

На правах рукописи



**Янкин Андрей Сергеевич**

**ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ВЫСОКОНАПОЛНЕННЫХ  
ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛИМЕРОВ ПРИ ДВУХЧАСТОТНЫХ  
ЗАКОНАХ НАГРУЖЕНИЯ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Пермь – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (ПНИПУ)

**Научный  
руководитель**

**Бульбович Роман Васильевич,**  
доктор технических наук, доцент

**Официальные  
оппоненты:**

**Гаришин Олег Константинович**  
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук

**Семёнов Артём Семёнович**  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Механика и процессы управления» Института прикладной математики и механики, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

**Ведущая  
организация**

Акционерное общество «Научно-Исследовательский Институт Полимерных Материалов» (АО «НИИПМ»)

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ года в \_\_\_ ч. \_\_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178, г. Санкт-Петербург, Васильевский остров, Большой пр., д. 61

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем машиноведения Российской академии наук и на сайте института по адресу <http://www.ipme.ru>.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор технических наук, профессор



В.В. Дубаренко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В настоящее время высоконаполненные полимерные композиты широко используются в ответственных конструкциях аэрокосмической техники и других отраслях. Смесевые твердые топлива являются типичными представителями высоконаполненных полимеров и представляют собой смесь из горючего-связующего, твердых неорганических частиц окислителя, металлических и других добавок. На данный момент существует множество различных групп смесевых твердых ракетных топлив, которые отличаются по виду окислителя, высокоэнергетического горючего, связующего и других компонентов.

Поведение подобных вязкоупругих материалов, чаще всего, лишь приближённо описывается линейной теорией. В связи с этим был разработан аппарат нелинейной вязкоупругости, представленный в работах таких авторов, как Ильюшин А.А., Огибалов П.М., Победря Б.Е., Москвитин В.В., Работнов Ю.Н., Кристенсен Р., Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н., Brinson H.F., Lakes R. и многих других.

Твердотопливные конструкции в процессе эксплуатации испытывают всевозможные механические и тепловые воздействия. Тепловые нагрузки обусловлены суточными и сезонными перепадами температур, изменением температуры в процессе изготовления заряда, нагревом (охлаждением) ракеты при эксплуатации и т.д. Механическое нагружение может быть, как статическим, так и динамическим. Статическим нагружением является, например, хранение изделия в течение длительного времени, которое может исчисляться годами. Примером динамических нагрузок является транспортировка заряда, пульсации давления в камере сгорания двигателя, артиллерийский выстрел и т.д. Известны работы авторов Thorin A., Azoug A., Constantinescu A., Nevriere R., Pradeilles-Duval R.M., Jalocha D., Торми Дж.Е., Бритон С.К., Бульбович Р.В., Словиков С.В., Павлоградский В.В. и др., которые посвящены изучению поведения вязкоупругих материалов и реальных конструкций при одночастотных воздействиях. В действительности, как показывают данные огневых стендовых испытаний, конструкции испытывают значительные (сложные по форме) многочастотные нагрузки в широком диапазоне изменения частот и температур. На первом этапе методически целесообразным является изучение и получение описания поведения материала при двухчастотных нагрузках, которые являются первым приближением к более сложным нагрузкам.

Таким образом, актуальным является развитие методов экспериментального исследования и определения деформационных свойств высоконаполненных полимерных композитов при статических и динамических нагрузках, совершенствование моделей их описания, а также методов расчета конструкций, работающих в экстремальных условиях эксплуатации.

**Целью диссертационной работы** является совершенствование методик проведения экспериментальных исследований и определения вязкоупругих параметров высоконаполненных полимеров при стационарных двухчастотных нагрузках, а также разработка процедуры идентификации многофакторной математической модели для оценки напряженно-деформированного состояния вязкоупругих конструкций аэрокосмической техники.

### **Задачи работы:**

1. Совершенствование модели описания нелинейного механического поведения вязкоупругих материалов в условиях действия стационарных двухчастотных нагрузок.
2. Разработка методик проведения динамического опыта и определения вязкоупругих параметров высоконаполненных полимерных композитов при двухчастотных воздействиях.

3. Проведение экспериментальных исследований с целью выявления многопараметрических зависимостей вязкоупругих параметров от различных условий нагружения.

4. Создание методики идентификации параметров математической модели механического поведения материала, анализ ее предсказательной способности при одно- и двухчастотных нагрузках.

**Научная новизна:**

1. Предложены новые феноменологические полиномиальные модели в комплексном виде на основе интегрального ряда Вольтерра – Фреше для описания нелинейного вязкоупругого поведения материала при стационарных двухчастотных воздействиях.

2. Разработана методика проведения эксперимента применительно к используемому испытательному оборудованию, а также процедура определения вязкоупругих параметров высоконаполненных полимеров при двухчастотных воздействиях с использованием преобразования Фурье.

3. Получены новые экспериментальные данные о зависимостях вязкоупругих параметров материала от различных условий (частот и температуры) двухчастотного нагружения.

4. Предложена процедура идентификации разработанных математических моделей, включающая методики проведения двухчастотного опыта и определения вязкоупругих параметров материала, разработку экспериментального плана, определение коэффициентов моделей и оценку их адекватности.

**Практическая ценность работы** обусловлена возможностью использования полученных результатов (разработанных методик и математических моделей) в проектных организациях, научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро для анализа напряженно-деформированного состояния конструкций, в которых применяются высоконаполненные полимеры, а также в высших учебных заведениях при подготовке инженеров по специальности «Проектирование авиационных и ракетных двигателей». Получен акт об использовании результатов диссертационной работы в учебном процессе в Пермском национальном исследовательском политехническом университете.

Результаты диссертационной работы использованы при выполнении научно-исследовательской работы в рамках проектов Российского фонда фундаментальных исследований (№ 13-01-96003, 16-31-00230 (руководитель)).

**Достоверность результатов** обеспечивается корректным использованием испытательного и измерительного оборудования, имеющего свидетельства о поверке и аттестации. Исследования проводились в Центре экспериментальной механики ПНИПУ, который имеет сертификат аккредитации на проведение механических испытаний и надлежащую систему менеджмента качества. Достоверность подтверждалась соответствием данных, полученных с использованием разработанных моделей и независимых экспериментальных данных, не входящих в план идентификации параметров модели.

**На защиту выносятся** многофакторные полиномиальные математические модели для описания нелинейного вязкоупругого поведения материала в условиях действия различных двухчастотных нагрузок, методики проведения двухчастотного эксперимента, определения вязкоупругих параметров высоконаполненных полимеров и идентификации коэффициентов разработанных моделей.

**Апробация работы.** Основные результаты исследований, приведенные в диссертационной работе, были представлены на Региональной конференции «Отчетная конференция по итогам завершенных (конкурс 2013-2015) и продолжающихся (конкурс 2014-2016) инициативных проектов» (Пермь, 2016), Всероссийской научно-технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации»

(Пермь, 2016), Всероссийских школах-конференциях молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2013-2016), Всероссийской научной конференции «Современные проблемы математики и её прикладные аспекты» (Пермь, 2013), Всероссийской научной конференции «Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций» (Пермь, 2015), Всероссийской научно-технической конференции молодых специалистов ПАО «НПО Искра» (Пермь, 2015), Международной научной конференции «Актуальные проблемы прочности» (Пермь, 2017), Международных научных конференциях «Science of the Future» (Санкт-Петербург, 2014; Казань, 2016), Европейской конференции «European Conference on Composite Materials (ECCM17)» (Мюнхен, 2016), Международной конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2016), Международной конференции по механике композиционных материалов «Mechanics of composite Materials (MCM-2014)» (Рига, 2014).

