" (Санкт-Петербург, 2010, 2011 и 2013 гг.), Семинар кафедры МСС и ВТ ПГНИУ (Пермь, 2015, 2017 гг.), Семинар по прикладным задачам механики ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, 2015, 2017 гг.), Научный семинар кафедры "Теоретическая механика" СПбПУ (Санкт-Петербург, 2017 г.), Городской семинар по механике (Санкт-Петербург, 2017 г.), Семинар кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ (Санкт-Петербург, 2017 г.)

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в **3** научных статьях в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора. Участие в постановках задачи, анализ дисперсионных соотношений, численные расчеты, анализ полученных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из трех глав и заключения. Полный объем диссертации **114** страниц текста с **72** рисунками и **8** таблицами. Список литературы содержит **82** наименований.

Содержание работы.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме. Формулируются цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

Первая глава посвящена численному решению задачи гиперболической термоупругости в случае лазерного воздействия.

Уравнения термоупругости Лорда–Шульмана отличаются от уравнений классической термоупругости тем, что вместо закона Фурье используется обобщенный закон вида:

$$\tau\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} = -\lambda\nabla T,$$

где $\mathbf{h}$ — тепловой поток, λ — коэффициент теплопроводности, τ — время релаксации теплового потока, T — температура. Уравнение теплопроводности с учетом деформируемости среды в таком случае имеет вид:

$$\lambda\Delta\tilde{T} - \rho c_v\left(\dot{\tilde{T}} + \tau\ddot{\tilde{T}}\right) - \alpha_* K T^*\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tau\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \rho\left(q + \tau\dot{q}\right), \qquad \tilde{T} = T - T^*, \quad (1)$$

где ρ — плотность, c_v — теплоемкость, T^* — отсчетная температура, q — плотность внутренних источников тепла, K — модуль объемного сжатия, α_* — объемный коэффициент теплового расширения. Уравнение движения с учетом изменения температуры в теле представляется следующим образом:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon\boldsymbol{E} + 2G\boldsymbol{e} - \alpha_* K\tilde{T}\boldsymbol{E}, \qquad (2)$$

где G — модуль сдвига, ε — след тензора деформаций, $\boldsymbol{E}$ — единичный тензор, $\boldsymbol{e}$ — тензор деформации, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\mathbf{f}$ — вектор массовой плотности объемных сил, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений.

Рассматривается бесконечный слой со свободными границами и постоянной температурой на них, равномерно облучаемый коротким мощным лазерным импульсом на левой границе. В таком случае волны распространяются вдоль координаты x (см. рис. 1), поэтому уравнения термоупругости (1)–(2) исследуются в односно–деформированной постановке, а граничные и начальные условия имеют следующий вид:

$$\tilde{T}(0,t) = \tilde{T}(l,t) = 0 \quad \sigma(0,t) = \sigma(l,t) = 0$$

$$\tilde{T}(x,0) = 0, \quad \dot{\tilde{T}}(x,0) = 0 \quad \sigma(x,0) = 0, \quad \dot{\sigma}(x,0) = 0$$

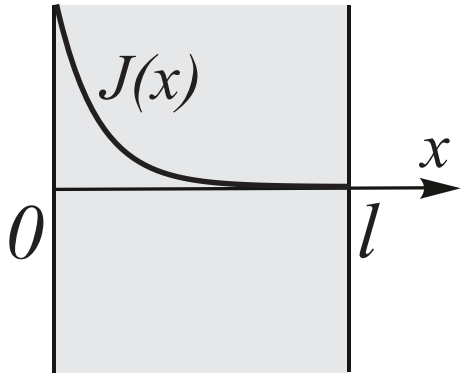


Рис. 1: Слой под воздействием лазерного импульса

Поглощение лазерного импульса в материале моделируется с помощью закона Бугера:

$$J(x) = J_0 e^{-\gamma x},$$

где J_0 — интенсивность лазерного воздействия, γ — коэффициент поглощения среды. Зависимость воздействия от времени выражается с помощью дельта-функции Дирака $\delta(t-0)$:

$$q(x,t) = \frac{E_0\gamma}{\rho}e^{-\gamma x}\delta(t-0), \qquad E_0 = J_0\delta_0, \qquad (3)$$

где δ_0 — длительность воздействия. При этом энергия воздействия E_0 принимается равной 15 Дж/м^2, а показатель поглощения $\gamma = 11,7$ мкм$^{-1}$. Решение

искалось с помощью метода конечных разностей, который был реализован на языке программирования Delphi. В качестве термомеханических параметров использовались параметры меди, как типичного металла. Наличие малого параметра τ перед вторыми производными и скачка температуры в первые моменты времени осложняют численное решение задачи. Проведено исследование погрешности вычислений (см. рис. 4) при интегрировании неявной и явной схемой путем сравнения с аналитическим решением.

