

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Научно-производственная корпорация «Механобр-техника»

На правах рукописи

СОРОКИН Владислав Сергеевич

**ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ДВИЖЕНИЕ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В
ЖИДКОСТИ**

Специальность
01.02.04– Механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2011

Работа выполнена в Институте проблем машиноведения
Российской академии наук и «НПК «Механобр – техника»

Научный руководитель: доктор физико – математических
наук, профессор Блехман Илья
Израилевич

Официальные оппоненты: доктор физико – математических
наук, профессор Коузов Даниил
Петрович

доктор физико – математических
наук, профессор Исполов Юрий
Григорьевич

Ведущая организация: Санкт-Петербургский Государственный
Технологический институт (Технический университет)

Защита состоится «9» июня 2011 года в 14 часов 00 минут
на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при
Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178,
Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Института
проблем машиноведения РАН.

Автореферат разослан «4» мая 2011 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор

 В.В. Дубаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Исследование действия вибрации на нелинейные механические системы является важным для многих приложений, например, добычи и переработки полезных ископаемых, химической технологии, металлургии, промышленности строительных материалов и других. Одним из важнейших эффектов является здесь изменение под действием вибрации свойств сред по отношению к медленным или статически приложенным нагрузкам.

В существенном числе технологических процессов составляющих основу указанных приложений, например, в процессах переработки природных и техногенных материалов, в горно-обогачительных процессах и других, приходится иметь дело со средами, состоящими из двух и более фаз – газо-жидкостными средами, твёрдыми частицами в жидкой, воздушной и газожидкостной среде. Во всех этих случаях представляют значительный интерес эффекты, возникающие при действии вибрации на такие среды; эти эффекты существенно и порой парадоксальным образом влияют на происходящие в средах процессы. Они позволяют значительно усовершенствовать процессы и служат основой для создания новых технологий.

Поэтому теоретическое и экспериментальное исследование воздействия вибраций на перечисленные среды можно, с одной стороны, отнести к фундаментальным исследованиям в области механики, а с другой – рассматривать как создание задела для инновационных технологических и конструкторских разработок.

Задачи о свободном падении твердой частицы в жидкости и всплывании в ней деформируемой частицы (отдельного пузырька газа или пузырька с закрепленной на нем частицей) являются одними из базовых модельных задач в теории процессов обогащения. В настоящее время в обогащении широко используются вибрационные технологии. В связи с этим представляет интерес изучение влияния колеблющейся жидкости на среднюю скорость движения находящихся в ней частиц и пузырьков газа. Такое исследование интересно также для развития теории процесса флотации, который происходит в условиях турбулентных пульсаций жидкости, и для ряда других технологических процессов, а также в связи с возможностью управления движением частиц и пузырьков газа посредством вибрирования объема жидкости, в которую они погружены.

Особый интерес представляет изучение движения отдельных пузырьков воздуха и пузырьков с закрепленными на них твердыми частицами в колеблющейся жидкости, в частности исследование «парадоксального» эффекта погружения таких пузырьков в вертикально вибрирующем сосуде с жидкостью.

Цель работы. Исследование явлений, возникающих в сосудах с жидкостью и частицами под действием вибрации.

В соответствии с целью работы были поставлены следующие **научные задачи диссертации**

1. Исследование влияния колебательного движения несжимаемой вязкой жидкости на скорость установившегося (стационарного) движения находящейся в ней частицы при различных способах возбуждения вибрации частицы и жидкости.
2. Установление условий погружения свободного и несущего твердые частицы («оснащенного») пузырька воздуха в однородно колеблющуюся несжимаемую вязкую жидкость. Определение средней скорости его движения в такой жидкости.
3. Установление условий погружения пузырька воздуха в колеблющуюся сжимаемую вязкую среду (насыщенный газом слой вязкой жидкости). Определение средней скорости его движения в такой среде.

Постановка задач и методы исследования. В общем случае задача относительно строгого математического моделирования движения деформируемого тела в вязкой сжимаемой жидкости наталкивается на значительные трудности. Требуется совместное решение уравнений механики деформируемого твердого тела (уравнений динамической теории упругости) и уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье-Стокса + уравнения неразрывности) при учете соответствующих граничных условий, запись которых является отдельной проблемой. На основе такого точного подхода решены только некоторые частные задачи при использовании сильно упрощающих предположений.

В настоящей работе рассматривается прямолинейное движение деформируемой частицы (пузырька воздуха) в вязкой жидкости при турбулентном режиме движения жидкости около частицы. В исследовании используется упрощенный подход, широко применяемый в прикладных науках (например, в теории движения самолетов и судов, в теории процессов обогащения, в теории химических процессов), при котором взаимодействие жидкости с телом описывается с помощью упрощенной модели – реакции жидкости учитываются в виде присоединенного количества движения жидкости B и силы сопротивления $F(v_{rel})$, зависящей от скорости частицы относительно жидкости. Указанный подход предусматривается и классическими руководствами.

Выражение для силы сопротивления равномерному движению тела в общем виде (т.е. применимое как в случае ламинарного, так и в случае турбулентного обтекания тела жидкостью) было найдено экспериментальным путем в ряде работ (первоисточником является работа Рэлея 1911). Также Рэлеем (позже Лэмбом 1932 и Прандтлем 1944) было проведено физическое истолкование этого выражения.

Таким образом, в настоящей работе движение частиц (как твердых, так и пузырьков) рассматривается в гидравлическом приближении, т.е. как движение в сопротивляющейся среде с учетом присоединенной массы.

Учет деформируемости (сжимаемости) частицы (пузырька воздуха) в настоящей работе проводится путем использования различных моделей

частицы – простейшей двухмассовой, континуальной и учитывающей пульсации ее объема под действием переменного внешнего давления.

Для решения проблем, рассматриваемых в работе, используется подход вибрационной механики – единый эффективный методический подход и математический аппарат для описания и исследования большой группы явлений, сопровождающих действие вибрации в нелинейных механических системах. Соответствующим методом решения задач является метод прямого разделения движений.

Отличительными признаками метода прямого разделения движений является большая по сравнению с другими методами (например, с методом усреднения или с методом многих масштабов) простота в понимании и в применении, а также его физическая интерпретируемость на каждом шаге.

Экспериментальная часть настоящей работы была проведена на универсальном вибрационном стенде НПК «Механобр-Техника».

Научную новизну диссертации составляют следующие **основные положения, выносимые на защиту**

- 1) Получены относительно простые формулы для скорости установившегося движения твердой и деформируемой частицы (пузырька воздуха) в вязкой несжимаемой жидкости в различных условиях возбуждения вибрации жидкости и частицы.
- 2) Показано, что скорость установившегося движения частицы в случае, когда сопротивление носит нелинейный характер, что имеет место при турбулентном обтекании, уменьшается вследствие пульсаций жидкости. Это уменьшение может быть особенно значительным для деформируемой частицы, например, пузырька воздуха при наличии резонансных эффектов.
- 3) Теоретически установлен и экспериментально подтвержден эффект погружения свободного и несущего твердые частицы («оснащенного») пузырька воздуха в однородно колеблющуюся несжимаемую вязкую жидкость. Получены условия, при которых этот эффект имеет место.
- 4) Найдено приближенное выражение для средней скорости погружения или всплывания пузырька в несжимаемой вязкой жидкости, существенно зависящее от глубины его погружения и от параметров вибрации.
- 5) Показано, что вибрационная сила, действующая на пузырек в колеблющейся вязкой газонасыщенной жидкости, имеет две составляющие, первая из которых обусловлена сжимаемостью пузырька, а вторая – сжимаемостью окружающей его среды. Получены условия, при которых пузырек в такой среде будет погружаться.
- 6) Найдено приближенное выражение для средней скорости движения пузырька в газонасыщенном слое вязкой жидкости, а также выражение для средней скорости распространения этого слоя вглубь сосуда. Получено условие вибрационной неустойчивости раздельного состояния системы газ-жидкость.