В полном объеме диссертация обсуждалась на научных семинарах кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические системы» ПНИПУ, Центра экспериментальной механики ПНИПУ, Института проблем машиноведения РАН.

**Публикации.** Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 17 публикациях, в том числе 7 статей [1-7] опубликованы в ведущих рецензируемых научных изданиях, включая 8 публикаций в изданиях, индексируемых в Scopus [1-7, 16] и 2 публикации – в Web of Science [3, 6].

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Работа изложена на 136 страницах, содержит 52 рисунка, 14 таблиц и 1 приложение. Список литературы включает 141 источник.

**Личный вклад автора.** Автором были разработаны математические модели для описания нелинейного поведения вязкоупругого материала, основные этапы методики проведения двухчастотного опыта, программа определения вязкоупругих параметров высоконаполненных полимеров, проведены экспериментальные исследования. Автор участвовал в разработке и реализации процедуры идентификации моделей.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулированы цели и основные задачи исследования, научная новизна и практическая значимость работы, представлены положения, вынесенные на защиту, изложены результаты апробации диссертации и краткое содержание глав работы.

**Первая глава** посвящена анализу российских и зарубежных научных литературных источников. Рассмотрены основные математические модели, описывающие механическое поведение вязкоупругих материалов, условия работы наполненных полимеров в конструкциях. Описаны основные нелинейные эффекты, которые могут возникать при деформировании подобных материалов.

**Вторая глава** посвящена описанию нелинейного механического поведения вязкоупругого материала в условиях действия разнообразных двухчастотных нагрузок. В главе приведены методики проведения экспериментов и определения вязкоупругих параметров материала при одно- и двухчастотных нагрузках.

Общей формой записи физически нелинейных операторов вязкоупругой среды является интегральный ряд Вольтерра – Фреше

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E_1(t-\tau_1) d\varepsilon(\tau_1) + \dots + \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t E_n(t-\tau_1; \dots; t-\tau_n) d\varepsilon(\tau_1) \dots d\varepsilon(\tau_n) + \dots, \quad (2.1)$$

где  $E_n$  – функции релаксации (ядра релаксации),  $\sigma$  – напряжение,  $\varepsilon$  – деформация.

В случае действия стационарных двухчастотных колебаний  $\varepsilon(t) = \varepsilon_{a1}e^{i\omega_1 t} + \varepsilon_{a2}e^{i\omega_2 t}$  и с учетом замены переменной  $t - \tau = \eta$ , зависимость (2.1) (при использовании первых трех членов ряда) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \sigma_3(t) = & \varepsilon_{a1}e^{i\omega_1 t} \tilde{E}'_{1/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a2}e^{i\omega_2 t} \tilde{E}'_{1/2}(\omega_2; T) + \varepsilon_{a1}^2 e^{i2\omega_1 t} \tilde{E}'_{2/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a2}^2 e^{i2\omega_2 t} \tilde{E}'_{2/2}(\omega_2; T) + \\ & + \varepsilon_{a1}^3 e^{i3\omega_1 t} \tilde{E}'_{3/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a2}^3 e^{i3\omega_2 t} \tilde{E}'_{3/2}(\omega_2; T) + \varepsilon_{a1}e^{i\omega_1 t} \varepsilon_{a2}e^{i\omega_2 t} \tilde{E}'_{2/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \\ & + \varepsilon_{a1}^2 e^{i2\omega_1 t} \varepsilon_{a2}e^{i\omega_2 t} \tilde{E}'_{3/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \varepsilon_{a1}e^{i\omega_1 t} \varepsilon_{a2}^2 e^{i2\omega_2 t} \tilde{E}'_{3/4}(\omega_1; \omega_2; T), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E'_{1/1}(\omega_1; T) = \omega_1 \int_0^\infty E_1(\eta_1) \sin \omega_1 \eta_1 d\eta_1, \quad E'_{1/2}(\omega_2; T) = E'_{1/1}(\omega_2; T), \quad (2.3)$$

$$E''_{1/1}(\omega_1; T) = \omega_1 \int_0^\infty E_1(\eta_1) \cos \omega_1 \eta_1 d\eta_1, \quad E''_{1/2}(\omega_2; T) = E''_{1/1}(\omega_2; T), \quad (2.4)$$

$$E'_{2/1}(\omega_1; T) = -\omega_1^2 \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(\eta_1; \eta_2) \cos(\omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2) d\eta_1 d\eta_2, \quad E'_{2/2}(\omega_2; T) = E'_{2/1}(\omega_2; T), \quad (2.5)$$

$$E''_{2/1}(\omega_1; T) = \omega_1^2 \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(\eta_1; \eta_2) \sin(\omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2) d\eta_1 d\eta_2, \quad E''_{2/2}(\omega_2; T) = E''_{2/1}(\omega_2; T), \quad (2.6)$$

$$E'_{2/3}(\omega_1; \omega_2; T) = -\omega_1 \omega_2 \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(\eta_1; \eta_2) \left[ \cos(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2) + \cos(\omega_2 \eta_1 + \omega_1 \eta_2) \right] d\eta_1 d\eta_2, \quad (2.7)$$

$$E''_{2/3}(\omega_1; \omega_2; T) = \omega_1 \omega_2 \int_0^\infty \int_0^\infty E_2(\eta_1; \eta_2) \left[ \sin(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2) + \sin(\omega_2 \eta_1 + \omega_1 \eta_2) \right] d\eta_1 d\eta_2, \quad (2.8)$$

$$E'_{3/1}(\omega_1; T) = -\omega_1^3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_3(\eta_1; \eta_2; \eta_3) \sin(\omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad E'_{3/2}(\omega_2; T) = E'_{3/1}(\omega_2; T), \quad (2.9)$$

$$E''_{3/1}(\omega_1; T) = -\omega_1^3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_3(\eta_1; \eta_2; \eta_3) \cos(\omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad E''_{3/2}(\omega_2; T) = E''_{3/1}(\omega_2; T), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E'_{3/3}(\omega_1; \omega_2; T) = & -\omega_1^2 \omega_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_3(\eta_1; \eta_2; \eta_3) \left[ \sin(\omega_2 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) + \right. \\ & \left. + \sin(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) + \sin(\omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_2 \eta_3) \right] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} E''_{3/3}(\omega_1; \omega_2; T) = & -\omega_1^2 \omega_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_3(\eta_1; \eta_2; \eta_3) \left[ \cos(\omega_2 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) + \right. \\ & \left. + \cos(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) + \cos(\omega_1 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_2 \eta_3) \right] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} E'_{3/4}(\omega_1; \omega_2; T) = & -\omega_1 \omega_2^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_3(\eta_1; \eta_2; \eta_3) \left[ \sin(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_2 \eta_3) + \right. \\ & \left. + \sin(\omega_2 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_2 \eta_3) + \sin(\omega_2 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) \right] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} E''_{3/4}(\omega_1; \omega_2; T) = & -\omega_1 \omega_2^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty E_3(\eta_1; \eta_2; \eta_3) \left[ \cos(\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_2 \eta_3) + \right. \\ & \left. + \cos(\omega_2 \eta_1 + \omega_1 \eta_2 + \omega_2 \eta_3) + \cos(\omega_2 \eta_1 + \omega_2 \eta_2 + \omega_1 \eta_3) \right] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\tilde{E}$  – комплексный параметр ( $\tilde{E}_n = E'_n + iE''_n$ ),  $E'$  – действительная часть комплексного параметра ( $E'_n = E_n^* \cos \varphi_{En}$ ),  $E''$  – мнимая часть комплексного параметра ( $E''_n = E_n^* \sin \varphi_{En}$ ),  $\varphi_E$  и  $E^*$  – вязкоупругие параметры ( $E_n^* = \sqrt{E_n'^2 + E_n''^2}$ ,  $\text{tg} \varphi_{En} = E_n''/E_n'$ ),  $T$  – температура,  $\omega$  и  $\varepsilon_a$  – угловая частота и амплитуда деформации соответственно (индекс 1 соответствует первой низкочастотной гармонике, индекс 2 – второй высокочастотной гармонике). Ядра релаксации должны быть такими, для которых интегралы из уравнений (2.3 – 2.14) сходятся (например, экспоненциальное ядро  $E(\eta) = Ae^{-\beta\eta}$ ,  $\beta > 0$ ). Ограничения,

накладываемые на ядра, фактически сводятся к тому, что все полученные уравнения будут справедливы для асимптотически затухающей модели вязкоупругого деформирования при  $\sigma = const$ .