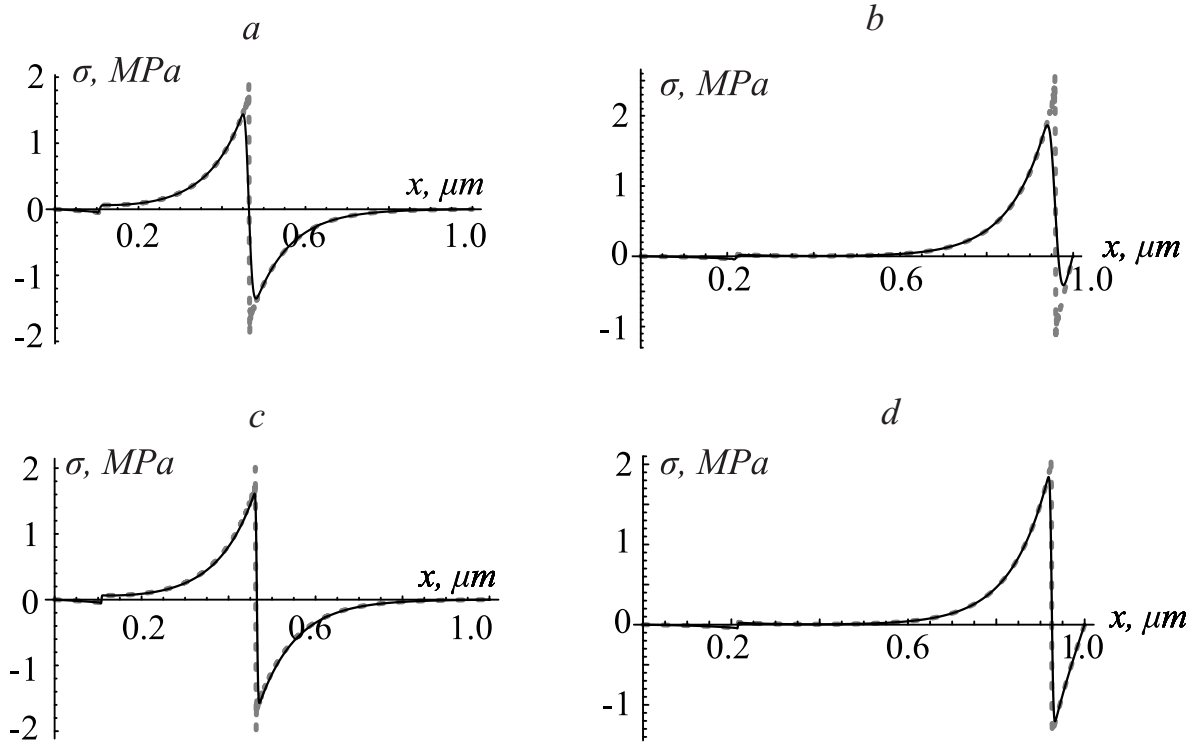


Рис. 2: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования неявной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

Сравнение численного решения с аналитическим и анализ погрешности позволил сделать вывод о качественном совпадении этих решений и уменьшении погрешности при измельчении сетки и шага интегрирования. В итоге было принято решение использовать для численного интегрирования явную схему. Следует отметить, что аналитическое решение представляется в виде плохо сходящихся рядов и для получения достаточно точного решения необходимо учесть большое количество членов ряда. Чтобы при оценке погрешности численного решения исключить ошибки суммирования рядов, была решена тестовая задача с гармоническим воздействием на границе. Анализ решения этой задачи позволил сделать вывод о сходимости реализованного метода. Таким образом, численные результаты, полученные с использованием написанной программы, можно считать достоверными. Эта программа использовалась для нахождения численного решения задач, рассмотренных во второй и третьей главе.

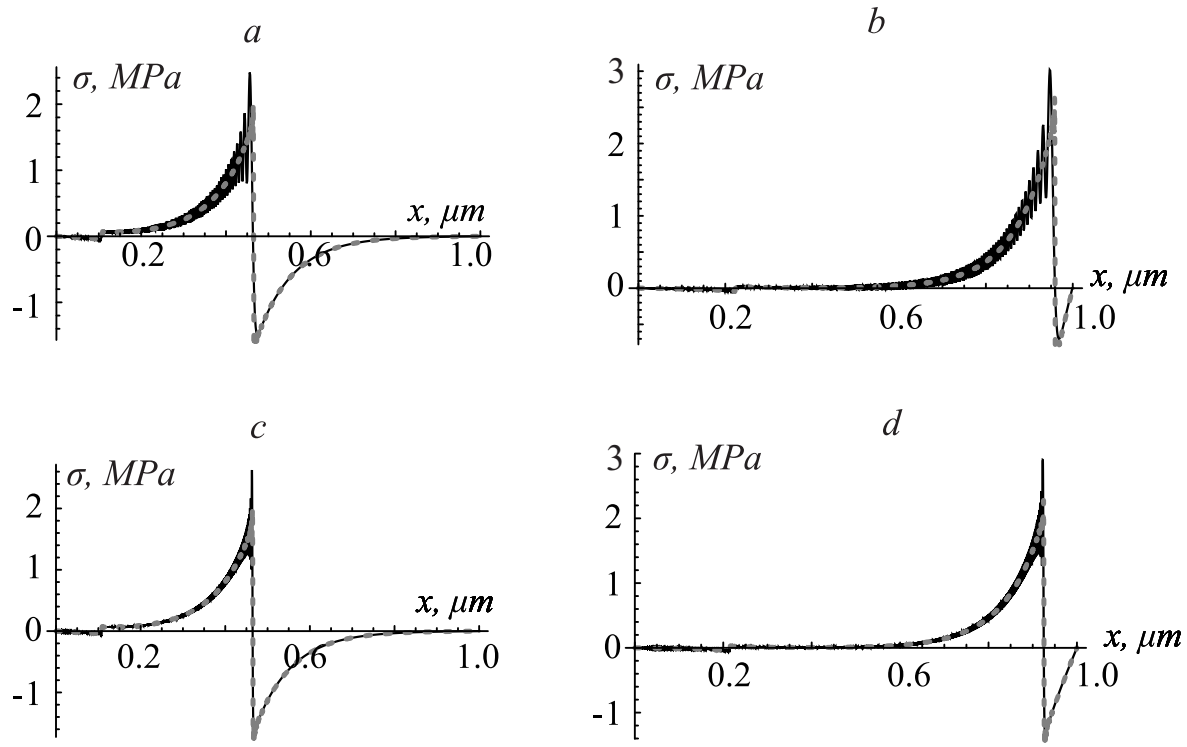


Рис. 3: Напряжения, полученные с помощью численного интегрирования явной схемой и аналитически. Сплошной линией показано численное решение, пунктирной — аналитическое