Научная и практическая значимость. Научная значимость работы состоит в аналитическом описании и физическом объяснении эффектов, возникающих в колеблющейся жидкости с твердыми частицами и пузырьками воздуха, а также в том, что для получения результатов подход вибрационной механики и метод прямого разделения движений распространены на новый класс нелинейных систем.

Практическая значимость работы состоит в применимости полученных результатов для совершенствования различных технологических процессов, в частности процессов грохочения, флотации, промывки, гравитационного и центробежного обогащения. Кроме того они могут быть полезными для управления перемещениями тела в сплошной податливой среде и иметь некоторые приложения в биомеханике, например в задаче управления движением микрочастицы в кровеносной системе человека.

Диссертация выполнялась в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН 2006-2011 гг.; гранта Президента РФ по поддержке ведущей научной школы РФ: НШ-5649.2006.8; при поддержке грантов РФФИ: 04-01-00053, 06-08-01003, 06-08-01015, 07-08-00241, 08-08-00090, 10-08-00201; федеральной целевой программой «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2007-2012 годы» (госконтракт № 02.515.11.5092); федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (госконтракт № 02.740.11.0027, госконтракт № 14.740.11.0416).

Обоснованность и достоверность результатов обеспечивается использованием при теоретическом анализе апробированного метода исследования нелинейных процессов – вибрационной механики, а также продуманной постановкой экспериментальных исследований; сопоставлением теоретических решений с экспериментальными данными; сравнением аналитических решений с результатами численного эксперимента.

Апробация работы. Результаты работы были представлены и обсуждались на Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов Неделя науки СПбГПУ, Санкт-Петербург (2005); на Международной школе-конференции «Актуальные проблемы механики» (Advanced Problems in Mechanics), Санкт-Петербург (2007, 2008, 2009, 2010); на Научно-практическом семинаре «Автоматизация и моделирование технологических процессов в металлургии и машиностроении», Санкт-Петербург (2008); на Международной конференции «Euromech Colloquium 503 Nonlinear normal modes, Dimension reduction and Localization in vibrating systems», Рим, Италия (2009); на городском семинаре по вычислительной и теоретической акустике (руководитель проф. Д.П.Коузов), Санкт-Петербург (2011); на городском семинаре по механике (руководитель чл.-корр. РАН Д.А.Индейцев), Санкт-Петербург (2011).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, 5 из которых в журналах, входящих в перечень ВАК. Вклад автора в публикации, выполненные в соавторстве, состоял в выполнении аналитических исследований и численных расчетов, непосредственном участии в экспериментальных исследованиях. Список основных публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из четырех разделов и заключения. Объем работы составляет 122 страницы, в том числе 24 рисунка. Список литературы содержит 105 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел имеет вводный характер. В нем указана основная тема диссертации, обоснована ее актуальность, дана общая характеристика работы, представлен обзор литературы по теме диссертации, указаны основные положения, выносимые на защиту, изложены постановка и методы исследования.

Второй раздел посвящен исследованию влияния колебательного движения несжимаемой вязкой жидкости на скорость установившегося (стационарного) движения находящейся в ней частицы при различных способах возбуждения вибрации частицы и жидкости. В исследовании используются две разные модели частицы.

В главе 2.1. описывается исследование, проведенное при использовании простейшей двухмассовой модели частицы (пузырька газа), которая представляет собой систему, состоящую из двух масс – «внешней» m и «внутренней» m_1 , связанных упругим элементом c и демпфирующим элементом β (Рис. 1.); в частности m_1 может означать массу закрепившейся на пузырьке минеральной частицы. Размер частицы пренебрежимо мал по сравнению с размерами сосуда, также предполагается, что она располагается далеко от стенок сосуда, так что их влияние на ее движение не учитывается.

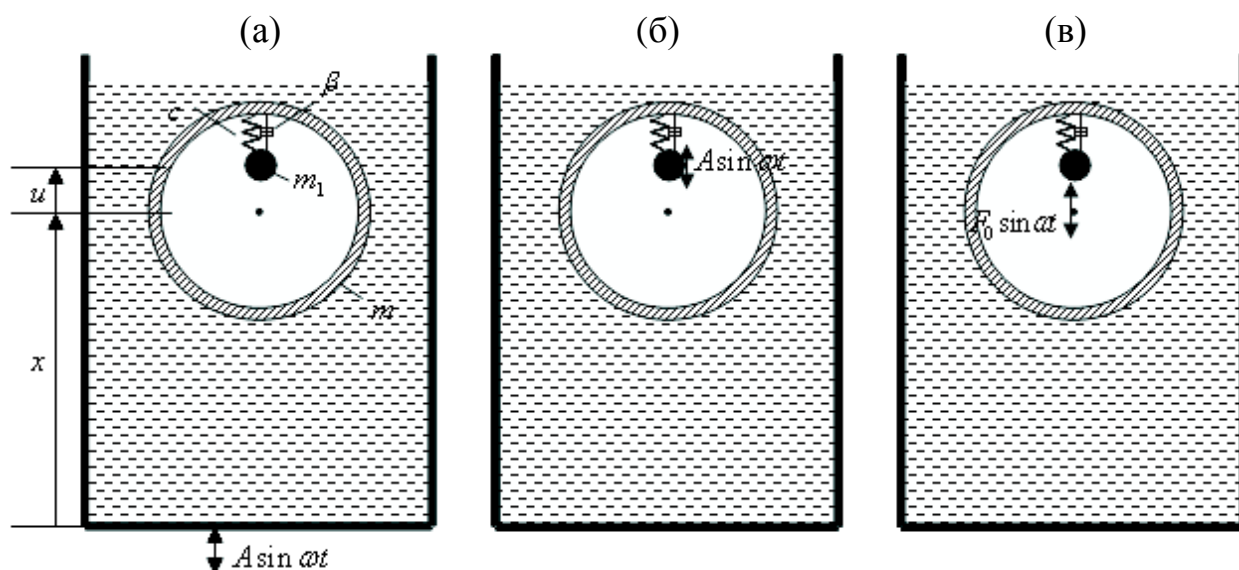


Рисунок 1. Двухмассовая модель частицы

Рассматриваются три различных способа возбуждения вибрации: а) *Заданы колебания сосуда с жидкостью.* Сосуд с жидкостью колеблется с заданной амплитудой A и частотой ω (Рисунок 1.а). б) *Заданы колебания внутренней массы.* Внутренняя масса колеблется с заданной амплитудой A и частотой ω (Рисунок 1.б). в) *Задано периодическое силовое воздействие на внутреннюю массу.* На внутреннюю массу действует гармоническая сила с заданной амплитудой F_0 и частотой ω (Рисунок 1.в).