Таким образом, поведение материала при двухчастотных нагрузках в случае использования первых трех членов интегрального ряда (2.1) может быть описано восемнадцатью вязкоупругими параметрами, при использовании первых двух членов ряда (2.1) – десятью вязкоупругими параметрами и зависимостью следующего вида

$$\sigma_2(t) = \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t} \tilde{E}_{1/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a1}^2 e^{i2\omega_1 t} \tilde{E}_{2/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t} \varepsilon_{a2} e^{i\omega_2 t} \tilde{E}_{2/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \varepsilon_{a2} e^{i\omega_2 t} \tilde{E}_{1/2}(\omega_2; T) + \varepsilon_{a2}^2 e^{i2\omega_2 t} \tilde{E}_{2/2}(\omega_2; T), \quad (2.15)$$

при использовании только первого члена ряда (2.1) (нелинейные эффекты и разносопротивляемость не существенны) – функцией вида

$$\sigma_1(t) = \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t} \tilde{E}_{1/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a2} e^{i\omega_2 t} \tilde{E}_{1/2}(\omega_2; T). \quad (2.16)$$

В дальнейшем зависимость  $\sigma_1(t)$  (2.16) будем называть линейной моделью №1, зависимости  $\sigma_2(t)$  (2.15) и  $\sigma_3(t)$  (2.2) – нелинейными моделями №2 и №3 соответственно.

Для проведения экспериментальных исследований в ЦКП Центр экспериментальной механики ПНИПУ была использована электродинамическая испытательная система Instron ElectroPuls E10000 с температурной камерой Instron 3119 и образцы из имитатора твердого топлива (ПДИ), представляющего низкомолекулярную высоконаполненную полимерную композицию.

Перед испытаниями образцы подвергались термостатированию. Вязкоупругие параметры материала определялись для установившегося режима деформирования (после выхода системы нагружения установки на заданный режим). Известно также, что на начальном этапе деформирования образца наблюдается эффект размягчения материала, ограниченный несколькими первыми циклами нагружения, после которых им можно пренебречь. Для реализации изотермического нагружения образца опыт проводился в режиме термостатирования в камере. Для уменьшения влияния гистерезисного нагрева образца на измеряемые параметры было ограничено время проведения эксперимента (количество циклов в зависимости от вида воздействия).

При определении вязкоупругих параметров материала учитывалась жесткость элементов нагружающей системы, для чего проводилась специальная тарировка. В захватных приспособлениях испытательной установки была закреплена стальная пластина с минимальным зазором между ними. Затем были проведены испытания на растяжение и сжатие. Перемещение, зафиксированное по встроенному датчику установки, является перемещением элементов нагружающей установки. «Реальное» перемещение образца определялось как разница между перемещением, фиксируемым системой, и перемещением ее элементов (удлинением пластины пренебрегаем).

Вследствие разносопротивляемости материала, перемещение элементов системы при сжатии образца будет больше, чем при его растяжении. С увеличением частоты нагружения и понижением температуры опыта перемещение элементов экспериментальной установки и, как следствие, искажение задаваемого сигнала становится существеннее. В связи с вышеизложенным необходимо проверять качество реализации закона деформирования после испытаний и в случае необходимости изменять значения коэффициента обратной связи при повторном испытании. Если настройка коэффициента обратной связи не позволяет достичь требуемой точности, то рекомендуется уменьшить значения амплитуд деформации или частот нагружения.

Геометрия используемых образцов существенно влияет на определяемые вязкоупругие параметры вследствие возникновения сложного неоднородного вида напряженно-деформированного состояния в образце при нагружении. Для учета влияния геометрического фактора образца на определяемые параметры были решены динамические осесимметричные задачи на растяжение – сжатие в программном

обеспечении ANSYS, соответствующие экспериментальной ситуации. На основании полученных результатов были определены поправочные коэффициенты. Вязкоупругие параметры материала определялись с использованием преобразования Фурье.

**В третьей главе** приведены результаты анализа зависимостей (2.2 – 2.14). Введен относительный частотный фактор  $K = \omega_1/\omega_2$ . Если  $K = 1$ , то двухчастотная нагрузка преобразуется в одночастотную нагрузку,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $E_{1/1}^*(\omega; T) = E_{1/2}^*(\omega; T)$ ,  $\varphi_{E1/1}(\omega; T) = \varphi_{E1/2}(\omega; T)$ ,  $E_{2/1}^*(\omega; T) = E_{2/2}^*(\omega; T) = \frac{1}{2}E_{2/3}^*(\omega; T)$ ,  $\varphi_{E2/1}(\omega; T) = \varphi_{E2/2}(\omega; T) = \varphi_{E2/3}(\omega; T)$ ,  $E_{3/1}^*(\omega; T) = E_{3/2}^*(\omega; T) = \frac{1}{3}E_{3/3}^*(\omega; T) = \frac{1}{3}E_{3/4}^*(\omega; T)$ ,  $\varphi_{E3/1}(\omega; T) = \varphi_{E3/2}(\omega; T) = \varphi_{E3/3}(\omega; T) = \varphi_{E3/4}(\omega; T)$ .

Если  $K = 0$ , то двухчастотная нагрузка преобразуется в одночастотную нагрузку,  $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{st}$ ,  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \omega$ . В действительности мы не можем провести эксперимент при  $\omega_1 = 0$ , но мы можем определить некоторые пороговые значения частоты (или отношение частот), при которых значения вязкоупругих параметров будут стремиться к нулю (или достигать некоторых постоянных значений). Например, чем ближе  $K$  к нулю, тем менее существенны зависимости  $E_{2/3}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E2/3}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/3}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/3}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/4}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/4}(\omega_2; T)$  и при определенном соотношении частот ( $K_1, \dots, K_6$  соответственно) ими можно пренебречь. Также нужно отметить, что такие соотношения частот могут быть достаточно малы. Их определение может существенно увеличить временные и финансовые затраты. С другой стороны, определение  $K_1, \dots, K_6$  может и не являться задачей исследователя. В таких случаях экспериментатор может ограничиться некоторым (требуемым) значением  $K_7$ , которое выбирается в зависимости от реального соотношения гармоник, наблюдаемого при исследовании поведения конструкции. Тогда поведение вязкоупругого материала будет определяться в диапазоне  $K \in [K_7; 1]$ .