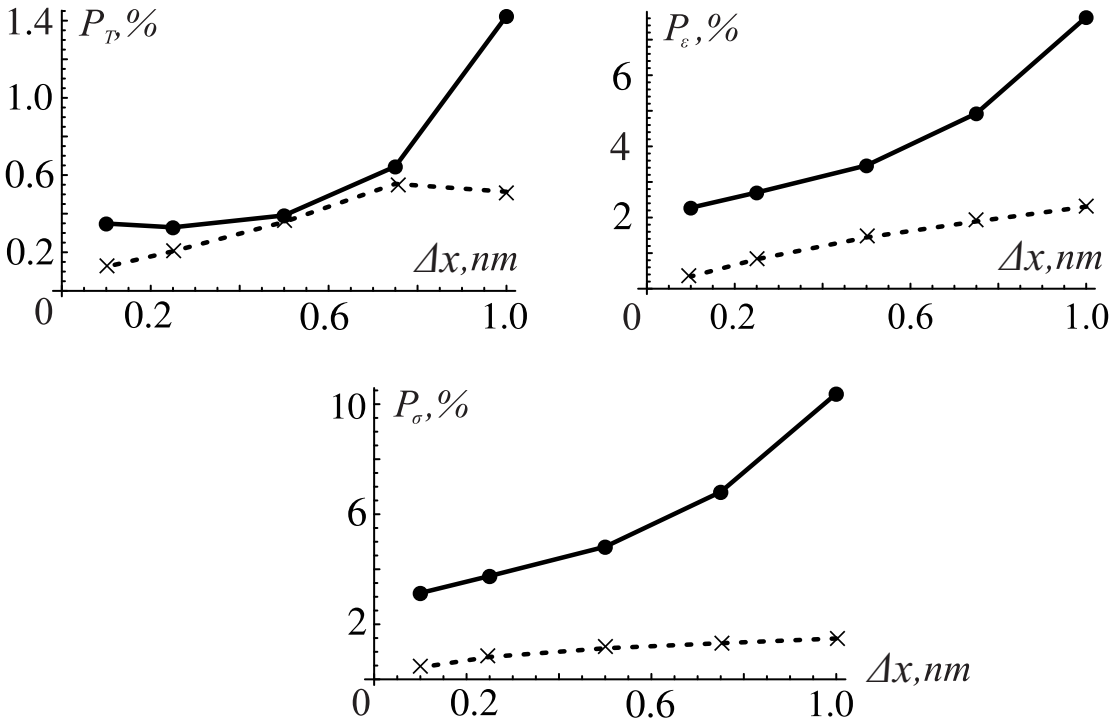


Рис. 4: Погрешность численного решения в зависимости от шага по пространству. Сплошной линией показано решение, полученное неявной схемой интегрирования, пунктирной — явной. P_T, P_ε и P_σ — погрешность определения температур, деформаций и напряжений соответственно

В работе проведен анализ зависимости решения задачи гиперболической термоупругости в случае лазерного воздействия от времени релаксации теплового потока. Для этого был рассмотрен слой со свободными границами, на которых поддерживается постоянная температура:

$$\sigma\big|_{x=0} = 0; \quad \sigma\big|_{x=l} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=0} = 0; \quad \tilde{T}\big|_{x=l} = 0; \tag{4}$$

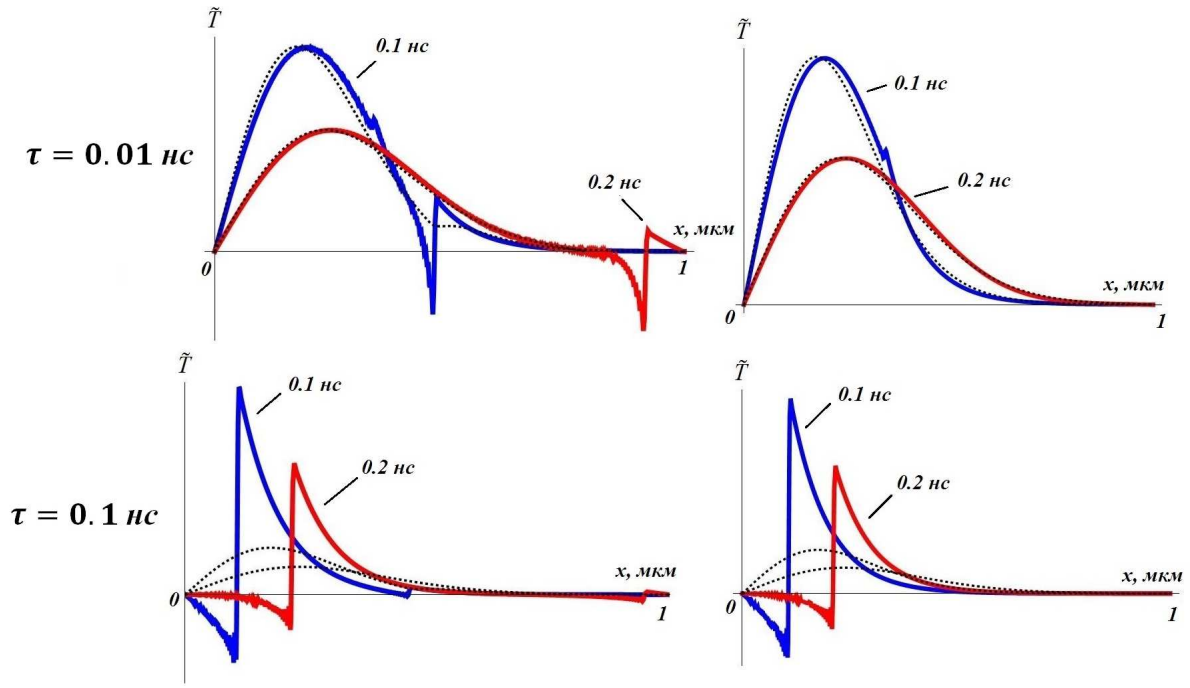


Рис. 5: Температура в медном слое при лазерном воздействии

Анализ численного решения (рис. 5, 6 и табл. 1) показал, что гиперболические эффекты в меди начинают проявляться при $\tau \sim 10^{-11}$ с. При данном τ появляется волновой фронт квазитермической составляющей, а при увеличении τ растет высота его пиков. При меньших значениях времени релаксации теплового потока решение системы гиперболической термоупругости ведет себя также, как и в случае классической термоупругости — вклад от вторых производных в уравнении теплопроводности является незначительным. Волновой фронт в связанной задаче имеет две составляющие — квазитермическую и квазиакустическую. При решении задачи термоупругости в несвязанной постановке в температуре отсутствует квазиакустическая компонента, в то время как в напряжениях и деформациях присутствуют обе компоненты. Квазитермическая составляющая температуры достаточно быстро затухает: высота ее пика в меди уменьшается в два раза при отдалении на 100 нм от границы, на которой произошло возбуждение. В то же время затухание квазиакустической составляющей на исследуемом расстоянии 1 мкм практически незаметно.