В настоящей работе движение частиц (как твердых, так и пузырьков) рассматривается в гидравлическом приближении, т.е. как движение в сопротивляющейся среде с учетом присоединенной массы. В соответствии с таким упрощенным подходом уравнения движения частицы в случае а) записываются в виде:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z} + m_0\dot{x}) = -F(\dot{x}) + F_{Ar} + F^* \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{z}_1) = F_1^* \quad (2)$$

Здесь $\dot{z} = \dot{x} + A\omega\cos\omega t$ - абсолютная скорость внешней массы (сосуд колеблется по закону $\alpha = A\sin\omega t$), m_0 - присоединенная масса жидкости, x - координата внешней массы относительно дна сосуда. Жидкость полагается несжимаемой, т.е. колеблющейся однородно вместе с сосудом, поэтому скорость частицы относительно жидкости равна ее скорости относительно сосуда \dot{x} . Через $F(\dot{x})$ обозначена сила сопротивления движению частицы.

$F_{Ar} = \rho_0 V_p (g - A\omega^2 \sin\omega t)$ - «динамическая» сила Архимеда, здесь ρ_0 - плотность жидкости, V_p - объем частицы, g - ускорение свободного падения.

Через $F^* = -mg + cu + \beta\dot{u}$ обозначена сумма внешних сил, помимо реакций жидкости, действующих на внешнюю массу, здесь u - смещение внутренней массы относительно внешней, отсчитываемое от положения ее статического равновесия под действием веса m_1g . $\dot{z}_1 = \dot{x} + \dot{u} + A\omega\cos\omega t$ - абсолютная скорость внутренней массы, $F_1^* = -cu - \beta\dot{u} - m_1g$ - сумма сил действующих на внутреннюю массу. При учете этих соотношений уравнения движения частицы (1),(2) запишутся в виде

$$M\ddot{x} = -F(\dot{x}) + m(1 - \Delta)A\omega^2 \sin\omega t - m(1 - \Delta)g + cu + \beta\dot{u} \quad (3)$$

$$m_1\ddot{u} = -m_1\ddot{x} + m_1A\omega^2 \sin\omega t - cu - \beta\dot{u} - m_1g \quad (4)$$

Здесь $M = m + m_0$, Δ - отношение плотности жидкости ρ_0 к плотности частицы ρ .

Аналогичным образом применяя упрощенный подход для составления уравнения движения частицы в случае б), получаем это уравнение в форме

$$M\ddot{x} = -F(\dot{x}) - m(1 - \Delta)g + cA\sin\omega t + \beta A\omega\cos\omega t \quad (5)$$

В случае в) силового воздействия на внутреннюю массу уравнениями движения частицы являются

$$M\ddot{x} = -F(\dot{x}) - m(1-\Delta)g + cu + \beta\dot{u} \quad (6)$$

$$m_1\ddot{u} = -m_1\ddot{x} + F_0 \sin \omega t - cu - \beta\dot{u} - m_1g \quad (7)$$

Сила сопротивления движению частицы $F(\dot{x})$ в уравнениях (3), (5), (6) считается определяемой соотношением

$$F(\dot{x}) = \rho_0 D^2 \Psi(\text{Re}) \dot{x}^2 \text{sgn} \dot{x} \quad (8)$$

где ρ_0 - плотность жидкости, D - диаметр частицы, а $\Psi(\text{Re})$ - коэффициент сопротивления, зависимость которого от числа Рейнольдса определяется классической диаграммой Рэлея.

В настоящем разделе исследуется установившееся движение частицы, так что в любой момент времени колебательная составляющая ее скорости намного меньше средней составляющей, поэтому использование выражения (8), обычно применяемого при анализе равномерного движения тел в жидкости, является обоснованным.

Исследуя турбулентный режим движения частицы в жидкости при числах Рейнольдса $\text{Re} > 1000$, в соответствии с диаграммой Рэлея полагаем коэффициент сопротивления $\Psi(\text{Re})$ постоянным $\Psi(\text{Re}) \approx 0,2 \equiv \Psi_\infty$.

Применяя метод прямого разделения движений, разыскиваем решения системы уравнений движения частицы в форме

$$x = X(t) + \psi(t, \tau), \quad u = U(t) + \nu(t, \tau) \quad (9)$$

где X и U - “медленные”, а ψ и ν - “быстрые”, 2π - периодические по безразмерному (“быстрому”) времени $\tau = \omega t$ переменные, средние за период по τ значения которых равны нулю:

$$\langle \psi(t, \tau) \rangle = 0, \quad \langle \nu(t, \tau) \rangle = 0, \quad (10)$$

В результате решения уравнений быстрых движений (уравнений для переменных ψ и ν) без учета сил сопротивления, которые полагались малыми, определено выражение для амплитуды B быстрых колебаний частицы в каждом из рассматриваемых случаев. В случае а) имеем:

$$B = -\delta \frac{\omega^2 - \lambda_\Delta^2}{\omega^2 - \lambda_*^2} A, \lambda_*^2 = \frac{c}{m_*}, \lambda_\Delta^2 = \frac{c}{m_\Delta}, \delta = \frac{m(1-\Delta)}{M}, m_* = \frac{Mm_1}{M+m_1}, m_\Delta = \frac{m(1-\Delta)m_1}{m(1-\Delta)+m_1} \quad (11)$$

В случае б):

$$B = \frac{\lambda_\Delta^2}{\omega^2} A, \quad \lambda_\Delta^2 = \frac{c}{M}$$

В случае в):

$$B = -\frac{\lambda_\Delta^2}{\omega^2 - \lambda_*^2} \frac{F_0}{m_1 \omega^2}, \lambda_*^2 = \frac{c}{m_*}, \lambda_\Delta^2 = \frac{c}{M}, m_* = \frac{Mm_1}{M+m_1}$$

Стационарному (установившемуся) движению частицы соответствуют значения $\dot{X} = \dot{X}_* = const$ и $\ddot{U} = 0$. Из уравнений медленных движений частицы для соответствующей скорости получаем выражение, справедливое в каждом из рассматриваемых случаев

$$\dot{X}_* = \pm V_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B\omega}{V_0} \right)^2} \quad (12)$$

где

$$V_0 = \sqrt{\frac{|(m(1-\Delta) + m_1)g|}{\Psi_\infty \rho_0 D^2}} \quad (13)$$

– абсолютная величина средней скорости движения частицы при отсутствии вибрации; знак “–” в выражении (12) соответствует падению частицы, когда $m(1-\Delta) + m_1 > 0$ и $\dot{X}_* < 0$, а знак “+” всплыванию.

Из формул (12) и (13) следует, что скорость установившегося движения вследствие вибрации уменьшается по абсолютной величине, причем это уменьшение особенно существенно при наличии резонансного эффекта, когда амплитуда B возрастает по сравнению с ее нерезонансным значением.

В главе 2.2. проводится обсуждение и проверка полученных результатов для двухмассовой модели частицы. Показано, что основной подход вибрационной механики и метод прямого разделения движений могут быть использованы для анализа рассматриваемой проблемы.