Если  $K \in [0; 1]$ , то  $E_{2/3}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{2/3}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E2/3}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E2/3}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/3}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{3/3}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/3}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E3/3}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/4}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{3/4}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/4}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E3/4}(\omega_2; T)$  имеют однотипные зависимости соответственно, которые сдвинуты относительно друг друга в полулогарифмических координатах на величину  $\lg K$  и на величину  $0,5 \lg K$  относительно  $E_{2/1}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{2/2}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E2/1}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E2/2}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/1}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{3/2}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/1}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E3/2}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/1}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{3/2}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/1}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E3/2}(\omega_2; T)$  соответственно.  $E_{1/1}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{1/2}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E1/1}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E1/2}(\omega_2; T)$ ,  $E_{2/1}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{2/2}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E2/1}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E2/2}(\omega_2; T)$ ,  $E_{3/1}^*(\omega_1; T)$  и  $E_{3/2}^*(\omega_2; T)$ ,  $\varphi_{E3/1}(\omega_1; T)$  и  $\varphi_{E3/2}(\omega_2; T)$  также имеют однотипные зависимости соответственно.

Для описания зависимости вязкоупругих параметров от частоты нагружения и температуры опыта были использованы полиномы. Для определения этих полиномиальных зависимостей была проведена серия одно- и двухчастотных испытаний (20 экспериментов). После обработки результатов экспериментов были построены графические зависимости, приведенные, в качестве примера, на рисунке 3.1 ( $\nu_1$  и  $\nu_2$  – частоты первой низко- и второй высокочастотной гармоник соответственно). Для других вязкоупругих параметров наблюдались аналогичные зависимости.

Для описания поведения вязкоупругого материала в частотной области при различных значениях температуры использовался принцип температурно-временной аналогии, который продемонстрирован на рисунке 3.2 на примере одночастотных нагружений. Суть принципа заключается в том, что зависимости вязкоупругих параметров от логарифма частоты при различных температурах имеют одинаковую форму, но сдвинуты относительно друг друга по шкале частоты. Величины сдвига описываются функцией температурно-временного смещения  $\lg a_T(T)$ .

Анализ экспериментальных данных показывает, что изменения температуры и частоты существенно влияют на поведение материала. В исследованном диапазоне частот и температур использование принципа температурно-частотной аналогии является



целесообразным. Функция температурно-временного смещения  $\lg a_T(T)$  является общей для всех вязкоупругих параметров. Кривые, построенные после обработки одно- и двухчастотных экспериментов, однотипные и близки по значениям.

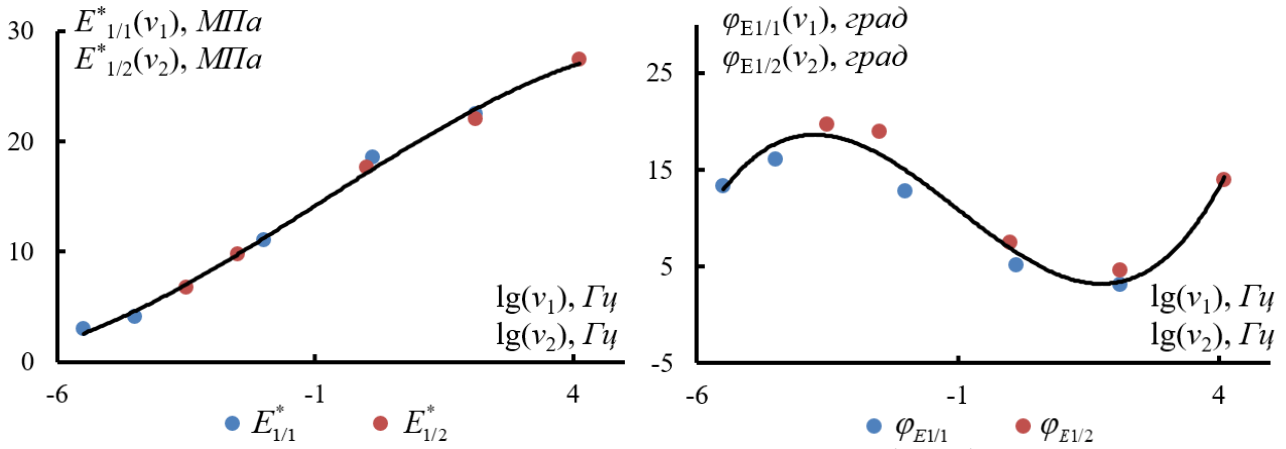


Рисунок 3.1. Зависимости вязкоупругих параметров  $E^*_{1/1}$ ,  $E^*_{1/2}$  и  $\varphi_{E1/1}$ ,  $\varphi_{E1/2}$  от частоты нагружения при температуре 3 °С (двухчастотное нагружение)

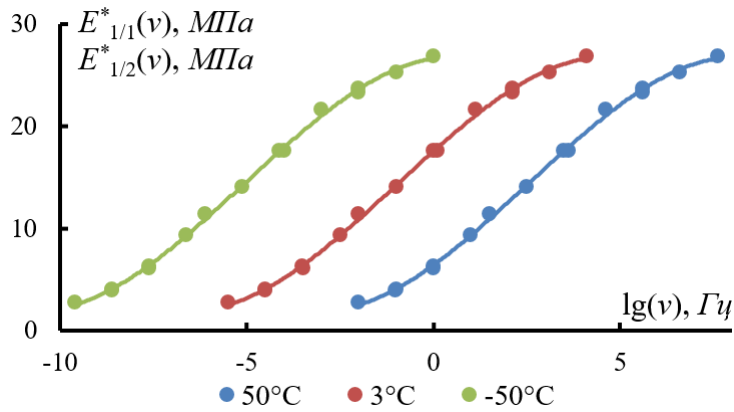


Рисунок 3.2. Реализация принципа температурно-временной аналогии на примере зависимостей параметров  $E^*_{1/1}$ ,  $E^*_{1/2}$  от частоты при различных температурах

Для анализа точности описания экспериментальных данных математическими моделями, которые были предложены во второй главе, был проведен гармонический анализ выходных сигналов (рисунок 3.3)

$$\sigma_\eta(t) = \sigma_0 + \sum_{\eta=1}^{\eta_2'} \left[ \sigma_a^{(\eta)} \cdot \sin(2\pi\eta\nu_1 t + \varphi^{(\eta)}) \right], \quad (3.1)$$

с последующим расчетом коэффициентов

$$K_{\Gamma\sigma} = \frac{\sqrt{\sum_{\eta=1}^{\eta_2'} (\sigma_a^{(\eta)})^2 - (\sigma_a^{(1)})^2 - (\sigma_a^{(1/K)})^2}}{\sqrt{(\sigma_a^{(1)})^2 + (\sigma_a^{(1/K)})^2}} \cdot 100\%, \quad (3.2)$$

$$K_{\sigma_2} = \frac{\sqrt{\sum_{\eta=1}^{\eta_2'} (\sigma_a^{(\eta)})^2 - (\sigma_a^{(1)})^2 - (\sigma_a^{(2)})^2 - (\sigma_a^{(1/K)})^2 - (\sigma_a^{(2/K)})^2 - (\sigma_a^{(1/K+1)})^2 - (\sigma_a^{(1/K-1)})^2}}{\sqrt{(\sigma_a^{(1)})^2 + (\sigma_a^{(2)})^2 + (\sigma_a^{(1/K)})^2 + (\sigma_a^{(2/K)})^2 + (\sigma_a^{(1/K+1)})^2 + (\sigma_a^{(1/K-1)})^2}} \cdot 100\%, \quad (3.3)$$