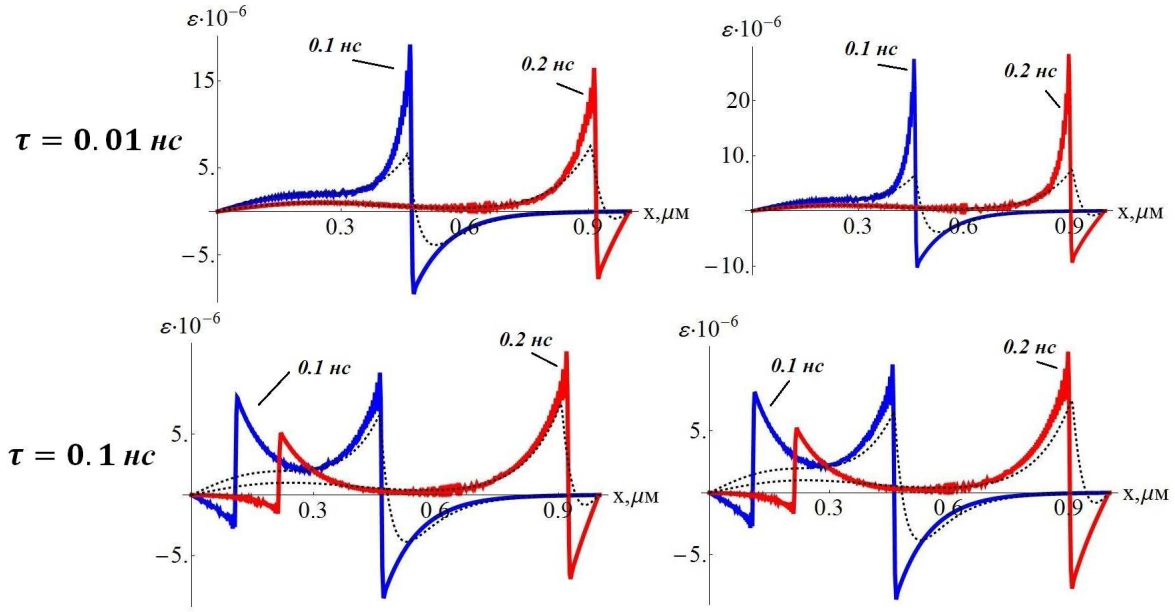


Рис. 6: Деформация в медном слое при лазерном воздействии

Вторая глава посвящена анализу влияния краевых условий на решение волновых задач гиперболической термоупругости. Исследуется, при каких граничных условиях наблюдаются наибольшие качественные отличия решения задачи гиперболической и классической термоупругости, а также на каких участках наблюдается наибольшее отличие между решениями классической и гиперболической термоупругости. В качестве начальных используются однородные условия:

$$\tilde{T}(x,0)=0, \quad \dot{\tilde{T}}(x,0)=0 \quad \sigma(x,0)=0, \quad \dot{\sigma}(x,0)=0$$

Лазерное воздействие моделируется с помощью закона Бугера и дельта-функции Дирака в качестве плотности внутренних источников тепла (3) с энергией воздействия $E_0 = 15$ Дж/м^2, и затуханием $\gamma = 11,7$ мкм$^{-1}$. Первой рассмотрена задача со свободным границами и постоянной температурой на них:

$$\sigma\big|_{x=0}=0; \quad \sigma\big|_{x=l}=0; \quad \tilde{T}\big|_{x=0}=0; \quad \tilde{T}\big|_{x=l}=0; \tag{5}$$

Произведено сравнение численного решения этой задачи с аналитическим. Установлено качественное совпадение этих решений (см. рис. 14). Профиль температур и перемещений обладает двумя ярко выраженными пиками — одним отрицательным и одним положительным.

Во второй задаче рассматривался слой с закрепленными границами и постоянной температурой на них:

$$u\big|_{x=0}=0; \quad u\big|_{x=l}=0; \quad \tilde{T}\big|_{x=0}=0; \quad \tilde{T}\big|_{x=l}=0; \tag{6}$$

В гиперболической термоупругости на фронте квазитепловой составляющей волны наблюдаются минимальные значения перемещений, а на ква-

t, пс	τ, с	V^{an}_{heat}, м/с	V_{heat}, м/с	H^1_{heat}, °C	H^2_{heat}, °C	H_p, °C
1	10^{-12}	10852	10960	0,141	0,477	0,349
10	10^{-11}	3368	3300	0,052	0,354	0,188
100	10^{-10}	1085	1070	-0,110	0,246	0,053
100	10^{-9}	343	342	-0,152	0,378	0,053
100	10^{-8}	108	111	-0,075	0,463	0,053
100	10^{-7}	34	37	-0,030	0,500	0,053
100	10^{-6}	11	14	-0,004	0,512	0,053
100	10^{-2}	0,1	3	-	0,516	0,053

Таблица 1: Характеристики распределения квазитермической составляющей температуры $\tilde{T}$ в меди в момент времени t. Скорости пиков, найденные численно для гиперболической термоупругости, обозначены V_{heat}, высота первого пика — H^1_{heat}, высота второго — H^2_{heat}; скорости, найденные аналитически — V^{an}_{heat}; высота пика в параболической термоупругости — H_p