Теоретические результаты были проверены с помощью численного эксперимента, для проведения которого использовалась программа Mathematica 7. Получено хорошее соответствие между аналитическим и численным решениями. Также было проведено сравнение теоретических результатов с доступными данными натуральных экспериментов; они находятся в хорошем согласии друг с другом.

Случай а) колебаний сосуда с жидкостью был рассмотрен также при учете сил сопротивления при решении соответствующих уравнений быстрых движений. В результате получено более точное выражение для амплитуды B быстрых колебаний частицы, конечное при $\omega = \lambda_*$.

Определенный интерес представляет случай кубического закона сопротивления, когда

$$F(\dot{x}) = k\dot{x} + q\dot{x}^3 \quad (14)$$

где k и q – положительные постоянные, при надлежащем выборе которых зависимость (14) хорошо согласуется с классической кривой Рэлея. В случае (а) при таком законе сопротивления скорость установившегося движения частицы при относительно малых q определяется выражением

$$\dot{X}_* \approx -\frac{P_\Delta}{k_v} + \frac{q}{k_v} \left(\frac{P_\Delta}{k_v} \right)^3 \quad (15)$$

где $P_\Delta = (m(1-\Delta) + m_1)g$ – эффективный вес частицы в жидкости,

$k_v = k + \frac{3}{2} q \left(\frac{\omega^2 - \lambda_*^2}{\omega^2 - \lambda_\Delta^2} \right)^2 (\delta A \omega)^2$ – эффективный коэффициент линейной части

сопротивления, всегда больший “обычного” коэффициента k .

В главе 2.3. описывается исследование влияния колебательного движения несжимаемой вязкой жидкости на скорость установившегося движения находящейся в ней частицы (пузырька газа), проведенное при

использовании второй, более сложной континуальной модели частицы (пузырька газа), представленной на Рисунке 2.

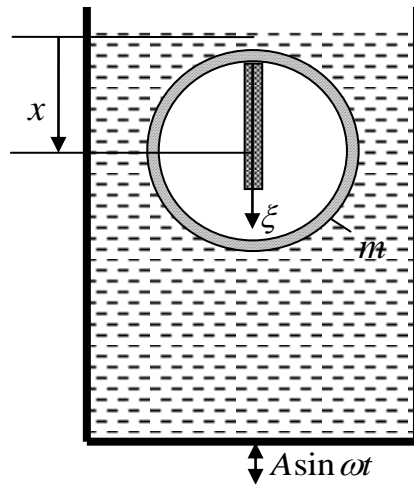


Рисунок 2. Континуальная модель частицы

Континуальная модель, включающая в себя «внешнюю» массу m и упругий стержень, имеет множество резонансных частот, поэтому она больше подходит для описания «сильно» деформируемой частицы (пузырька газа), чем двухмассовая модель.

Рассматривая движение частицы (ее континуальной модели) как движение в сопротивляющейся среде с учетом присоединенной массы, запишем соответствующие уравнения ее движения в виде

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z} + m_0\dot{x}) = -F(\dot{x}) + F_{Ar} + F^* \quad (16)$$

$$-E \frac{\partial^2 z_1}{\partial \xi^2} + \rho \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = q_1 \quad (17)$$

Здесь параметры и переменные в уравнении (16) имеют тот же смысл и определяются теми же соотношениями что и в главе 2.1, кроме суммы

внешних сил $F^* = mg + ES \left. \frac{\partial z_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ (S – площадь поперечного сечения

стержня). $z_1 = z_1(\xi, t)$ – абсолютное смещение поперечного сечения стержня, в невозмущенном состоянии находящегося на расстоянии ξ от его закрепленного верхнего края. E – модуль Юнга материала стержня, ρ – его плотность, $q_1 = \rho g$ – объемная сила действующая на стержень.

Абсолютное смещение сечения $z_1(\xi, t)$ равно сумме его смещения относительно внешней массы $u(\xi, t)$ и абсолютного перемещения этой массы $z(t)$. Таким образом, уравнения движения (16)-(17) записываются в виде

$$M\ddot{x} = -F(\dot{x}) + m(1 - \Delta)A\omega^2 \sin \omega t + m(1 - \Delta)g + ES \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \quad (18)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\rho}{E} \ddot{u} = -\frac{\rho}{E} (\ddot{x} - A\omega^2 \sin \omega t) + \frac{\rho}{E} g \quad (19)$$

Здесь параметры M и Δ имеют те же значения что и в главе 2.1. Граничные условия для упругого стержня имеют вид

$$u|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=l} = 0, \quad (20)$$

где l – длина стержня. Как и в главе 2.1. сила сопротивления движению частицы $F(\dot{x})$ считается определяемой соотношением (8).

Используя метод прямого разделения движений для решения данной задачи, для амплитуды B быстрых колебаний частицы получаем выражение

$$B = -A \frac{\delta \omega \cos \omega d + \eta \sin \omega d}{\omega \cos \omega d + \eta \sin \omega d}, \quad \delta = \frac{m(1-\Delta)}{M}, \quad \eta = \frac{\sqrt{E\rho} S}{M}, \quad d = \sqrt{\frac{\rho}{E}} l \quad (21)$$

Из соответствующих уравнений медленного движения находим, что скорость установившегося движения частицы \dot{X}_* , как и в главе 2.1., дается формулой (12), а абсолютная величина средней скорости движения частицы при отсутствии вибрации V_0 равна

$$V_0 = \sqrt{\frac{|(m(1-\Delta) + \rho S l) g|}{\Psi_\infty \rho_0 D^2}} \quad (22)$$

В главе 2.4. проводится обсуждение и проверка полученных результатов для континуальной модели частицы. Найденные соотношения были проверены с помощью численного эксперимента, для проведения которого использовалась программа Mathematica 7.

Для оценки степени соответствия использованной континуальной модели реальному пузырьку воздуха были сопоставлены спектры их собственных частот. Также было проведено сравнение двухмассовой и континуальной моделей частицы (значений низшей резонансной частоты для двух рассмотренных моделей при эквивалентных значениях параметров).

В третьем разделе теоретически и экспериментально проверяется предположение о том, что эффект погружения пузырька воздуха в вертикально вибрирующем сосуде с жидкостью может иметь место и в отсутствии стоячей волны, т.е. в свободной от других пузырьков однородно колеблющейся несжимаемой вязкой жидкости. Полагается, что погружение пузырька происходит за счет его сжимаемости, поэтому для исследования движения пузырька используется модель, учитывающая пульсации его объема под действием внешнего давления.

В главе 3.1. описывается схема рассматриваемой системы, которая представляет собой пузырек в жидкости, находящейся в сосуде, колеблющемся с амплитудой A и частотой ω по гармоническому закону (Рисунок 3).