$$K_{\sigma 3} = \frac{\sqrt{\sum_{\eta=1}^{\eta_2'} (\sigma_a^{(\eta)})^2 - (\sigma_a^{(1)})^2 - (\sigma_a^{(2)})^2 - (\sigma_a^{(3)})^2 - (\sigma_a^{(1/K)})^2 - (\sigma_a^{(2/K)})^2 - (\sigma_a^{(3/K)})^2 - (\sigma_a^{(1/K+1)})^2 - (\sigma_a^{(1/K-1)})^2 - (\sigma_a^{(1/K+2)})^2 - (\sigma_a^{(1/K-2)})^2 - (\sigma_a^{(2/K+1)})^2 - (\sigma_a^{(2/K-1)})^2}}{\sqrt{(\sigma_a^{(1)})^2 + (\sigma_a^{(2)})^2 + (\sigma_a^{(3)})^2 + (\sigma_a^{(1/K)})^2 + (\sigma_a^{(2/K)})^2 + (\sigma_a^{(3/K)})^2 + (\sigma_a^{(1/K+1)})^2 + (\sigma_a^{(1/K-1)})^2 + (\sigma_a^{(1/K+2)})^2 + (\sigma_a^{(1/K-2)})^2 + (\sigma_a^{(2/K+1)})^2 + (\sigma_a^{(2/K-1)})^2}} \cdot 100\% , \quad (3.4)$$

где  $\eta_2'$  – порядок тригонометрического полинома (3.1),  $\sigma_a$  – амплитуда напряжения. Порядок (3.1) выбирался таким, чтобы максимальное отличие экспериментальных данных от значений тригонометрического полинома (3.1) не превышало 0,2 %.

Коэффициент  $K_{G\sigma}$  показывает процентное содержание амплитуд напряжения гармоник, содержащихся в выходном сигнале, но не присутствующих во входном сигнале. Другими словами,  $K_{G\sigma}$  характеризует неточность описания экспериментальных данных моделью №1, а  $K_{\sigma 2}$  и  $K_{\sigma 3}$  – неточность описания экспериментальных данных нелинейными моделями №2 и №3 соответственно. Для всех проведенных экспериментов коэффициент  $K_{G\sigma}$  не превышал 15,5 %,  $K_{\sigma 2} \leq 8$  %,  $K_{\sigma 3} \leq 2$  %. Нужно отметить также несущественность отличий значений напряжений, полученных с помощью нелинейной модели №3 и тригонометрического полинома.

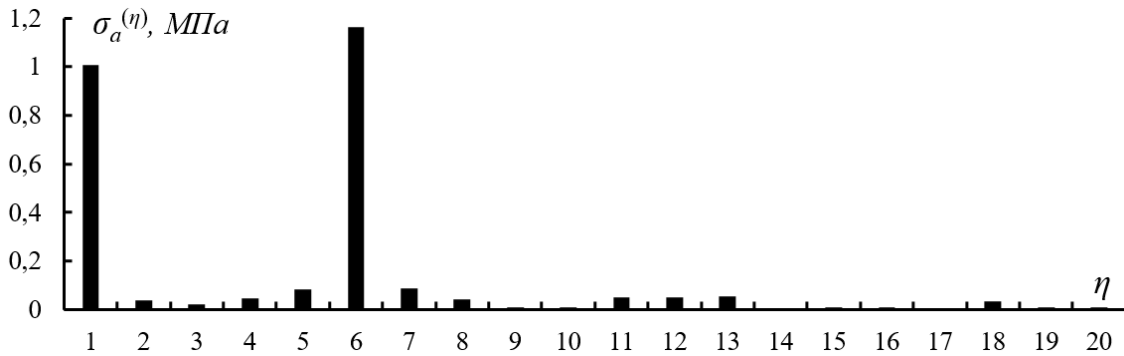


Рисунок 3.3. Значения амплитуд напряжения тригонометрического полинома  $\sigma_{\eta}(t)$  ( $\nu_1 = 1/6$  Гц;  $\nu_2 = 1$  Гц;  $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2} = 3$  %;  $T = -50$  °C)

В рамках исследования был проведен гармонический анализ входных сигналов. В результате было установлено, что установка с достаточной точностью повторяет задаваемые режимы деформирования при амплитуде деформации  $\varepsilon_a \geq 0,5$  %.

При  $K = 0$ ,  $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{st}$ ,  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \omega$ . При этом мы не можем достичь значений  $\varepsilon_{st}$  в течение бесконечно долгого времени. Мы также не сможем сделать это мгновенно. Для этого необходимо некоторое время. Наряду с этим определяемые вязкоупругие параметры будут зависеть от скорости выхода системы на заданные значения статической деформации. С другой стороны, низкочастотную гармонику двухчастотной нагрузки можно принять в качестве аналога статической деформации, а высокочастотную гармонику – в качестве аналога одночастотной нагрузки

$$\begin{aligned} \sigma_3(t) = & \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t} \tilde{E}_{1/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a1}^2 e^{i2\omega_1 t} \tilde{E}_{2/1}(\omega_1; T) + \varepsilon_{a1}^3 e^{i3\omega_1 t} \tilde{E}_{3/1}(\omega_1; T) + \\ & + \left( \varepsilon_{a1}^2 e^{i2\omega_1 t} \tilde{E}_{3/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t} \tilde{E}_{2/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \tilde{E}_{1/2}(\omega_2; T) \right) \varepsilon_{a2} e^{i\omega_2 t} \\ & + \left( \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t} \tilde{E}_{3/4}(\omega_1; \omega_2; T) + \tilde{E}_{2/2}(\omega_2; T) \right) \varepsilon_{a2}^2 e^{i2\omega_2 t} + \tilde{E}_{3/2}(\omega_2; T) \varepsilon_{a2}^3 e^{i3\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В таком случае скорость выхода на заданный уровень статической деформации  $\varepsilon_{st}$  будет определяться амплитудой деформации  $\varepsilon_{a1}$  и частотой нагружения  $\omega_1$

$$\varepsilon_{st} = \varepsilon_{a1} e^{i\omega_1 t_{st}}, \quad (3.6)$$

где  $t_{st}$  – момент времени выхода на заданное значение статической деформации.

Учитывая (3.6) в (3.5) примем

$$\tilde{E}_1 = \varepsilon_{st}^2 \tilde{E}_{3/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \varepsilon_{st} \tilde{E}_{2/3}(\omega_1; \omega_2; T) + \tilde{E}_{1/2}(\omega_2; T), \quad (3.7)$$

$$\tilde{E}_2 = \varepsilon_{st} \tilde{E}_{3/4}(\omega_1; \omega_2; T) + \tilde{E}_{2/2}(\omega_2; T), \quad \tilde{E}_3 = \tilde{E}_{3/2}(\omega_2; T). \quad (3.8)$$

Как видно из (3.7), обоснованием выбора той или иной модели также может служить тот факт, что если при проведении одночастотного эксперимента с варьированием значений статической деформации вязкоупругий параметр  $E_1^*$  зависит от предварительной статической деформации  $\varepsilon_{st}$  и эта зависимость с достаточной точностью описывается полиномом второй степени, то для описания поведения материала в условиях действия двухчастотных нагрузок достаточно использовать первые три члена интегрального ряда Вольтерра – Фреше (2.1) (нелинейная модель №3). Если зависимость  $E_1^*$  от  $\varepsilon_{st}$  с требуемой точностью описывается полиномом первой степени, то для описания поведения материала достаточно использовать первые два члена (2.1) (нелинейная модель №2). Если не наблюдается никакой зависимости  $E_1^*$  от  $\varepsilon_{st}$ , то целесообразно использовать один член (2.1) (линейная модель №1).