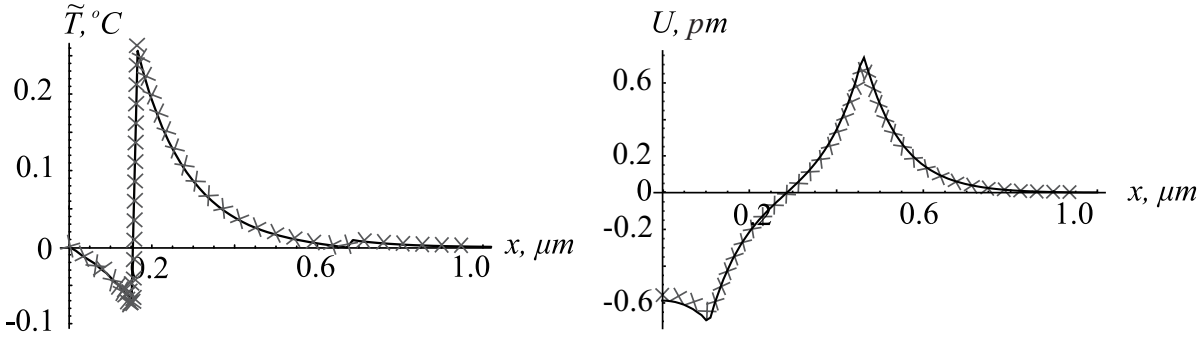


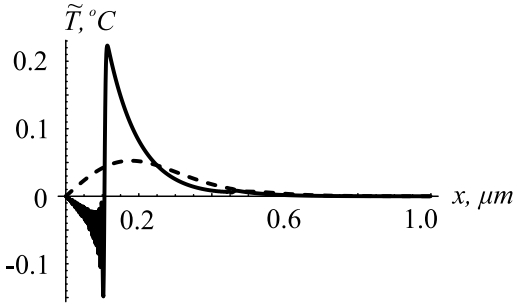
Рис. 7: Численное и аналитическое решение связанной задачи термоупругости при свободных границах с постоянной температурой. Сплошные линии — численное решение, пунктирные — аналитическое

зиакустическом фронте — максимальные (см. рис. 8). В классической термоупругости значения перемещений на квазиакустическом и квазитепловом фронтах меньше, чем в гиперболической. Максимальная разница между перемещениями в классической и гиперболической термоупругости наблюдается на квазиакустическом фронте

В третьей задаче рассмотрен слой в закрепленными и теплоизолированными границами:

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad u\big|_{x=l} = 0; \quad h\big|_{x=0} = 0; \quad h\big|_{x=l} = 0; \tag{7}$$

Графики на рис. 9 показывают, что с течением времени температура на облучаемой границе в гиперболической задаче термоупргости может быть как больше, так и меньше, чем в классической. Однако разность температур в этих случаях невелика. Перемещения, полученные в результате решения за-



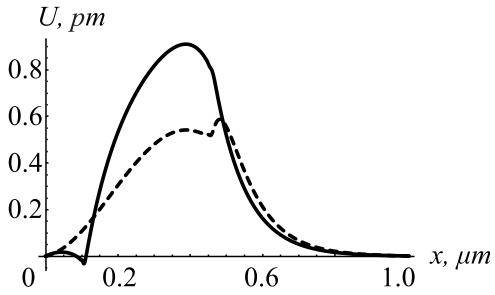
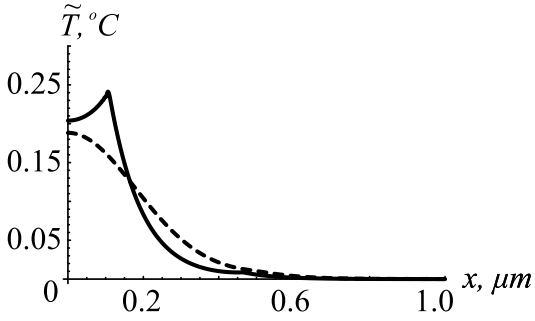


Рис. 8: Численное решение связанной задачи термоупругости с заделкой и постоянной температурой на границе. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической.

дачи связанной гиперболической термоупругости качественно не отличаются от решения классической задачи и имеют малые количественные отличия.



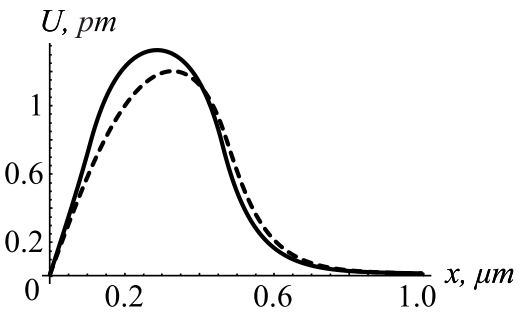


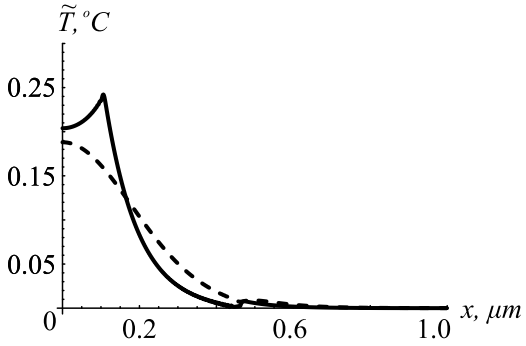
Рис. 9: Численное решение связанной задачи термоупругости с заделкой и теплоизоляцией на границе. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

В четвертой задаче рассмотрен слой со свободными и теплоизолированными границами:

$$\sigma\big|_{x=0} = 0; \quad \sigma\big|_{x=l} = 0; \quad h\big|_{x=0} = 0; \quad h\big|_{x=l} = 0; \tag{8}$$

Наибольшая разница между перемещениями гиперболической термоупругости и классической термоупругости достигается, как и в предыдущей задаче, на квазитемпературном фронте. Как можно видеть на рис. 10, при данных граничных условиях разница между решениями, полученными в рамках классической и гиперболической теории проявляется меньше, чем в других рассмотренных задачах. В численном решении наблюдается отрицательный пик перемещений, который пропадает с течением времени. Это означает, что в начальные моменты времени точки слоя, близкие к облучаемой границе, движутся в сторону источника облучения. Такой же эффект наблюдается и в решении классической задачи.

Третья глава посвящена асимптотическому анализу дисперсионных соотношений в задаче гиперболической термоупругости Лорда–Шульмана.



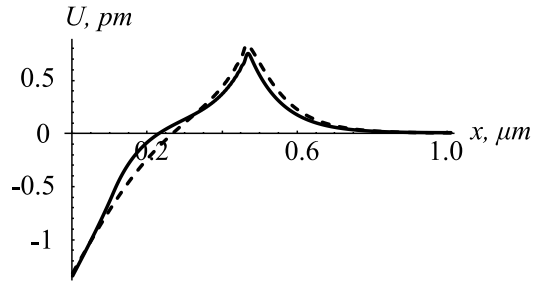


Рис. 10: Численное решение связанной задачи термоупругости со свободными краями и теплоизоляцией на границе. Сплошными линиями изображены графики гиперболической термоупругости, пунктирными — классической

Получаются приближенные формулы для дисперсионных соотношений, а также теоретически обосновывается возможность экспериментального определения времени релаксации теплового потока с использованием волнового числа отсечки.