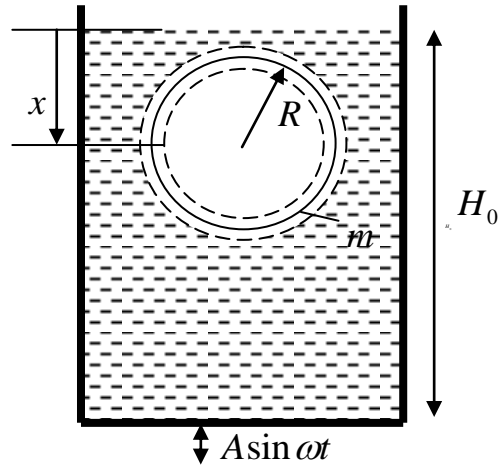


Рисунок 3. Модель пузырька в жидкости

Считаем, что пульсации объема пузырька происходят изотермически и квазистатически. Полагая неравенство $\left(\frac{\rho H_0 (g + A\omega^2)}{P_e}\right)^2 \ll 1$ выполняющимся, здесь P_e - внешнее давление на свободной поверхности жидкости, ρ - плотность жидкости, для объема пузырька получаем выражение

$$V_b = V_{b0} \left(1 - \gamma \frac{x}{H_0} - \gamma \frac{x}{H_0} w \sin \omega t\right) \quad (23)$$

где $\gamma = \frac{\rho H_0 g}{P_e}$ - безразмерный малый параметр, $w = \frac{A\omega^2}{g}$ - коэффициент перегрузки, V_{b0} - объем пузырька вблизи свободной поверхности жидкости. В данном разделе рассматривается случай высокой интенсивности вибрации $w \gg 1$.

В главе 3.2. при использовании упрощенного подхода выводится уравнение поступательного движения пузырька в жидкости

$$(m + m_0)\ddot{x} + \dot{m}_0 \dot{x} = -F(\dot{x}) + (m - \rho V_b)(A\omega^2 \sin \omega t + g) \quad (24)$$

Присутствие слагаемого $\dot{m}_0 \dot{x}$ обусловлено тем, что присоединенная масса жидкости, определяемая выражением $m_0 = \chi V_b \rho$, где χ - соответствующий коэффициент, не является постоянной величиной, т.к. зависит от переменного объема пузырька (23). Сила сопротивления $F(\dot{x})$ считается определяемой соотношением аналогичным (8):

$$F(\dot{x}) = 4\rho R^2 \Psi(\text{Re}) \dot{x}^2 \text{sgn} \dot{x} \quad (25)$$

В данной задаче (в отличие от рассмотренных в разделе 2) скорость пузырька \dot{x} значительно изменяется в течение периода колебаний, так как $w \gg 1$. Формула (25), полученная эмпирически для равномерного движения тела в жидкости, часто используется и в случае сильно переменной скорости \dot{x} (так называемая гипотеза стационарности); иногда (в случае больших значений Re) при этом добавляется линейное слагаемое. Поэтому ее применение является правомерным и в рассматриваемом случае.

В главе 3.3 проводится решение задачи методом прямого разделения движений. Полагаем, что здесь выполняется условие $|\dot{\psi}| \gg |\dot{X}|$, т.е. «быстрая» компонента скорости пузырька много раз больше «медленной». Учитывая силы сопротивления, находим решение соответствующего уравнения быстрых движений. Используя это решение, составляем уравнение медленных движений пузырька, исходя из вида которого определяем условие его погружения в жидкости. При $m \ll \rho V_{b0}$ это условие записывается в виде

$$\gamma \cdot w^2 \frac{X}{H_0} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\theta \frac{A^2}{R_0^2}}{2 \left(1 + \sqrt{1 + \theta \frac{A^2}{R_0^2}} \right) + \theta \frac{A^2}{R_0^2}} \right) > 1, \quad (26)$$

где коэффициент $\theta = \frac{16^2}{\pi^4} \frac{\Psi_\infty^2}{\chi^4} \equiv 1.68$, $R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V_{b0}}$ - радиус пузырька вблизи свободной поверхности жидкости.

В неравенстве (26) в левой части содержится «медленная» переменная X , т.е. выполнение условия погружения пузырька в жидкости зависит от его текущего расположения в сосуде. Если пузырек находится в положении, которому соответствует координата $X > X_0$, то он будет погружаться, а если в $X < X_0$ - то всплывать. Погружение начинается только с определенной глубины X_0 , значение которой определяется выражением

$$X_0 = \frac{2H_0}{\gamma \cdot w^2} \cdot \frac{2 \left(1 + \sqrt{1 + \theta \frac{A^2}{R_0^2}} \right) + \theta \frac{A^2}{R_0^2}}{2 \left(1 + \sqrt{1 + \theta \frac{A^2}{R_0^2}} \right) + \frac{\theta A^2}{3 R_0^2}}, \quad (27)$$

Согласно (27) значение величины X_0/H_0 зависит от двух параметров: $w_* = \gamma \cdot w^2$ - характерного параметра перегрузки и $\eta = A/R_0$ - отношения амплитуды внешнего воздействия к радиусу пузырька. Графики зависимостей w_* от η , соответствующие разным значениям X_0/H_0 , т.е. разным глубинам, с которых начинается погружение пузырьков, представлены на рисунке 4.

Согласно проведенному исследованию, погружение пузырька обусловлено пульсациями его объема под действием переменного давления, т.е. его сжимаемостью, и происходит за счет действия «динамической» силы Архимеда на него. В главе 3.4. предлагается простое физическое объяснение данного эффекта.

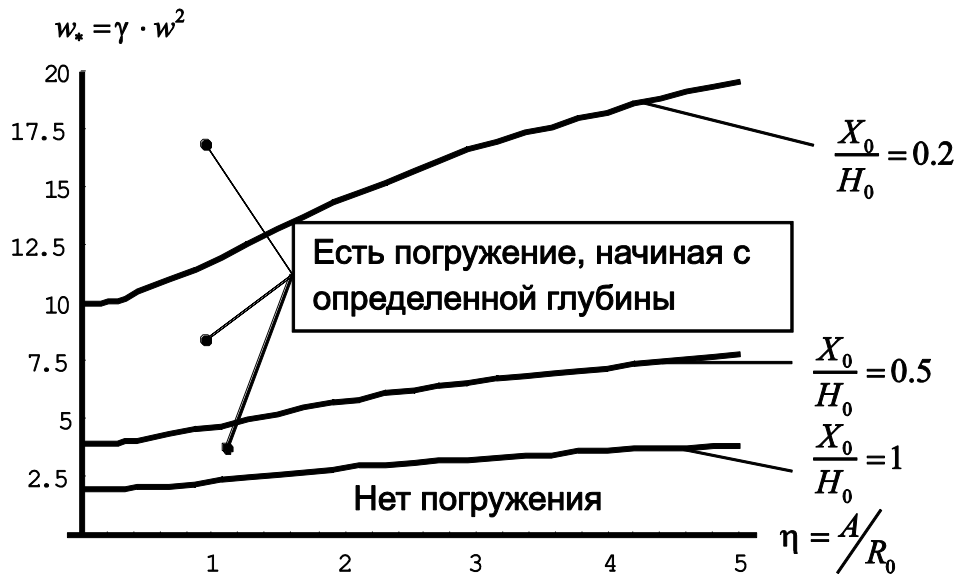


Рисунок 4. Зависимости w_* от η , соответствующие разным глубинам X_0 , с которых начинается погружение пузырьков

В главе 3.5. проводится решение уравнения медленного движения пузырька. Считая ускорение \ddot{X} малым и полагая $m \ll \rho V_{b0}$, для скорости его медленного движения получаем выражение

$$\dot{X} \approx v(X/X_0 - 1), \quad (28)$$

где $v = \frac{\pi^2}{12 \cdot \Psi_\infty} \frac{R_0 g}{B \omega}$ - модуль медленной скорости всплывания несжимаемого пузырька, а X_0 дается соотношением (27).