На рисунке 3.4 приведена зависимость  $E_1^*(\varepsilon_{st})$  для одночастотного нагружения с параметрами  $\nu = 0,1$  Гц;  $\varepsilon_a = 2,5$  %;  $T = 30$  °С. Аналогичные зависимости были получены при других значениях амплитуды деформации, частоты нагружения и температуры опыта. В исследованном диапазоне  $\varepsilon_{st}$  (-6 % ÷ 3 %) зависимость  $E_1^*(\varepsilon_{st})$  описана полиномом второй степени. Окончательное заключение о целесообразности использования той или иной модели может быть сделано только после процедуры идентификации.

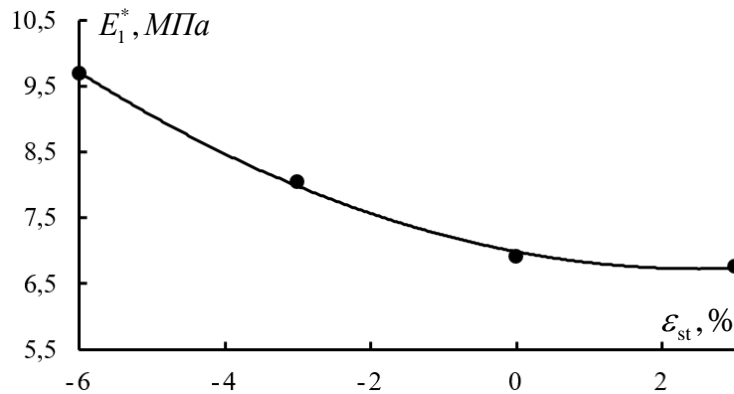


Рисунок 3.4. Зависимость вязкоупругого параметра  $E_1^*$  от статической деформации  $\varepsilon_{st}$  ( $\nu = 0,1$  Гц;  $\varepsilon_a = 2,5$  %;  $T = 30$  °С)

**В четвертой главе** изложена процедура идентификации математических моделей. Полученные в предыдущем разделе экспериментальные данные о закономерностях механического поведения вязкоупругого материала позволили разработать многофакторные полиномиальные зависимости

$$E_{1/1}^* = b_{1/0} + b_{1/1} \lg v_1' + b_{1/2} (\lg v_1')^2 + b_{1/3} (\lg v_1')^3, \quad E_{1/2}^* = b_{1/0} + b_{1/1} \lg v_2' + b_{1/2} (\lg v_2')^2 + b_{1/3} (\lg v_2')^3, \quad (4.1)$$

$$\varphi_{E1/1} = b_{2/0} + b_{2/1} \lg v_1' + b_{2/2} (\lg v_1')^2 + b_{2/3} (\lg v_1')^3, \quad \varphi_{E1/2} = b_{2/0} + b_{2/1} \lg v_2' + b_{2/2} (\lg v_2')^2 + b_{2/3} (\lg v_2')^3, \quad (4.2)$$

$$E_{2/1}^* = b_{3/0} + b_{3/1} \lg v_1' + b_{3/2} (\lg v_1')^2 + b_{3/3} (\lg v_1')^3, \quad E_{2/2}^* = b_{3/0} + b_{3/1} \lg v_2' + b_{3/2} (\lg v_2')^2 + b_{3/3} (\lg v_2')^3, \quad (4.3)$$

$$\varphi_{E2/1} = b_{4/0} + b_{4/1} \lg v_1' + b_{4/2} (\lg v_1')^2 + b_{4/3} (\lg v_1')^3, \quad \varphi_{E2/2} = b_{4/0} + b_{4/1} \lg v_2' + b_{4/2} (\lg v_2')^2 + b_{4/3} (\lg v_2')^3, \quad (4.4)$$

$$E_{2/3}^* = \begin{cases} (1 + b_{5/1} \lg K) (2b_{3/0} + 2b_{3/1} \lg v_2'' + 2b_{3/2} (\lg v_2'')^2 + 2b_{3/3} (\lg v_2'')^3); & K \geq K_7 \\ (1 + b_{5/1} \lg K_7) (2b_{3/0} + 2b_{3/1} \lg v_2'' + 2b_{3/2} (\lg v_2'')^2 + 2b_{3/3} (\lg v_2'')^3); & K < K_7 \end{cases}, \quad (4.5)$$

$$\varphi_{E2/3} = \begin{cases} (1 + b_{6/1} \lg K) (b_{4/0} + b_{4/1} \lg v_2'' + b_{4/2} (\lg v_2'')^2 + b_{4/3} (\lg v_2'')^3); & K \geq K_7 \\ (1 + b_{6/1} \lg K_7) (b_{4/0} + b_{4/1} \lg v_2'' + b_{4/2} (\lg v_2'')^2 + b_{4/3} (\lg v_2'')^3); & K < K_7 \end{cases}, \quad (4.6)$$

$$E_{3/1}^* = b_{7/0} + b_{7/1} \lg v_1' + b_{7/2} (\lg v_1')^2 + b_{7/3} (\lg v_1')^3, \quad E_{3/2}^* = b_{7/0} + b_{7/1} \lg v_2' + b_{7/2} (\lg v_2')^2 + b_{7/3} (\lg v_2')^3, \quad (4.7)$$

$$\varphi_{E3/1} = b_{8/0} + b_{8/1} \lg v_1' + b_{8/2} (\lg v_1')^2 + b_{8/3} (\lg v_1')^3, \quad \varphi_{E3/2} = b_{8/0} + b_{8/1} \lg v_2' + b_{8/2} (\lg v_2')^2 + b_{8/3} (\lg v_2')^3, \quad (4.8)$$

$$E_{3/3}^* = \begin{cases} (1 + b_{9/1} \lg K) (3b_{7/0} + 3b_{7/1} \lg v_2'' + 3b_{7/2} (\lg v_2'')^2 + 3b_{7/3} (\lg v_2'')^3); & K \geq K_7 \\ (1 + b_{9/1} \lg K_7) (3b_{7/0} + 3b_{7/1} \lg v_2'' + 3b_{7/2} (\lg v_2'')^2 + 3b_{7/3} (\lg v_2'')^3); & K < K_7 \end{cases}, \quad (4.9)$$

$$\varphi_{E3/3} = \begin{cases} (1 + b_{10/1} \lg K) (b_{8/0} + b_{8/1} \lg v_2'' + b_{8/2} (\lg v_2'')^2 + b_{8/3} (\lg v_2'')^3); & K \geq K_7 \\ (1 + b_{10/1} \lg K_7) (b_{8/0} + b_{8/1} \lg v_2'' + b_{8/2} (\lg v_2'')^2 + b_{8/3} (\lg v_2'')^3); & K < K_7 \end{cases}, \quad (4.10)$$

$$E_{3/4}^* = \begin{cases} (1 + b_{11/1} \lg K) (3b_{7/0} + 3b_{7/1} \lg v_2'' + 3b_{7/2} (\lg v_2'')^2 + 3b_{7/3} (\lg v_2'')^3); & K \geq K_7 \\ (1 + b_{11/1} \lg K_7) (3b_{7/0} + 3b_{7/1} \lg v_2'' + 3b_{7/2} (\lg v_2'')^2 + 3b_{7/3} (\lg v_2'')^3); & K < K_7 \end{cases}, \quad (4.11)$$

$$\varphi_{E3/4} = \begin{cases} (1 + b_{12/1} \lg K) (b_{8/0} + b_{8/1} \lg v_2'' + b_{8/2} (\lg v_2'')^2 + b_{8/3} (\lg v_2'')^3); & K \geq K_7 \\ (1 + b_{12/1} \lg K_7) (b_{8/0} + b_{8/1} \lg v_2'' + b_{8/2} (\lg v_2'')^2 + b_{8/3} (\lg v_2'')^3); & K < K_7 \end{cases}, \quad (4.12)$$

$$\lg v_1' = \lg v_1 + \lg a_T, \quad \lg v_2' = \lg v_2 + \lg a_T, \quad (4.13)$$

$$\lg a_T = b_{13/0} + b_{13/1}T + b_{13/2}T^2 + b_{13/3}T^3, \quad \lg v_2'' = \lg v_2 + \lg a_T + 0,5 \lg K, \quad (4.14)$$

где  $b_{1/0}, \dots, b_{1/3}, \dots, b_{13/3}$  – коэффициенты полиномов, определяемые в процессе идентификации моделей.