Рассматривается связанная задача термоупругости Лорда–Шульмана (1)–(2). Проведено исследование дисперсионных соотношений в случае, когда решение представляется в виде экспонент с затуханием по времени:

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0\, e^{-i\delta x}\, e^{(-\alpha+i\omega)t}, \qquad \tilde{T}(x,t) = T_0\, e^{-i\delta x}\, e^{(-\alpha+i\omega)t}, \tag{9}$$

где δ — волновое число, ω — частота, α — характеристика скорости затухания колебаний. Дисперсионные соотношения, связывающие между собой величины δ, ω и α имеют вид:

$$\begin{gathered}\delta^4 + \big((A_1+A_2)(\alpha^2-\omega^2) - A_3\alpha\big)\,\delta^2 + \\ + A_1(1-A_4)\big(A_2(\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + \omega^4) + A_3\alpha(3\omega^2-\alpha^2)\big) = 0, \\ \omega\left(\big(2(A_1+A_2)\alpha - A_3\big)\,\delta^2 + A_1(1-A_4)\big(4A_2\alpha(\alpha^2-\omega^2) + A_3(\omega^2-3\alpha^2)\big)\right) = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}A_1 = \frac{\rho}{K+\frac{4}{3}G}, \qquad A_3 = \frac{1}{\lambda}\left(\rho c_v + \frac{\alpha^2 K T_*}{1+\frac{4}{3}GK^{-1}}\right), \\ A_2 = \tau A_3, \qquad A_4 = \frac{1}{1+\rho c_v(1+\frac{4}{3}GK^{-1})/(\alpha^2 K T_*)}.\end{gathered} \tag{11}$$

Дисперсионные кривые (10) представлены на рис. 11, 12. Уравнения для асимптот, изображенных на рис. 11 пунктирными линиями, имеют вид:

$$\delta_a = \sqrt{-\frac{c}{c_1}}\,\omega_a, \qquad \delta_h = \sqrt{\frac{c}{c_2}}\,\omega_h, \tag{12}$$

Константы c_1 и c_2, в случае когда $c_a > c_r$ вычисляются по формуле:

$$c_{1,2} = \mp \frac{A_1 A_3^3 A_4 (A_2 - A_1 + 2A_1A_4)}{4A_2((A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4)^{5/2}} \left[A_1 + \right.$$
$$\left. + A_2 \pm \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}\right]. \quad (13)$$

В случае, когда $c_a < c_r$ чередование знаков $\mp$ и $\pm$ меняется на противоположное. Константа c определяется выражением:

$$c = \frac{A_1A_2(1-A_4)(c_2 - c_1)}{A_1 + A_2}. \quad (14)$$

Формулы для горизонтальных асимптот α_1, α_2 и α_3 представлены в диссертации, но не приводятся здесь в виду их громоздкости. Волновое число отсечки δ_0 вычисляется по формуле

$$\delta_0 = \alpha_3 \sqrt{\frac{A_1(3A_3 - 4A_2\alpha_3)(1-A_4)}{2\,\alpha_3(A_1 + A_2) - A_3}}. \quad (15)$$

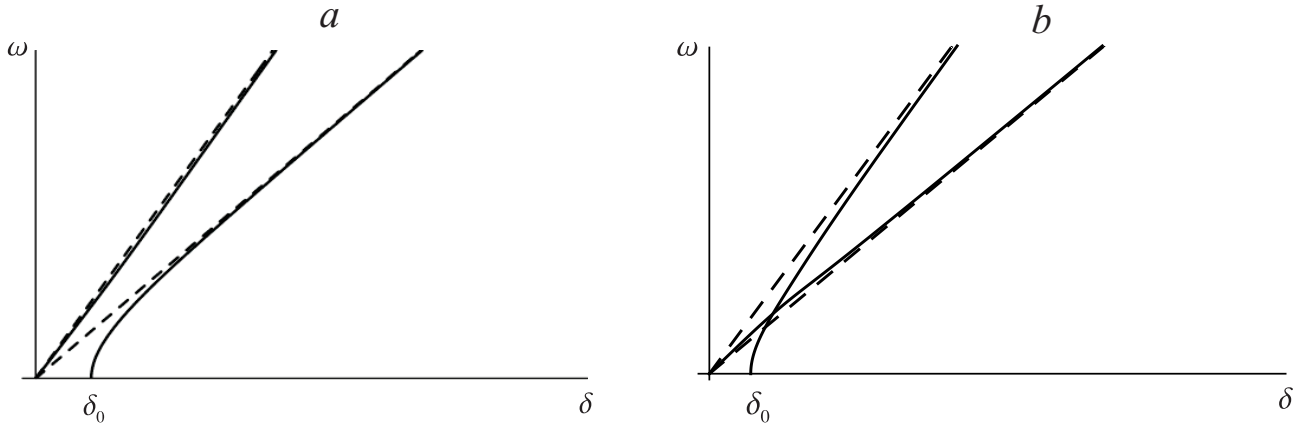


Рис. 11: Зависимость частоты от волнового числа. a: $c_a > c_r$, b: $c_a < c_r$

На основании асимптотического анализа при малых ω и ω стремящихся к бесконечности, получены приближенные формулы, достаточно точно аппроксимирующие дисперсионных кривые во всем частотном диапазоне:

$$\omega_a = \sqrt{\alpha\left(\frac{2A_3}{A_1A_4} + \frac{c_1\alpha}{\alpha_1^2(\alpha_1 - \alpha)}\right)}, \quad \omega_h = \sqrt{\frac{c_2(\alpha_3 - \alpha)}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha - \alpha_2)}} \quad (16)$$

$$\delta_a = \sqrt{\alpha\left(\frac{2A_3(1-A_4)}{A_4} + \frac{c\,\alpha}{\alpha_1^2(\alpha_1 - \alpha)}\right)}, \quad \delta_h = \sqrt{\delta_0^2 + \frac{c\,(\alpha_3 - \alpha)}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha - \alpha_2)}}. \quad (17)$$