Глава 3.6. посвящена обсуждению теоретических результатов. Проводится проверка использованных предположений о характере движения пузырька – условия квазистатичности изменений его объема, и предположения о малости абсолютного значения медленной скорости пузырька $|\dot{X}|$ по сравнению с амплитудой скорости его быстрых колебаний $B\omega$. Показано, что сжимаемость пузырька оказывает слабое влияние на его движение при выполнении соотношения $H_0/X_0 \ll 1$, по сути, в этом случае пузырек можно считать твердым. Отмечено, что влияние сжимаемости более существенно для крупных по сравнению с амплитудой внешнего воздействия пузырьков, чем для мелких.

В главе 3.7. проведено сравнение аналитических результатов с результатами численного эксперимента. Имеет место полное соответствие между ними, и теоретические предположения о характере движения пузырька выполняются, т.е. пузырьки, находящиеся в положениях $X > X_0$, падают в жидкости, а в положениях $X < X_0$ - всплывают.

Для проверки полученных аналитически результатов была выполнена серия экспериментов, описание которых проводится в главе 3.8. Сосуд, почти доверху наполненный водой (высота слоя воздуха 1-2 мм) и закрытый пластмассовой крышкой (для предотвращения образования

турбулизированного поверхностного слоя), закреплялся на универсальном вибрационном стенде. Ко дну сосуда на нитке прикреплялся легко деформируемый резиновый шарик, наполненный воздухом (Рисунок 5.а). Масса резины была пренебрежимо мала по сравнению с массой воды в объеме шарика, влиянием силы натяжения резины на давление внутри шарика также можно пренебречь. Сосуду сообщались вертикальные гармонические колебания.

Эксперимент проводился с шариками разных диаметров и при различных длинах нити, т.е. начальных расстояниях от дна сосуда. Амплитуда внешнего возбуждения была фиксирована и равна 4,3 мм. Частота внешнего возбуждения увеличивалась от 0 до 1900 кол/мин (≈ 200 рад/с). В каждом из опытов было получено, что при достижении определенного значения частоты внешнего возбуждения ω_* шарик резко падал ко дну сосуда (Рисунок 5.б), где и оставался при ее дальнейшем увеличении. При уменьшении частоты шарик всплывал, т.е. возвращался в свое первоначальное положение. Было получено, что уменьшение начального расстояния от дна сосуда до шарика (длины нити), и увеличение размера шарика приводят к уменьшению значения частоты ω_* . Для проверки предположения о том, что эффект погружения пузырька связан с изменениями его объема под действием вибрации, был проведен эксперимент с недеформируемым твердым шариком, плотность которого была много меньше плотности воды. Эффект погружения в этом случае не был зафиксирован.

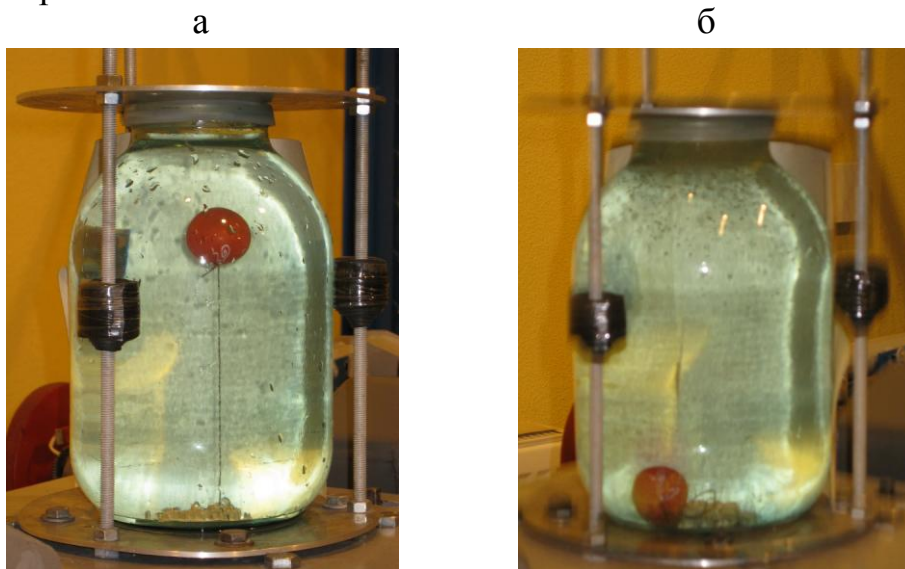


Рисунок 5. Погружение модели пузырька воздуха

Для всех проведенных экспериментов значения частоты ω_* почти совпадали с соответствующими значениями, полученными аналитически. Таким образом, теоретический вывод о существовании эффекта погружения пузырька воздуха в однородно колеблющейся вязкой жидкости был полностью подтвержден экспериментально.

В главе 3.9. модель пузырька, учитывающая пульсации его объема под действием переменного давления, используется для анализа его установившегося движения. Соответствующие результаты находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными в разделе 2.

Четвертый раздел работы посвящен совместному рассмотрению «волнового» и «вибрационного» механизмов погружения пузырька. Исследуется его движение в вертикально колеблющемся сосуде с вязкой жидкостью при учете сжимаемостей самого пузырька и газонасыщенного слоя, образующегося вследствие турбулизации жидкости вблизи ее свободной поверхности. Некоторые упрощающие предположения, введенные в предшествующих исследованиях этих механизмов, здесь не используются.

В главе 4.1. выводится уравнение поступательного движения пузырька в сжимаемой вязкой среде (газонасыщенном слое вязкой жидкости). Модель системы представлена на рисунке 6.

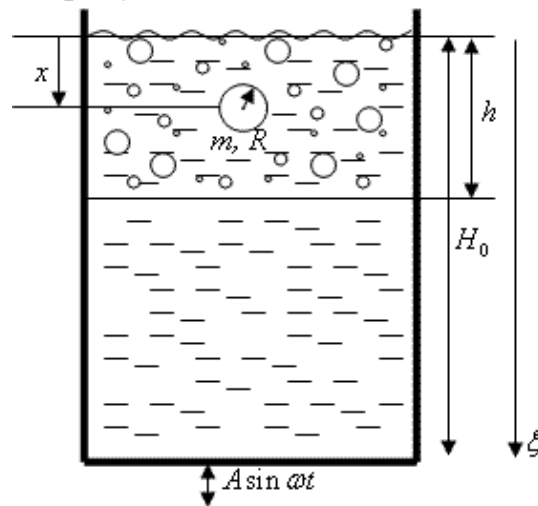


Рисунок 6. Модель пузырька в газонасыщенной жидкости

Предполагается, что жидкость насыщена газом на некоторую глубину $h \leq H_0$ и может рассматриваться как упругий стержень; остальная часть жидкости колеблется как твердое тело вместе с сосудом. Через $\xi(x, t)$ обозначено абсолютное смещение сечения данного стержня, в невозмущенном состоянии находящегося на расстоянии x от его свободного (верхнего) края. При граничных условиях $\xi'|_{x=0} = 0$, $\xi|_{x=h} = A \sin \omega t$ для $\xi(x, t)$ получаем выражение

$$\xi = \frac{g}{2c^2}(h^2 - x^2) + A \left(\cos \frac{\omega x}{c} / \cos \frac{\omega h}{c} \right) \sin \omega t \quad (29)$$

здесь c - скорость звука в насыщенной газом жидкости.

В соответствии с упрощенным подходом уравнение движения пузырька в газонасыщенной жидкости записывается в виде

$$m\ddot{z} + \frac{d(m_0 v_{rel})}{dt} = -F(v_{rel}) + mg + F_{Ar} \quad (30)$$

Здесь v_{rel} - скорость пузырька относительно среды (газонасыщенной жидкости), остальные параметры имеют тот же смысл, что и в разделе 3.

Считая рассматриваемый пузырек малым (выполняется соотношение $\omega R/c \ll 1$, R - радиус пузырька) и учитывая выражение $v_{rel} = \dot{x} + \dot{\alpha} - \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t)$,

получаем уравнение движения пузырька в виде

$$m\ddot{x} + \frac{d(m_0\dot{x})}{dt} = -F(v_{rel}) + (m - \rho V_b)g + \rho V_b \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) - m\ddot{\alpha} - \frac{d}{dt} \left(m_0 \left(\dot{\alpha} - \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) \right) \right) \quad (31)$$

В данном разделе сила сопротивления движению пузырька полагается линеаризованной по скорости: $F(v_{rel}) = k_1 R^2 v_{rel}$, здесь k_1 - безразмерный коэффициент сопротивления.

Пренебрегая силами поверхностного натяжения и полагая, что колебания объема пузырька являются малыми и происходят изотермически, для их определения в главе 4.2. получаем следующее уравнение

$$\rho R_0 \frac{d^2 \Delta R}{dt^2} + 3 \frac{\Delta R}{R_0} P_e = -\rho x g - \rho A \omega^2 f(x) \sin \omega t \quad (32)$$

Здесь $f(x) = \frac{c}{\omega} \sin \frac{\omega x}{c} / \cos \frac{\omega h}{c}$, $\Delta R = R - R_0$.

При решении уравнения (32), вследствие выполнения соотношения $c/A\omega \gg 1$, можно считать, что x является параметром; в результате для объема пузырька получаем выражение

$$V_b = V_{b0} \left(1 - \frac{\rho}{P_e} \left(xg + A\omega^2 f(x) \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t \right) \right) \quad (33)$$

Здесь $\lambda = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{3P_e}{\rho}}$ - частота собственных радиальных колебаний пузырька.

В главе 4.3. проводится решение данной задачи методом прямого разделения движений. Получено уравнение медленных движений пузырька, из которого видно, что вибрационная сила, действующая на пузырек в газонасыщенном слое вязкой жидкости, имеет две составляющие, первая из которых обусловлена сжимаемостью пузырька, а вторая - сжимаемостью среды. На основе этого уравнения определено условие погружения пузырька в слое жидкости, насыщенном газом, которое при $m \ll \rho V_{b0}$ принимает вид

$$\frac{A^2 \omega^4}{2g} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\omega^2}{\eta^2 + \omega^2} \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) f'(X) - 1 \right) + \frac{\rho}{P_e} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \frac{\omega^2 + \frac{1}{3}\eta^2}{\eta^2 + \omega^2} f'(X) \right] f(X) > 1 \quad (34)$$

здесь $\eta = \frac{k_1 R_0^2}{m + \chi \rho V_{b0}}$. Для рассматриваемых в данном разделе мелких

пузырьков отношение $(\lambda^2 - \omega^2)/\lambda^2$ можно считать равным единице ($\lambda^2 \gg \omega^2$). В случае больших чисел Рейнольдса $Re > 1000$, учитывая, что $|v_{rel}|$ - величина порядка $A\omega$, коэффициент сопротивления k_1 в соответствии с формулой (25) и диаграммой Рэлея можно считать равным $k_2 \rho A \omega$, где k_2 - безразмерная величина порядка единицы.

Для упрощения анализа условия (34), полагая $c \rightarrow \infty$, получим из него условие погружения пузырька в несжимаемой вязкой жидкости

$$w_* \frac{1 + \frac{1}{3}a}{a+1} \frac{X}{H_0} > 1 \quad (35)$$

здесь $\theta = \frac{3k_2}{4\pi\chi}$, $a = \left(\theta \frac{A}{R_0}\right)^2$, параметр w_* имеет тот же смысл, что и в разделе 3.

Неравенство (35) полностью соответствует условию погружения (26). Выявим, как сжимаемость среды влияет на условия возникновения эффекта погружения пузырька; запишем неравенство (34) в форме

$$w_* \frac{1 + \frac{1}{3}a}{a+1} \frac{X}{H_0} \cdot \zeta \cdot \gamma > 1 \quad (36)$$

где $\zeta = 1 + \frac{P_e}{\rho c^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}a} \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) - \frac{1+a}{1 + \frac{1}{3}a} \frac{\cos \frac{\omega h}{c}}{\cos \frac{\omega X}{c}} \right)$ и $\gamma = \frac{c}{2\omega X} \frac{\sin 2 \frac{\omega X}{c}}{\left(\cos \frac{\omega h}{c} \right)^2}$.

При реальных значениях остальных параметров, влияние сжимаемости среды на условие погружения пузырька, отражаемое параметром ζ , оказывается существенным только при малых значениях скорости звука в среде $c < 40$ м/с и в этом диапазоне сильно зависит от отношения амплитуды внешнего воздействия к радиусу пузырька A/R_0 . При малых значениях толщины газонасыщенного слоя $h < 5$ см влияние сжимаемости среды на условие погружения пузырька отражаемое параметром γ является незначительным. В то же время, при значениях $h \geq 15$ см и скорости звука в среде $c < 25$ м/с это влияние является определяющим.

Если на границе фронта распространения газожидкостной фазы $X = h$ выполняется неравенство (34), то образовавшиеся в слое толщиной h , пузырьки будут двигаться вглубь жидкости, а значит, насыщенный газом слой жидкости будет увеличиваться. Таким образом, используя полученное условие погружения пузырька (34), определено условие вибрационной неустойчивости раздельного состояния системы газ-жидкость.

Из уравнения медленных движений пузырька, при учете малости ускорения \ddot{X} определено приближенное выражение для скорости его медленного движения в газонасыщенном слое вязкой жидкости. Скорость распространения этого слоя вглубь сосуда равна скорости погружения пузырька, находящегося на его границе $X = h$.

В главе 4.4. проводится обсуждение теоретических результатов. Проверяются использованные в анализе предположения, в частности предположение о малости пульсаций объема пузырька. Также определяются области параметров, в которых влияние одной из сжимаемостей (пузырька или среды) существенно сильнее влияния другой.

Глава 4.5. посвящена описанию численного эксперимента, проведенного для проверки аналитических результатов. Исходные уравнения движения пузырька были проинтегрированы с помощью программы

Mathematica 7, полученные результаты находятся в хорошем согласии с аналитическим решением.

С целью исследования «волновой» составляющей силы, обусловленной сжимаемостью среды, была выполнена серия экспериментов, описание которых проводится в главе 4.6. Открытый цилиндрический сосуд наполнялся водой и закреплялся на стенде. Ко дну сосуда на нитке прикреплялся недеформируемый при данных условиях шарик, масса которого была пренебрежимо мала по сравнению с массой воды в его объеме (Рисунок 7.а). Сосуду сообщались вертикальные гармонические колебания. Под действием вибрации вблизи поверхности жидкости возникал, постепенно нарастая с увеличением частоты, слой, насыщенный пузырьками различного размера. При достижении определенного значения частоты внешнего возбуждения начиналось погружение пузырьков из этого слоя вглубь сосуда. В результате, в сосуде образовывалась сжимаемая газожидкостная смесь. При достижении определенных значений частоты внешнего возбуждения ω_* и газосодержания жидкости α_{g*} шарик резко падал ко дну сосуда (Рисунок 7.б).

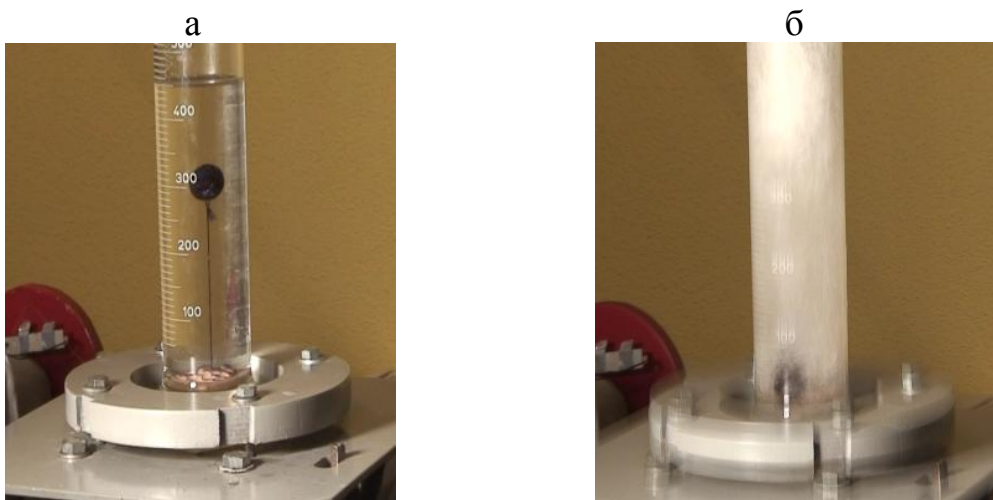


Рисунок 7. Погружение легкого твердого шарика

При уменьшении газосодержания жидкости шарик всплывал, т.е. возвращался в свое первоначальное положение. Таким образом, вывод о существовании волновой силы в сжимаемой вязкой среде был подтвержден экспериментально. Показано, что при определенных значениях параметров внешнего возбуждения эта сила может привести к погружению несжимаемой легкой частицы.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

- а) Получены относительно простые формулы для скорости установившегося движения твердой и деформируемой частицы

- (пузырька воздуха) в вязкой несжимаемой жидкости в различных условиях возбуждения вибрации частицы и жидкости.
- б) Показано, что скорость установившегося движения частицы в случае, когда сопротивление носит нелинейный характер, что имеет место при турбулентном обтекании, уменьшается вследствие пульсаций жидкости. Это уменьшение может быть особенно значительным для деформируемой частицы, например, пузырька воздуха, при наличии резонансных эффектов, то есть близости частоты вибрации к частоте свободных колебаний частицы.
 - в) Теоретически исследован и экспериментально подтвержден эффект погружения свободного и несущего твердые частицы («оснащенного») пузырька воздуха в однородно колеблющуюся несжимаемую вязкую жидкость. Получены условия, при которых этот эффект имеет место. Погружение пузырька в этом случае происходит за счет его сжимаемости под действием быстропеременного давления, возникающего при колебаниях и пропорционального массе выше расположенного столба жидкости.
 - г) Найдено приближенное выражение для средней скорости погружения или всплывания пузырька в несжимаемой вязкой жидкости, существенно зависящее от глубины его погружения и от параметров вибрации.
 - д) Установлено, что эффект погружения пузырьков в однородно колеблющейся вязкой жидкости существенно зависит от двух безразмерных параметров: характерного параметра перегрузки и отношения амплитуды внешнего воздействия к радиусу пузырька. Эти параметры характеризуют степень сжимаемости пузырька в процессе движения.
 - е) Рассмотрено движение пузырька воздуха в колеблющемся сосуде с вязкой жидкостью при совместном учете сжимаемостей пузырька и газонасыщенного слоя, образующегося вследствие турбулизации жидкости вблизи ее свободной поверхности. Получено нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение пузырька относительно сосуда в этом случае.
 - ж) Найдены условия, при которых пузырек будет погружаться в насыщенный газом слое вязкой жидкости. Получено выражение для критической толщины этого слоя, при превышении которой он начинает распространяться вглубь сосуда, т.е. условие вибрационной неустойчивости раздельного состояния системы газ-жидкость.
 - з) Получено приближенное выражение для средней скорости движения пузырька в газонасыщенном слое вязкой жидкости, существенно зависящее от глубины его погружения и от параметров вибрации, а также выражение для средней скорости распространения этого слоя вглубь сосуда.
 - и) Показано, что вибрационная сила, действующая на пузырек в колеблющейся газонасыщенной жидкости, имеет две составляющие,

первая из которых обусловлена сжимаемостью пузырька, а вторая – сжимаемостью окружающей его среды.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Блехман И.И., Сорокин В.С. Движение частицы и пузырька газа в колеблющейся жидкости // Обогащение руд, 2007, №3, с.20-23.
2. Блехман И.И., Сорокин В.С. Движение деформируемой частицы в колеблющейся среде: математическая модель // сборник Научно-практического семинара "Автоматизация и моделирование технологических процессов в металлургии и машиностроении", СПб., Ленэкспо, 10-14 марта 2008: сб. трудов
3. Sorokin V.S. Motion of a deformable particle in an oscillating medium: continuous model // Proceedings of the XXXVI Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", 6-10 July, 2008, St.-Petersburg (Repino), P. 621-628, Russia.
4. Sorokin V.S., Blekhman I.I. Motion of a body with variable volume (a gas bubble) in an oscillating fluid // Proceedings of the XXXVII Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", 30 June – 5 July, 2009, St.-Petersburg (Repino), P. 633-642, Russia.
5. Sorokin V.S., Blekhman I.I., Thomsen J.J. Motions of elastic solids in fluids under vibration // Nonlinear Dynamics, Vol. 60, N 4, pp. 639-650, 2010
6. Blekhman I.I., Sorokin V.S. On the separation of fast and slow motions in mechanical systems with high-frequency modulation of the dissipation coefficient // Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, Issue 23, pp. 4936-4949, 2010
7. Sorokin V.S., Blekhman I.I., V.B.Vasilkov, Motion of an elastic body in fluid under vibration // Proceedings of the XXXVIII Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics-2010", 1 – 5 July, 2010, St.-Petersburg (Repino), P. 665-674, Russia
8. Блехман И.И., Васильков В.Б., Сорокин В.С., Движение пузырька газа в колеблющейся жидкости // Обогащение руд, 2010, №4, с.13-20.
9. Sorokin V.S., Blekhman I.I., Vasilkov V.B. Motion of a gas bubble in fluid under vibration // Nonlinear Dynamics, DOI 10.1007/s 11071-011-9966-9, 2011

Подписано в печать 26.04.2011.
Тираж 90 экземпляров