Для определения коэффициентов зависимостей был разработан план экспериментальных исследований, который включает одно- и двухчастотные испытания. Разработанный план содержит 16 опытов, из которых для модели №3 определяются 144 вязкоупругих параметра (при этом необходимо определить 34 коэффициента), для модели №2 – 88 (22 коэффициента), для модели №1 – 40 (12 коэффициентов). Число определяемых параметров больше, чем число коэффициентов моделей, поэтому план получается перенасыщенным. Это позволяет проводить оценку адекватности моделей.

Была проведена оценка погрешности, которая обусловлена испытательным и измерительным оборудованием, а также природой материала. Проверена однородность дисперсий для разных точек факторного пространства с использованием критерия Фишера. Для вязкоупругих параметров  $E^*$  характерна однородность относительной дисперсии воспроизводимости  $V_e^2$ , для параметров  $\varphi_E$  – абсолютной дисперсии воспроизводимости  $S_e^2$ . Для первого члена ряда (2.1) коэффициент вариации равен 6,2 %  $V_{e1} = 0,062$  (для  $E_{1/1}^*, E_{1/2}^*$ ), среднеквадратическое отклонение  $S_{e1}$  составляет 1,2 град (для  $\varphi_{E1/1}, \varphi_{E1/2}$ ). Для второго члена ряда (2.1)  $V_{e2} = 0,16$  (для  $E_{2/1}^*, E_{2/2}^*, E_{2/3}^*$ ),  $S_{e2} = 2,1$  град (для  $\varphi_{E2/1}, \varphi_{E2/2}, \varphi_{E2/3}$ ). Для третьего члена ряда (2.1)  $V_{e3} = 0,26$  (для  $E_{3/1}^*, E_{3/2}^*, E_{3/3}^*, E_{3/4}^*$ ),  $S_{e3} = 3,2$  град (для  $\varphi_{E3/1}, \varphi_{E3/2}, \varphi_{E3/3}, \varphi_{E3/4}$ ).

Коэффициенты  $b_{1/0}, \dots, b_{1/n1}, \dots, b_{13/n13}$  определялись путем минимизации значения функционала следующего вида

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n'} \left( \frac{E_{Vj/mi}^* - E_{Vj/ji}^*}{E_{Vj/ji}^*} \right)^2 + 0,15 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n'} \left( \frac{E_{2j/mi}^* - E_{2j/ji}^*}{E_{2j/ji}^*} \right)^2 + 0,06 \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{n'} \left( \frac{E_{3j/mi}^* - E_{3j/ji}^*}{E_{3j/ji}^*} \right)^2 + \quad (4.15)$$

$$+ 0,0027 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n'} (\varphi_{EVj/mi} - \varphi_{EVj/ji})^2 + 0,001 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n'} (\varphi_{E2j/mi} - \varphi_{E2j/ji})^2 + 0,0004 \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{n'} (\varphi_{E3j/mi} - \varphi_{E3j/ji})^2,$$

где  $n'$  – количество вязкоупругих параметров, определяемых экспериментально по разработанному плану;  $E_{mi}^*$ ,  $\varphi_{E_{mi}}$ ,  $E_i^*$ ,  $\varphi_{E_i}$  – вязкоупругие параметры, определенные по разработанным моделям и экспериментально соответственно для  $i$ -тых условий опыта. Структура функционала строилась на основании анализа дисперсии воспроизводимости по каждой его (4.15) составляющей с определением соответствующих нормирующих множителей.

С помощью критерия Фишера была проверена адекватность моделей. Для вязкоупругих параметров  $\varphi_E$  выполняется условие адекватности в абсолютных единицах, для параметров  $E^*$  – в относительных. В ходе исследования также были проведены дополнительные (независимые) эксперименты, которые не использовались для определения коэффициентов моделей. Эти эксперименты были использованы для сопоставления моделей №1, №2 и №3. Для всех независимых двухчастотных экспериментов средние значения максимальных отклонений экспериментальных данных от значений, полученных с использованием разработанных моделей №1, №2 и №3 равны 9,9 %, 9,9 %, 16,9 % соответственно. Для всех независимых одночастотных испытаний средние значения максимальных отклонений равны 10,3 %, 10,5 %, 14,7% соответственно.

По представленным данным можно заметить, что в целом модели №3 и №2 обладают значительным преимуществом перед моделью №1. В свою очередь, нелинейная модель №3 не обладает существенным преимуществом перед моделью №2 в исследованном диапазоне амплитуд деформации для данного материала. С возрастанием амплитуд деформации предсказательная способность моделей №3 и №2 относительно модели №1 и модели №3 относительно модели №2 улучшается. При уменьшении значений амплитуд деформации отличия моделей становятся менее существенными.

Таким образом, в случае увеличения диапазона амплитуд деформации или в случае испытания некоторого другого материала с более существенной зависимостью вязкоупругих параметров от предварительной статической деформации предсказательная способность модели №3 над моделью №2 будет более существенной. Отметим также, что модели №2 и №3 удовлетворительно описывают поведение материала при нецелом отношении частот, при близких значениях частот, а также при различных значениях амплитуд деформации.

На практике возможны случаи, когда гармонические нагрузки действуют на фоне квазистатических. Если амплитуды деформации существенно меньше статической деформации (далеко от вершины параболы (рисунок 3.4)), то зависимость вязкоупругих параметров от статической деформации может быть описана линейным уравнением. Тогда можно предположить, что для описания поведения материала в таких случаях достаточно использовать только первые два члена ряда (2.1), что существенно упрощает работу исследователя.

Для оценки напряженно-деформированного состояния конструкций необходимо также определять коэффициент Пуассона. Нужно отметить, что постоянство коэффициента Пуассона для наполненных полимеров при различных статических деформациях часто не подтверждается экспериментально. В первом приближении для расчета конструкций при небольших значениях деформации можно принять коэффициент Пуассона, равным 0,495, что и делается достаточно часто в отрасли двигателестроения. При увеличении уровня деформации необходимо определять коэффициент Пуассона экспериментально.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы:

1. Анализом нагрузок, действующих в процессе эксплуатации ракетных двигателей на твердом топливе, показано наличие сложных по форме динамических режимов нагружения (например, многочастотное нагружение, биение, переходные режимы и др.), показана необходимость получения информации о механических свойствах смесевых твёрдых ракетных топлив при сложных гармонических нагружениях (например,

двухчастотном нагружении) для динамического анализа конструкций и оценки напряжённо-деформированного состояния заряда.