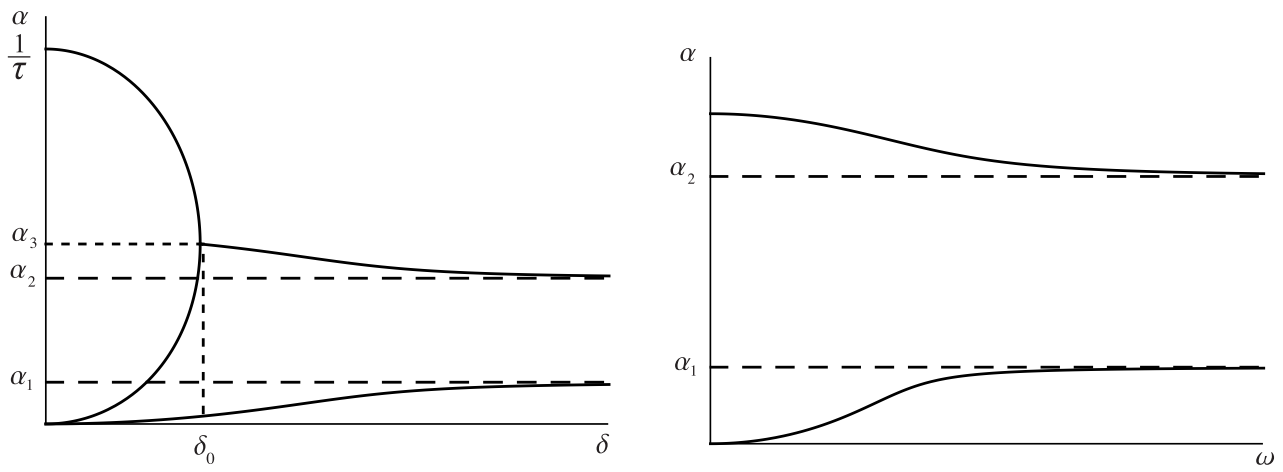


Рис. 12: Зависимость характеристики затухания колебаний от волнового числа и частоты

Индексы “a” и “h” обозначают акустический и тепловой спектры. Приближенные формулы, выражающие зависимость между волновым числом δ и частотой ω имеют вид:

$$\delta_a = \omega_a \sqrt{-\frac{c}{c_1} + \frac{2A_3\alpha_1\big(c + c_1A_1(1-A_4)\big)}{c_1\big(2A_3\alpha_1 + A_1A_4\,\omega_a^2\big)}}\,, \qquad \delta_h = \sqrt{\delta_0^2 + \frac{c\,\omega_h^2}{c_2}}\,. \tag{18}$$

В работе также представлены дисперсионные кривые и приближенные формулы, выражающие зависимость фазовой и групповой скорости от частоты.

Сравнительный анализ дисперсионных соотношений в задаче теплопроводности и термоупругости показал, что дисперсионные кривые имеют качественные отличия, но количественные отличия малы. Это следует из того, что значения горизонтальных асимптот α_2 и α_3 близки друг к другу и к значению горизонтальной асимптоты в задаче теплопроводности. Кроме того значение волнового числа отсечки δ_0 в задаче теплопроводности и в задаче термоупругости также имеют малое отличие. Волновое число отсечки, с помощью которого можно вычислить время релаксации теплового потока, можно определить экспериментально. Так как дисперсионные кривые в связанной задаче имеют малые количественные отличия от аналогичных кривых в задаче теплопроводности, для определения времени релаксации теплового потока можно использовать формулу для волнового числа отсечки, полученную на основании анализа дисперсионных кривых в задаче теплопроводности:

$$\tau = \frac{\rho c_v}{4\lambda\delta_0^2}. \tag{19}$$

Идея метода определения волнового числа отсечки экспериментальным путем заключается в следующем. Выбирается слой (пластина) толщины l и задается распределение температуры с следующими граничными и на-

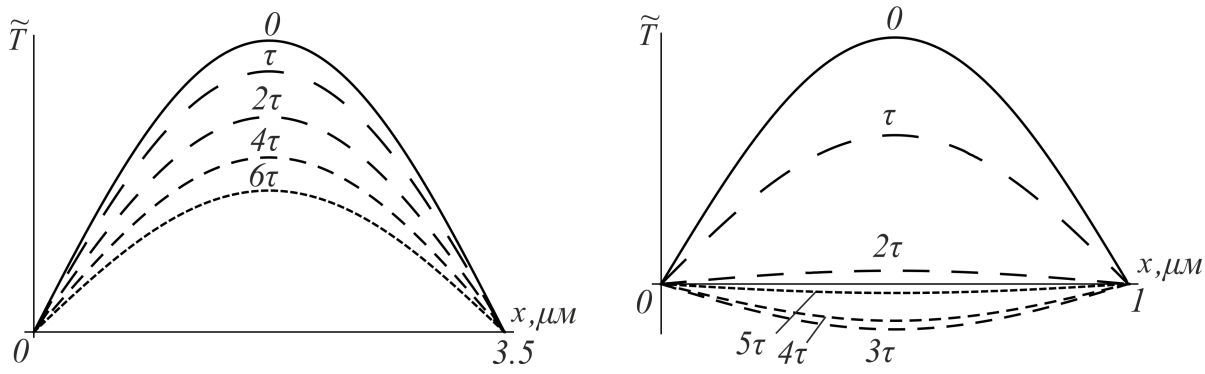


Рис. 13: Распределение температуры в медном слое при $\tau = 1$ нс

чальными условиями:

$$\tilde{T}\big|_{x=0} = 0, \qquad \tilde{T}\big|_{x=l} = 0, \qquad \tilde{T}\big|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{l}, \qquad \dot{\tilde{T}}\big|_{t=0} = 0. \tag{20}$$

Затем определяется тип затухания температуры. Если затухание монотонное, значит $\delta_0 > \pi/l$ (рис. 13 слева), если затухание происходит с колебаниями, значит $\delta_0 < \pi/l$ (рис. 13 справа). Повторяя этот эксперимент с различными толщинами l можно определить δ_0.

Проведено сравнение решения сформулированной выше задачи теплопроводности и соответствующей задачи термоупругости при одинаковых граничных и начальных условиях по температуре. Граничные и начальные условия задачи термоупругости выглядят следующим образом:

$$\tilde{T}(x,0) = \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad \dot{\tilde{T}}(x,0) = 0, \quad \tilde{T}(0,t) = \tilde{T}(l,t) = 0$$

$$\varepsilon(x,0) = 0, \qquad \dot{\varepsilon}(x,0) = 0, \qquad \varepsilon(0,t) = \varepsilon(l,t) = 0$$

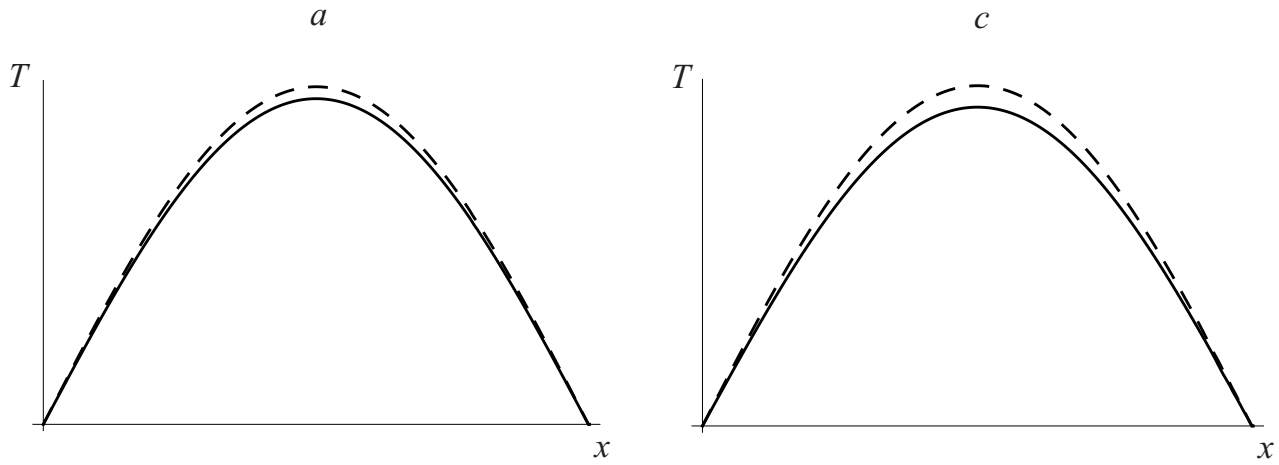


Рис. 14: Термоупругость Лорда–Шульмана (сплошная линия), теплопроводность Максвелла–Каттанео (пунктирная линия). $\tau = 0,1$ нс, $t = 2\tau$

Проведенный численный анализ показал, что при данных начальных условиях отличия решений задачи термоупругости и теплопроводности малы. Характерные графики, иллюстрирующие отличия, представлены на рис. 14.

Таким образом, в виду того, что дисперсионные кривые, значения асимптот и волнового числа отсечки, а также решения динамических задач теплопроводности и термоупругости имеют малые отличия, можно считать теоретически обоснованным экспериментальный метод определения времени релаксации теплового потока, в основе которого лежит выражение для волнового числа отсечки, полученного из анализа дисперсионных соотношений задачи теплопроводности.

В **заключении** приведен основной список результатов и сформулированы основные выводы диссертационной работы.

Основные результаты работы

1. Построено численное решение задачи об импульсном лазерном воздействии на тонкий слой меди с использованием уравнений классической и гиперболической термоупругости. Интенсивность импульса выбрана таким образом, чтобы отклонение температуры от начального значения не превышало величину в 10 °C, и решение оставалось бы в пределах линейной теории. Установлено, что при временах, не превышающих время релаксации теплового потока, разность температурных пиков, полученных по двум теориям, достаточно велика, так что по результатам физических измерений можно было определить, какая теория точнее моделирует процесс.

2. Проведены оценки скоростей квазиакустического и квазитеплового волновых фронтов во всех рассмотренных задачах.Установлено, что при времени релаксации теплового потока, равном 0,1 нс, в первые 0,025 нс наблюдается рост скоростей обоих фронтов, а затем значения скоростей отклоняются от своего асимптотического значения не более чем на 5 %, что находится в пределах погрешности численного счета.

3. Проведено сравнение перемещений и деформаций, найденных в результате решения задач классической и гиперболической термоупругости. Установлено, что наибольшее различие наблюдается в промежутке между акустическим и тепловым фронтом, причем при уменьшении расстояния между этими фронтами разница увеличивается.

4. Проведено сравнение аналитического решения полусвязанной задачи гиперболической термоупругости и численного решения связанной задачи, в результате которого установлено их качественное совпадение. Этот результат позволяет сделать вывод, что для изучения характера распространения волн в задаче гиперболической термоупругости можно использовать решение в полусвязанной постановке.

5. Проанализированы дисперсионные соотношения для уравнения теплопроводности Максвелла-Каттанео и термоупругости Лорда-Шульмана для решений, затухающих по времени.

6. Проведен асимптотический анализ дисперсионных соотношений модели Лорда-Шульмана. В результате получены приближенные формулы для фазовой и групповой скорости, зависимостей частоты и волнового числа от характеристики затухания, а также зависимостей волнового числа от частоты. Получены выражения для асимптот фазовой и групповой скоростей. Установлено, что дисперсионные кривые имеют волновое число отсечки.

7. Решена задача о термоупругих колебаниях в слое с начальным тепловым гармоническим возмущением. Установлено, что при определенном соотношении ширины исследуемой области и времени релаксации теплового потока в затухающем решении появляются колебания. Показано, что этот факт может послужить основой для метода экспериментального определения времени релаксации теплового потока. На примере меди показано, на каких масштабах возникает решение, затухающее с колебаниями, если время релаксации теплового потока находится в диапазоне от 0,1 до 100 нс.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, включенных в Перечень ВАК, Scopus, Web of Science

1. Е.Ю. Витохин, М.Б. Бабенков Численное и аналитическое исследование распространения термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2016., Т. 57, №3, С.171 - 185

2. E.Yu. Vitokhin, M.B. Babenkov Influence of boundary conditions on the solution of a hyperbolic thermoelasticity problem // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2017, 29(2), 457-475, DOI: 10.1007/s00161-016-0540-z

3. E.Yu. Vitokhin, E. A. Ivanova Dispersion relations for the hyperbolic thermal conductivity, thermoelasticity and thermoviscoelasticity // Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2017, 29(6), 1219-1240, DOI: 10.1007/s00161-017-0574-x