2. На основе решения методических вопросов разработана методика проведения двухчастотного эксперимента (учёт жесткости элементов нагружающей системы, геометрического фактора образца, искажения задаваемого сигнала и др.) применительно к используемому оборудованию и методика определения вязкоупругих параметров высоконаполненных полимеров с использованием преобразования Фурье для входных и выходных сигналов.

3. Развита модели в комплексной форме на основе интегрального ряда Вольтерры с использованием феноменологических полиномиальных описаний вязкоупругих параметров материала от различных условий нагружения, позволяющие описывать нелинейное вязкоупругое поведение высоконаполненных полимеров в условиях действия стационарных двухчастотных нагрузок в широких диапазонах соотношений частот нагружения и температур опыта при малых амплитудах деформации.

4. Предложена и реализована процедура идентификации математических моделей описания поведения вязкоупругого материала при одно- и двухчастотных нагрузках, включающая методики проведения двухчастотного опыта и определения вязкоупругих параметров материала, формирование плана экспериментальных исследований для идентификации предложенных полиномиальных зависимостей, параметрическую идентификацию коэффициентов моделей с использованием метода покоординатного спуска и оценку адекватности моделей.

5. В соответствии с разработанными методиками проведены одно- и двухчастотные испытания высоконаполненного полимерного композита в диапазонах частот (0,01 ÷ 1) Гц, амплитуд деформации (0,5 ÷ 6) %, отношения частот (0,01 ÷ 1) и температур (50 ÷ 50)°С и получены адекватные феноменологические описания зависимостей вязкоупругих параметров от частот нагружения и температуры опыта.

6. Проведен анализ предсказательной способности разработанных многофакторных математических моделей, который показал, что необходимость использования предложенных моделей зависит не только от вида материала, но и от условий нагружения. Так для описания поведения материала «ПДИ» в исследованных условиях нагружений достаточно использовать упрощенную модель №2. При увеличении уровня динамических деформаций и для материалов, отличающихся более существенными зависимостями вязкоупругих параметров от статической и динамической деформаций, необходимо использовать модель №3.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в ведущих рецензируемых научных изданиях

1. Янкин А.С., Словиков С.В., Бульбович Р.В. Определение динамических механических свойств низко модульных вязкоупругих композитов при бигармоническом законе нагружения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т.19. – №1. – С.141-151.  
(перевод) Yankin A.S., Slovikov S.V., Bulbovich R.V. Determination of the dynamic mechanical properties of low-modulus viscoelastic composites at the biharmonic law of loading // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2013. – V.4. – I.2. – P.139-150 (Scopus).
2. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словиков С.В., Вильдеман В.Э. Методические вопросы экспериментальных исследований вязкоупругих наполненных полимерных композитов при сложных динамических циклических воздействиях // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – №4 – С.180-192 (Scopus).

3. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словигов С.В., Вильдеман В.Э. Влияние амплитуды деформации высокочастотной составляющей бигармонического (двухчастотного) закона нагружения на динамические механические свойства низко модульных вязкоупругих композитов // Механика композитных материалов. – 2013. – Т.49. – №6. – С.1005-1012.  
(перевод) Yankin A.S., Bul'Bovich R.V., Slovikov S.V., Vil'Deman V.E. Effect of strain amplitude of the high-frequency component of biharmonic (two-frequency) loading on the dynamic mechanical properties of low-modulus viscoelastic composites // Mechanics of Composite Materials. – 2013. – V.49. – No.6. – P.673-678 (Scopus, WoS).
4. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словигов С.В., Вильдеман В.Э. Особенности поведения низко модульных вязкоупругих полимерных композитов при варьировании амплитуды деформации низкочастотной составляющей бигармонической нагрузки // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2014. – №3. – С.233 - 251 (Scopus).
5. Янкин А.С. Влияние частот бигармонического (двухчастотного) нагружения на механическое поведение имитатора твердого топлива // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – №4. – С.273-292 (Scopus).
6. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словигов С.В., Вильдеман В.Э., Павлоградский В.В. Вязкоупругие характеристики высоконаполненных полимерных композитов при двухчастотных воздействиях // Механика композитных материалов. – 2016. – Т.52. – №1. – С.115-128.  
(перевод) Yankin A.S., Bulbovich R.V., Slovikov S.V., Vildeman V.E., and Pavlogradskiy V.V. Viscoelastic characteristics of highly filled polymer composites under two-frequency actions // Mechanics of composite materials. – 2016. – V.52. – No.1. – P.81-88 (Scopus, WoS).
7. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словигов С.В. Математическая модель и экспериментальные исследования поведения вязкоупругих наполненных полимеров при двухчастотных воздействиях // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №2. – С.208-225 (Scopus).

#### **Статьи в других изданиях и материалах конференций**

8. Янкин А.С., Бульбович Р.В. Определение динамических механических свойств низко модульных вязкоупругих композитов при бигармоническом (двухчастотном) законе нагружения // Математическое моделирование в естественных науках, XXII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов. – Пермь: ПНИПУ. – 2013. – №1. – С.190-192.
9. Янкин А.С., Бульбович Р.В. Определение динамических механических свойств низко модульных вязкоупругих композитов при различных параметрах бигармонического (двухчастотного) нагружения // Современные проблемы математики и её прикладные аспекты, Всероссийская научно-практическая конференция. – Пермь: ПГНИУ. – 2013. – С.179.
10. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словигов С.В. Определение поведения низко модульных вязкоупругих материалов при сложных гармонических нагрузках // Математическое моделирование в естественных науках, XXIII Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов. – Пермь: ПНИПУ. – 2014. – Т.1. – С.324-326.
11. Янкин А.С. Бульбович Р.В. Описание механического поведения высоконаполненного полимерного композита в условиях действия двухчастотного нагружения // Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций, Всероссийская научная конференция. – Пермь: ПНИПУ. – 2015. – С.118.
12. Янкин А.С., Бульбович Р.В. Экспериментальное исследование механического поведения низко модульного высоконаполненного полимерного композита при

- гармонических нагрузках // Математическое моделирование в естественных науках, XXIV Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов. – Пермь: ПНИПУ. – 2015. – Т.1. – С.508-510.
13. Янкин А.С., Бульбович Р.В., Словиков С.В., Вильдеман В.Э. Описание механического поведения высоконаполненных вязкоупругих полимерных композитов при двухчастотных законах нагружения // Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций, Международная конференция. – Екатеринбург. – 2016. – С.48.
  14. Янкин А.С., Бульбович Р.В. Описание механического поведения высоконаполненных полимеров при сложных стационарных гармонических нагрузках // Математическое моделирование в естественных науках, XXV Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов. – Пермь: ПНИПУ. – 2016. – Т.1. – С.459-461.
  15. Янкин А.С., Бажуков П.С., Биккулова А.В. Экспериментально-теоретическое исследование механического поведения высоконаполненных полимеров в условиях действия двухчастотных нагрузок // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации, XVII Всероссийская научно-техническая конференция. – Пермь. – 2016. – Т.1. – С.12-13
  16. Yankin A.S., Bulbovich R.V., Wildemann V.E., Slovikov S.V. Research of mechanical properties of highly-filled polymer composites under complex harmonic loadings // 17th European Conference on Composite Materials. – Munich. – 2016 (Scopus).
  17. Янкин А.С. Бульбович Р.В. Экспериментально-теоретическое исследование вязкоупругого поведения высоконаполненных полимеров в условиях действия сложных гармонических нагрузок // Актуальные проблемы прочности, LVIII Международная конференция. – Пермь. – 2017. – С.178.

Подписано в печать 2017 г.  
Формат 60 x 90/16. Набор компьютерный.  
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ №.