

На правах рукописи

ЖУЧКОВА Марина Геннадьевна

**РАССЕЯНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН
НА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ В
ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ**

01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2010

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном морском техническом университете на кафедре прикладной математики и математического моделирования.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Коузов Даниил Петрович

Официальные оппоненты:
д.ф.-м.н., профессор Киселев Алексей Прохорович
д.ф.-м.н., доцент Мотыгин Олег Валерьевич

Ведущая организация:
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Защита состоится «_____» _____ 2010 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 в Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., 61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем машиноведения РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

В.В. Дубаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Тема диссертации, прежде всего, связана с задачами проектирования и эксплуатации гигантских плавучих сооружений, таких как морские платформы различного назначения, искусственные острова на плавающем основании, плавучие взлетно-посадочные полосы. Традиционной моделью гигантского плавучего сооружения (понтонного типа) является плавающая, тонкая упругая пластина или система соединенных пластин. Значительная поперечная деформация, обусловленная внешним воздействием волн на конструкцию, может затруднить или даже сделать невозможным ее эксплуатацию. Уменьшить амплитуды прогибов призваны опоры и подкрепления конструкции. Они также могут выполнять функцию удерживающей якорной системы. В этой связи, математическое моделирование волновых процессов, развивающихся в подкрепленных плавающих упругих пластинах, представляется весьма актуальной задачей.

Другое, естественное и традиционное приложение задач о колебаниях плавающей на поверхности жидкости пластины – это изучение волновых процессов в ледовых полях. На протяжении уже многих десятков лет ученые и инженеры используют плавающую, тонкую упругую пластину для моделирования ледового покрова морей и океанов. Как известно, ледовый покров водных бассейнов сильно неоднороден в горизонтальных направлениях. Характерными примерами неоднородностей являются трещины и гряды торосов. Поэтому значительный практический интерес представляет анализ влияния неоднородностей на колебания ледового покрова.

Количество работ, посвященных рассмотрению волновых процессов в упругих пластинах, плавающих на поверхности несжимаемой жидкости, исключительно велико. Первые рассмотрения принадлежат, по-видимому, В.Н. Красильникову. Он изучал отражательные способности различных прямолинейных неоднородностей в ледовых полях (трещин, спаев, мест налегания льдин одна на другую и др.). Был выделен новый класс краевых задач математической физики – гранично-контактных. В дальнейшем подход, предложенный В.Н. Красильниковым, (обычно в сочетании с процедурой Винера–Хопфа) неоднократно использовался другими авторами. Например, работы по получению и исследованию точных аналитических решений гранично-контактных задач гидродинамики принадлежат В.В. Варламову, С.А. Габову, А.Г. Свешникову, А.К. Шатову, Д.П. Коузову, Р.В. Гольдштейну, А.В. Марченко и др. В диссертации также используется данный подход, основанный на сведении рассматриваемых задач к гранично-контактным.

В настоящее время ведущим российским научным центром по изучению гидроупругого поведения плавающих пластин является институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (г. Новосибирск). Исследования проводятся в лаборатории гидроаэроупругости учеными А.А. Коробкиным, И.В. Стуровой, Л.А. Ткачевой и Т.И. Хабахпашевой. Круг рассмотренных ими задач очень широкий. Например, были предложены способы уменьшения прогибов упругих колебаний плавающей пластины. Один из них заключается в присоединении к основной пластине дополнительной жесткой пластины меньшего размера, выполняющей роль вибропоглотителя. Другой метод состоит в упругом соединении кромок пластины с дном при помощи связующих пружин. Было показано, что подбором жесткости пружин можно добиться существенного снижения амплитуд колебаний основной части пластины. Также рассматривалась задача о гидроупругих колебаниях пластины с прямолинейной трещиной. Трещина моделировалась линейной пружиной соответствующей жесткости, зависящей от упругих параметров пластины и глубины трещины.

Среди многочисленных исследований зарубежных авторов, посвященных данной тематике, следует выделить работы D.V. Evans, R. Porter и M.H. Meulan. D.V. Evans и R. Porter получили точное аналитическое решение задачи о рассеянии наклонной изгибно-гравитационной волны на одной и нескольких параллельных прямолинейных трещинах в упругой безграничной пластине. Они же изучали дифракцию изгибно-гравитационной волны на нескольких трещинах, имеющих конечную длину. D.V. Evans и M.H. Meulan исследовали рассеяние изгибно-гравитационной волны на нескольких точечных закреплениях плавающей пластины.

Постановка научной задачи. Диссертация посвящена исследованию периодических волновых процессов в тонкой упругой пластине, плавающей на поверхности несжимаемой жидкости. Пластина целиком покрывает свободную поверхность жидкости и совершает изгибные колебания, сопутствующие гравитационным волнам. Режим свободных колебаний пластины нарушен вдоль некоторой прямой или набора параллельных прямых. В качестве сосредоточенного нарушения режима колебаний можно рассматривать как наличие всевозможных внешних элементов конструкции (опор, подкреплений), так и дефект механических свойств самой пластины (трещина, шарнирное соединение двух пластин с идентичными свойствами).

Предполагается, что подводная часть опор и подкреплений не оказывает существенного влияния на движение жидкости. Подобные конструкции можно представить себе, например, в виде жестких реше-

ток, шаг и толщина которых достаточно малы, чтобы с одной стороны представлять их в виде закреплений вдоль некоторой линии, а с другой стороны не вносить существенных изменений в движение протекающей через решетку жидкости.

Жидкость считается однородной, идеальной и несжимаемой, ее глубина – конечной. Помимо основной ситуации с заданной конечной глубиной водоема рассматриваются также предельные возможности: бесконечно глубокий водоем и случай малой глубины водоема, когда применим некоторый приближенный подход «теории мелкой воды».

В жидкости рассматриваются поверхностные гравитационные волны малой амплитуды. Такие волны характеризуются тем, что их высоты значительно меньше их длины. Это предположение удовлетворительно согласуется, в частности, с натурными наблюдениями ветровых волн в море. Отношение высоты таких волн к их длине для широкого спектра ветровых нагрузок приблизительно располагается в интервале от $\frac{1}{18}$ до $\frac{1}{22}$.

Используется модель тонкой упругой пластины. Основные предположения, при которых она применима, состоят в малости амплитуды волны по сравнению с ее длиной, в малости толщины пластины по сравнению с радиусом кривизны при ее деформации, в малости вязких, релаксационных и пластических свойств материала пластины. Все эти приближения выполняются и соответствуют типичным параметрам поверхностных волн в морях и свойствам как природных (ледовый покров), так и техногенных (гигантские плавучие сооружения) моделей такого рода.

Цель работы состоит в изучении прохождения и отражения изгибно-гравитационной волны, набегающей под прямым углом на неоднородности, сосредоточенные вдоль одной прямой или набора параллельных прямых, в плавающей тонкой упругой пластине.

Научные задачи диссертации

1. Нахождение точных аналитических представлений волновых полей в пластине и в жидкости.
2. Определение коэффициентов прохождения и отражения набегающей изгибно-гравитационной волны.
3. Нахождение точных аналитических решений в приближениях мелкой и бесконечно глубокой воды.
4. Создание пакета программ, позволяющих по полученным точным формулам проводить численное исследование волновых процессов в жидкости и в пластине, численно оценивать прохождение и отражение набегающей изгибно-гравитационной волны.

5. Оценка степени пригодности найденных приближений на основании численного сравнения с точным решением, полученным для конечной глубины водоема, в случае одного и двух прямолинейных препятствий.

В большинстве работ, упомянутых выше и посвященных данному кругу задач, их авторы разрабатывали численные и приближенные методы решения. Если же удавалось получать точные решения, то путь их нахождения зачастую оказывался излишне сложным и опирался на частные свойства задачи. Однако возможен другой, более общий подход, приводящий к точному аналитическому решению с помощью простой стандартной процедуры. Этот подход используется в данном диссертационном исследовании.

Методика исследования. Метод нахождения точного решения был разработан научным руководителем автора диссертации Д.П. Коузовым в 1963–1964 годах для решения задач акустики. Впервые подход был изложен Д.П. Коузовым в публикации¹, посвященной точному решению плоской задачи об акустическом и вибрационном поле бесконечной пластины, упругие свойства которой нарушены вдоль некоторого набора параллельных прямых.

Суть метода состоит в следующем. Сосредоточенный дефект пластины задается с помощью граничного равенства, в правой части которого содержится линейная комбинация δ -функции и ее производных. Оно аналогично граничному равенству, которое имело бы место при наличии активного сосредоточенного источника, приложенного к бесконечной однородной пластине. Таким образом, сосредоточенный дефект пластины выступает в качестве «пассивного источника» дифракционного поля. «Пассивность» означает, что данный объект не генерирует энергию, но является причиной переизлучения падающего поля.

Наивысший возможный порядок производной δ -функции в граничном условии ограничен известным в теории дифракции условием Майкскнера. Оно обеспечивает единственность решения, устраняя возможность появления фиктивного источника поля в среде, в точках различных нарушений свойств границы (угловых точках границы, точках скачка импеданса границы и т.п.). Д.П. Коузовым было показано, что при использовании традиционного уравнения изгибных колебаний тонкой пластины наивысший возможный порядок производной δ -функции равен трем.

Константы, входящие в линейную комбинацию, заранее неизвестны. Они определяются на основании гранично-контактных условий,

¹Коузов Д.П. О явлении резонанса при дифракции гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 3. С. 409–417.

задающих механический режим на кромках пластин, в местах их стыковки друг с другом или скрепления с опорными или другими конструктивными элементами. Этим условиям должно удовлетворять искомое полное поле, представляющее собой сумму поверхностной волны, набегающей на сосредоточенный дефект, и рассеянного поля. Удовлетворение гранично-контактным условиям порождает неоднородную систему уравнений для нахождения неизвестных констант. Коэффициенты этой системы могут содержать расходящиеся интегралы или ряды, регуляризация которых представляет характерный этап решения задачи.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Точное аналитическое решение двумерной гранично-контактной задачи о рассеянии изгибно-гравитационных волн на одиночном препятствии, сосредоточенном вдоль некоторой прямой в плавающей упругой пластине.
2. Точное аналитическое решение двумерной гранично-контактной задачи о рассеянии изгибно-гравитационных волн на нескольких препятствиях, сосредоточенных вдоль m параллельных прямых в плавающей упругой пластине.
3. Аналитические представления для изгибного поля в пластине и волнового поля в жидкости.
4. Аналитические выражения для коэффициентов прохождения и отражения набегающей изгибно-гравитационной волны.
5. Точные аналитические решения в приближениях мелкой и бесконечно глубокой воды.

Все результаты диссертации, выносимые на защиту, являются **новыми**.

Достоверность результатов обеспечивается

- корректным использованием уравнений механики деформируемого твердого тела и гидродинамики,
- использованием строгого математического аппарата для решения поставленной гранично-контактной задачи,
- корректностью аналитических выкладок, проверенных с помощью программных средств для символьных вычислений,
- применением отлаженных, хорошо зарекомендовавших себя численных методов при изучении полученного точного решения,
- тестированием численных результатов с помощью контрольного тождества в виде баланса потоков энергии в системе, вытекающего из закона сохранения энергии.

Практическая и теоретическая ценность. Практическую ценность представляют результаты исследования пропускных способностей различных прямолинейных препятствий в плавающих пластинах. Полученные результаты могут быть полезными, например, при проектировании гигантских плавучих сооружений. Созданный в ходе работы пакет прикладных программ позволяет численно (по полученным точным формулам) исследовать прохождение набегающей изгибно-гравитационной волны через произвольное количество прямолинейных препятствий различных типов. С его помощью можно рассчитать коэффициенты прохождения и отражения падающей волны, прогиб пластины, внутренние усилия, развиваемые в каждом закреплении пластины. С теоретической точки зрения ценность представляют найденные точные аналитические решения. Теоретическую и практическую ценность представляют также оценки степени пригодности приближенных теорий мелкой воды и бесконечно глубокого бассейна.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на XXVII летней школе «Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems» (С.-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 1999 г.); на XXIX летней школе «Advanced problems in mechanics» (С.-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 2001 г.); на международной конференции по морским интеллектуальным технологиям «Моринтех» (С.-Петербург, 2001 г.); на международной конференции «SubSeaTECH-2009» (С.-Петербург, Государственный морской технический университет, 2009 г.); на городском семинаре по вычислительной и теоретической акустике (руководитель проф. Д.П. Коузов) и городском семинаре по механике (руководитель чл.-корр. РАН Д.А. Индейцев) в Институте проблем машиноведения РАН (С.-Петербург, 1999, 2001, 2009 гг.).

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского конкурсного центра фундаментального естествознания (грант «Гранично-контактные задачи гидродинамики» № 97-0-4.1-159).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано пять статей, из которых одна в журнале, входящем в перечень ВАК. Все публикации написаны в соавторстве с Д.П. Коузовым, научным руководителем автора диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из четырех разделов и заключения. Разделы разбиты на пункты. Нумерация формул и рисунков ведется по разделам. Объем работы – 122 страницы, в том числе 48 рисунков и одна таблица. Список литературы включает 79 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел имеет вводный характер. В нем обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор литературы, указываются научная задача и цель диссертации, кратко излагается содержание составных частей диссертации, указываются положения, выносимые на защиту, приводятся сведения о публикации основных результатов.

Во **втором разделе** приводятся некоторые предварительные сведения, необходимые для изложения дальнейшего материала диссертации. Раздел посвящен изучению поверхностной изгибно-гравитационной волны в системе «пластина-жидкость» (рис. 1). Вопросы, затронутые в этом разделе, рассматривались также и другими авторами. Поэтому хотя трудно высказываться категорически о новизне представленных здесь материалов, однако систематического изложения интересующих нас вопросов в других источниках найти не удалось.

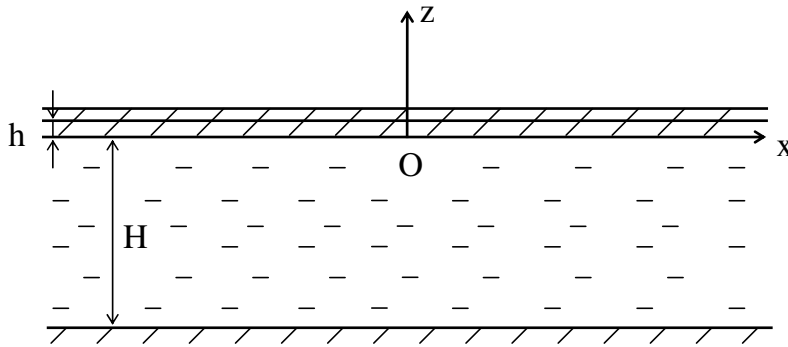


Рис. 1

Всюду в диссертации ограничиваемся рассмотрением гармонических процессов, при этом множитель $e^{-i\omega\tau}$ (ω – круговая частота, c^{-1} ; τ – время, с), задающий зависимость процессов от времени, опускается.

Искомый потенциал скорости $\Phi(x, z)$ должен удовлетворять во всем объеме жидкости уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, z)}{\partial z^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -H \leq z \leq 0, \quad (1)$$

а также граничным условиям на нижней поверхности пластины

$$D \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^4 \partial z} - \rho h \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \rho \omega^2 \Phi = 0, \quad z = 0 \quad (2)$$

и на дне (которое предполагается жестким)

$$\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0, \quad z = -H. \quad (3)$$

Введены следующие обозначения: h – глубина погружения пластины (осадка), м; H – расстояние между ее нижней поверхностью и дном, м; ρ – плотность жидкости, кг/м³; D – цилиндрическая жесткость пластины, Н·м.

Вертикальное смещение пластины $\zeta(x)$ ищем в виде бегущей волны $\zeta(x) = C_0 e^{i\lambda x}$. Соответственно этому решение уравнения Лапласа (1) с учетом граничного условия на дне (3) берем в виде

$$\Phi(x, z) = C e^{i\lambda x} \operatorname{ch} \lambda(z + H).$$

Условие, при котором потенциал скорости $\Phi(x, z)$ удовлетворяет граничному условию (2) на поверхности жидкости, покрытой пластиной, имеет вид

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda (\lambda^4 D + \rho (g - h\omega^2)) \operatorname{sh}(\lambda H) - \rho \omega^2 \operatorname{ch}(\lambda H) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) называется дисперсионным. Показано, что оно имеет два одинаковых по величине и противоположных по знаку вещественных корня, счетное множество мнимых корней и две пары комплексно-сопряженных корней. Таким образом, в системе «пластина на воде» при отсутствии потерь имеются две прогрессивные незатухающие волны. Они соответствуют положительному $+\lambda_0$ и отрицательному $-\lambda_0$ вещественным волновым числам дисперсионного уравнения, распространяются вдоль оси x в противоположных направлениях и в данном разделе представляют основной интерес.

Для прогрессивных волн получено отношение средних по времени потоков энергии в пластине Π_p и в воде Π_w . Оно имеет вид

$$\frac{\Pi_p}{\Pi_w} = \frac{4D\lambda_0^5 \operatorname{sh}^2(\lambda_0 H)}{\rho \omega^2 \frac{\operatorname{sh}(2\lambda_0 H)}{2} + \lambda_0 H}.$$

Все численные эксперименты в работе проводились при жесткости пластины $D = 1.96 \cdot 10^{11}$ Н·м, осадке пластины $h = 5$ м и плотности жидкости (воды) $\rho = 1025$ кг/м³. Значения жесткости и осадки пластины взяты из работы², посвященной численному решению трехмерной задачи дифракции гравитационной волны на упругой прямоугольной пластине ограниченных размеров, плавающей на поверхности жидкости малой глубины.

На рис. 2 представлены зависимости относительного потока энергии в воде $E = (1 + \Pi_p/\Pi_w)^{-1}$ от периода волны t для разных глубин

²Ertekin R.C., Kim J.W. Hydroelastic response of a floating mat-type structure in oblique, shallow-water waves // Journal of ship research. 1999. Vol. 43. № 4. P. 241–254.

водоема H_1 ($H_1 = H + h$). При увеличении периода волны относительный поток энергии в воде возрастает. Это можно объяснить следующим образом. С увеличением периода уменьшается механическое сопротивление пластины. Относительная доля потока энергии, переносимой волной изгиба в пластине, сокращается. Основную роль в переносе энергии начинает играть вода. Для малых периодов, напротив, отношение Π_p/Π_w возрастает и относительный поток энергии в воде уменьшается.

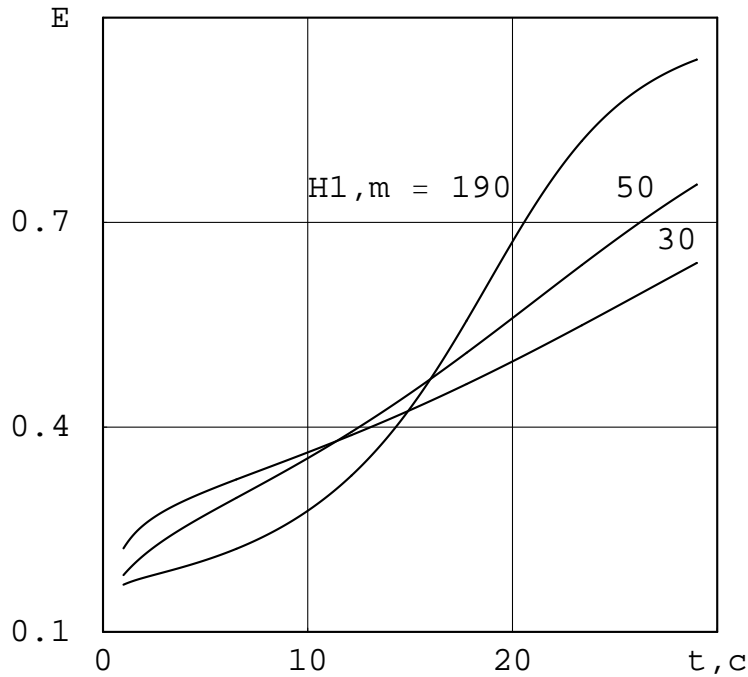


Рис. 2

Графики на рис. 3 иллюстрируют зависимости относительного потока энергии в воде от глубины водоема для разных периодов волны. Штриховые линии отвечают случаю бесконечно глубокой воды. Видно, что относительный поток энергии в воде меняется с ростом глубины немонотонно. При некоторой глубине наблюдается максимум. Глубина водоема, соответствующая этому максимуму, с возрастанием периода увеличивается. Наличие максимума можно объяснить таким образом. При увеличении глубины водоема сначала происходит расширение «жидкостного» канала передачи энергии, вследствие чего поток энергии в воде возрастает. При этом влияние дна сводится к усилению горизонтальных смещений жидких частиц. При больших глубинах водоема эта роль дна ослабевает, поток энергии в воде уменьшается.

Рассмотрено распространение волны в водоеме неограниченной глубины и на мелководье. В случае предельно малой глубины жидкости

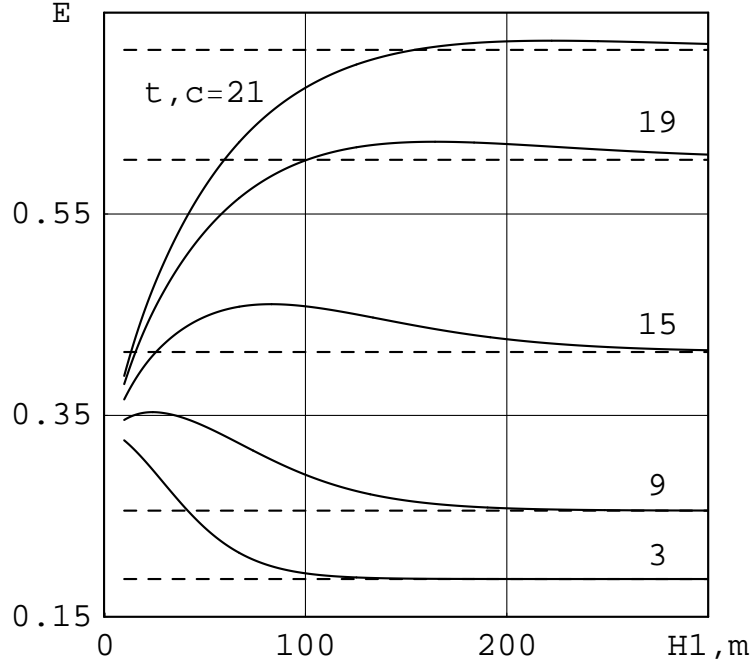


Рис. 3

вместо уравнения Лапласа и граничных условий на дне водоема и на поверхности воды используется одно уравнение (5), которое является основным для этой приближенной теории.

$$D \frac{\partial^6 \Phi(x, 0)}{\partial x^6} - \rho h \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} + \rho g \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} + \frac{\rho \omega^2}{H} \Phi(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Идеей приближения является устранение переменной, связанной с глубиной водоема, так что задача рассматривается только на горизонтальной плоскости $z = 0$. Таким образом, выражение для потенциала скорости имеет вид

$$\Phi(x) = C e^{i\lambda x}.$$

Алгебраическое уравнение шестой степени относительно λ

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^6 + \frac{\rho}{D} (g - h\omega^2) \lambda^2 - \frac{\rho\omega^2}{DH} = 0$$

является дисперсионным для приближения мелкой воды.

В случае бесконечно глубокого бассейна вместо условия на поверхности дна (3) используется условие, требующее, чтобы жидкость на большой глубине находилась в состоянии покоя. А именно:

$$\Phi(x, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

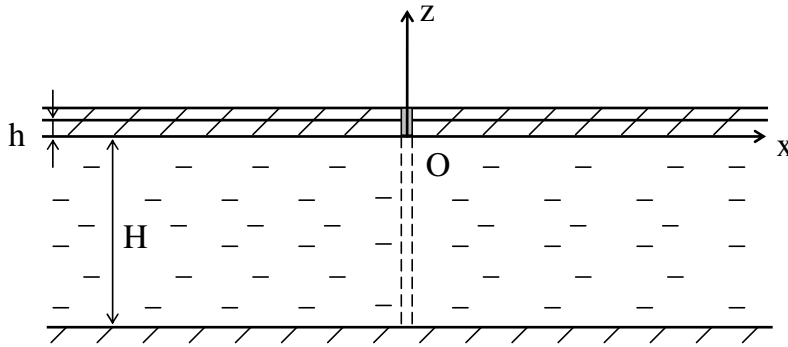


Рис. 4

Поэтому волновой потенциал в этом случае ищем в виде затухающей вглубь жидкости поверхностной волны

$$\Phi(x, z) = C e^{i\lambda x} e^{|\lambda|z}.$$

Дисперсионное уравнение при этом имеет вид

$$\Delta(\lambda) \equiv |\lambda| (\lambda^4 D + \rho (g - h\omega^2)) - \rho\omega^2 = 0.$$

По точности расчета волнового числа исследованы границы применимости приближенных теорий бесконечно глубокой и мелкой воды. В случае водоема, покрытого пластиной, во всем рассмотренном диапазоне круговых частот (от 0 до 1 c^{-1}) погрешность теории мелкой воды не превосходит 15%. В водоеме со свободной поверхностью ошибка значительно больше. Например, при частоте $\omega = 0.5 \text{ c}^{-1}$ она составляет приблизительно 37%. При увеличении частоты погрешность растет и достигает почти 68% при частоте $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$. Погрешность приближения бесконечно глубокой воды в обоих случаях примерно одинаковая. Так, при частоте $\omega > 0.5 \text{ c}^{-1}$ она не превышает 5%.

Таким образом для водоема, покрытого пластиной, теория мелкой воды дает более точные результаты, чем в случае свободной поверхности. Условия применимости приближения бесконечно глубокой воды не меняются.

Результаты, приводимые в последующих разделах и относящиеся к точным аналитическим решениям гранично-контактных задач, являются новыми и получены автором впервые.

В **третьем разделе** построено точное аналитическое решение задачи о совместных колебаниях слоя жидкости и плавающей на его поверхности бесконечной пластины, режим свободных колебаний которой нарушен вдоль прямой $x = 0$ (рис. 4). В качестве источника колебаний рассмотрена изгибно-гравитационная волна, набегающая на эту прямую под прямым углом.

Граничное условие на нижней поверхности пластины принимает вид

$$D \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^4 \partial z} - \rho h \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \rho \omega^2 \Phi = -i\omega (A\delta(x) + B\delta'(x) + a\delta''(x) + b\delta'''(x)), z = 0. \quad (6)$$

Потенциал скорости будем искать в виде суммы поверхностной волны, набегающей на опору и совокупности волн $\Psi(x, z)$, рассеянных на опоре,

$$\Phi(x, z) = C e^{i\lambda_0 x} \operatorname{ch} \lambda_0 (z + H) + \Psi(x, z), \quad (7)$$

где C – амплитуда набегающей волны, м; λ_0 ($\lambda_0 > 0$) – ее волновое число, м^{-1} . Каждое из слагаемых в правой части равенства (7) должно удовлетворять уравнениям (1) и (3). Для первого слагаемого имеет место однородное граничное условие (2), для второго – неоднородное (6). Согласно условию на бесконечности, искомое поле $\Psi(x, z)$ должно состоять из волн, уходящих на бесконечность и затухающих на бесконечности.

Решение ищется в два этапа. Сначала находится общее решение, т. е. решение, удовлетворяющее всем требованиям задачи, кроме гранично-контактных условий. Это решение содержит четыре произвольные постоянные. Затем удовлетворяются гранично-контактные условия, что приводит к линейной системе для их отыскания. В процессе решения проводится регуляризация расходящихся интегралов и рядов.

После последовательного применения прямого и обратного преобразований Фурье к уравнениям (1), (3) и (6), записанным для функции $\Psi(x, z)$, и соответствующих вычислений имеем следующее интегральное представление для рассеянного поля:

$$\Psi(x, z) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\lambda(z+H)) (A + iB\lambda - a\lambda^2 - ib\lambda^3) e^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)} d\lambda. \quad (8)$$

Интегрирование в (8) проводится вдоль вещественной оси с обходом положительного корня знаменателя подынтегральной функции $+\lambda_0$ снизу, а отрицательного корня $-\lambda_0$ сверху (принцип предельного поглощения).

Используя теорему о вычетах и учитывая четность функции $\Delta(\lambda)$, получим выражение для $\Psi(x, z)$ в виде ряда

$$\Psi(x, z) = \omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n (z + H) (A - a\lambda_n^2 + i(B - b\lambda_n^2)\lambda_n \operatorname{sign} x) e^{i\lambda_n |x|}}{\Delta'(\lambda_n)},$$

где λ_n ($n > 0$) – корни функции $\Delta(\lambda)$, расположенные в верхней комплексной полуплоскости; $\Delta'(\lambda) = \text{ch}(\lambda H) (D\lambda^4 + \rho(g - h\omega^2)) \lambda H + \text{sh}(\lambda H) (5D\lambda^4 + \rho(g - (H + h)\omega^2))$.

При этом из интегрального представления (8) при $x = 0$ имеем

$$\Psi(0, z) = \omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{ch} \lambda_n (z + H) (A - a\lambda_n^2)}{\Delta'(\lambda_n)}.$$

Изгибное поле в пластине найдем, пользуясь кинематическим условием

$$\frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial z} = -i\omega \zeta(x).$$

Получим решение в интегральной форме

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{i}{\omega} C e^{i\lambda_0 x} \lambda_0 \text{sh}(\lambda_0 H) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \text{sh}(\lambda H) (A + iB\lambda - a\lambda^2 - ib\lambda^3) e^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

Затем, используя теорему о вычетах, находим разложение в ряд

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{i}{\omega} C e^{i\lambda_0 x} \lambda_0 \text{sh}(\lambda_0 H) + \\ &+ i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sh}(\lambda_n H) \lambda_n (A - a\lambda_n^2 + i(B - b\lambda_n^2) \lambda_n \text{sign } x) e^{i\lambda_n |x|}}{\Delta'(\lambda_n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

При $x = 0$ ряд (10), равно как и интеграл (9), расходится. Это связано с тем, что вдоль прямой $x = 0$ режим колебаний пластины нарушен. Поэтому предельный переход на разные стороны этой прямой будет давать различные результаты. Поскольку предельные значения поля при $x \rightarrow \pm 0$ важны нам в дальнейшем, необходимо провести регуляризацию этих объектов. Проводимая регуляризация представляет собой разновидность естественной регуляризации расходящихся интегралов и рядов Фурье, известной в теории обобщенных функций.

Для представления поля смещений в виде ряда получено выражение

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{i}{\omega} C e^{i\lambda_0 x} \lambda_0 \text{sh}(\lambda_0 H) + \\ &+ i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho \omega^2 \lambda_n (A - a\lambda_n^2 + i(B - b\lambda_n^2) \lambda_n \text{sign } x) e^{i\lambda_n |x|}}{\Delta_1(\lambda_n)}, \end{aligned}$$

где $\Delta_1(\lambda) = \lambda^2(D\lambda^4 + \rho(g - h\omega^2))^2 H + \rho\omega^2(5D\lambda^4 + \rho(g - (H + h)\omega^2))$. Данный ряд имеет при $n \rightarrow \infty$ оценку $O(\lambda_n^{-6})$ и быстро сходится. Это обстоятельство важно нам для численных расчетов.

Для нахождения предельных значений $\zeta(\pm 0)$ использовалось интегральное представление (9). Регуляризация расходящегося при $x = 0$ интеграла

$$I_0(\pm 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^4 \operatorname{sh}(\lambda H) e^{\pm i\lambda 0}}{\Delta(\lambda)} d\lambda$$

приводит к результату

$$\zeta(\pm 0) = \frac{i}{\omega} C \lambda_0 \operatorname{sh}(\lambda_0 H) + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho\omega^2 \lambda_n (A - a\lambda_n^2)}{\Delta_1(\lambda_n)} \pm \frac{b}{2D}.$$

Отсюда видно, что постоянная b равна

$$b = D(\zeta(+0) - \zeta(-0))$$

и определяет скачок вертикального смещения пластины при переходе от правой стороны закрепления к левой.

Последовательно дифференцируя (9), получим интегральные представления для производных $\zeta'(\pm 0)$, $\zeta''(\pm 0)$ и $\zeta'''(\pm 0)$. Они содержат расходящиеся интегралы вида

$$I_k(\pm 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^{4+k} \operatorname{sh}(\lambda H) e^{\pm i\lambda 0}}{\Delta(\lambda)} d\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \quad (11)$$

допускающие регуляризацию. По аналогии с вышеизложенным, можно показать, что постоянная a определяет разницу между направлениями краев пластины при $x = \pm 0$

$$a = D(\zeta'(+0) - \zeta'(-0)),$$

а коэффициенты B и A равны соответственно

$$\begin{aligned} B &= D(\zeta''(+0) - \zeta''(-0)), \\ A &= D(\zeta'''(+0) - \zeta'''(-0)) \end{aligned}$$

и с точностью до знака представляют собой перерезывающую силу и изгибающий момент в опоре.

Фиксация механического режима в начале координат осуществляется с помощью гранично-контактных условий. В качестве примеров

в работе рассмотрены жесткое, скользящее закрепления пластины и трещина.

Жесткий задел пластины вдоль прямой $x = 0$:

$$\zeta(\pm 0) = 0, \quad \zeta'(\pm 0) = 0.$$

Первое уравнение означает запрет вертикального смещения пластины. Второе — равенство нулю угла поворота.

Скользящий задел пластины вдоль прямой $x = 0$:

$$\zeta(+0) = \zeta(-0), \quad \zeta'(\pm 0) = 0, \quad \zeta'''(+0) = \zeta'''(-0).$$

Первое уравнение определяет непрерывность вертикального смещения пластины в опоре. Второе, как и в предыдущем случае, означает, что угол поворота равен нулю. Третье выражает тот факт, что силовая реакция в опоре отсутствует.

Бесконечно тонкая трещина пластины вдоль прямой $x = 0$:

$$\zeta''(\pm 0) = 0, \quad \zeta'''(\pm 0) = 0.$$

Эти уравнения определяют, что на свободных краях пластины должны отсутствовать момент сил и сила.

Удовлетворение гранично-контактным условиям приводит к линейной системе для нахождения неизвестных констант. Среди коэффициентов системы — расходящиеся интегралы (11). Осуществляется их регуляризация.

В работе мы ограничиваемся тремя названными случаями. Случаи наличия других сосредоточенных на прямой нарушений упругих свойств пластины или подкрепляющих элементов могли бы быть изучены аналогично рассмотренным, поскольку излагаемый аналитический аппарат имеет достаточную общность.

Аналитически найдены амплитудные коэффициенты прохождения C_T и отражения C_R падающей волны

$$C_T = 1 + \frac{\omega (A - a\lambda_0^2 + i (B - b\lambda_0^2) \lambda_0)}{C \Delta'(\lambda_0)},$$

$$C_R = \frac{\omega (A - a\lambda_0^2 - i (B - b\lambda_0^2) \lambda_0)}{C \Delta'(\lambda_0)}.$$

На рис. 5 показаны результаты расчета энергетического коэффициента прохождения $T = |C_T|^2$ изгибно-гравитационной волны через жесткий задел. По оси абсцисс отложен период t волны. Расчет проведен для нескольких значений глубин водоема. Коэффициент T имеет

смысл относительной доли энергии прошедшей волны (результат деления энергии прошедшей волны на энергию падающей). Он задает относительную виброизоляцию, создаваемую опорой.

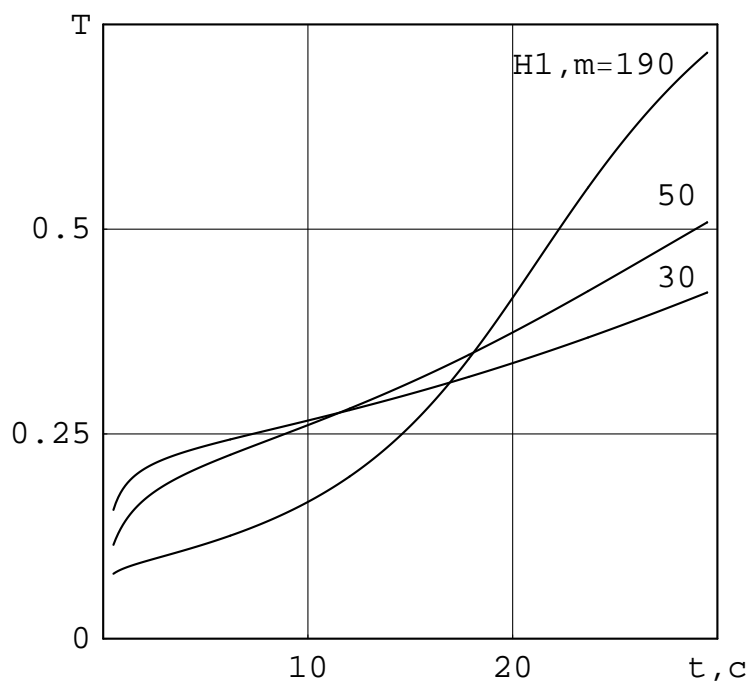


Рис. 5

Из рисунка видно, что коэффициент прохождения монотонно возрастает при увеличении периода волны. Сравнивая полученные результаты с графиками на рис. 2, приходим к выводу о том, что зависимости $T(t)$ и $E(t)$ качественно совпадают. Однако количественно они различаются. Жесткая опора, запрещающая вертикальные смещения пластины, одновременно препятствует и вертикальному движению жидких частиц, которые под опорой смещаются в основном в горизонтальном направлении. Такая трансформация движения приводит к дополнительному отражению волны. Таким образом, коэффициент отражения от опоры существенно больше, чем этого следовало ожидать на основании простого сопоставления интенсивности обоих каналов передачи энергии.

На рис. 6 приведены зависимости энергетического коэффициента прохождения через жесткий задел от глубины водоема. Значения периода волны изменялись от 3 до 21 с. Штриховыми линиями показаны результаты расчета в предельном случае бесконечно глубокого водоема. Результаты на рисунке подтверждают сделанный выше вывод. При увеличении глубины водоема энергетический коэффициент прохождения меняется в соответствии с изменением относительного потока энер-

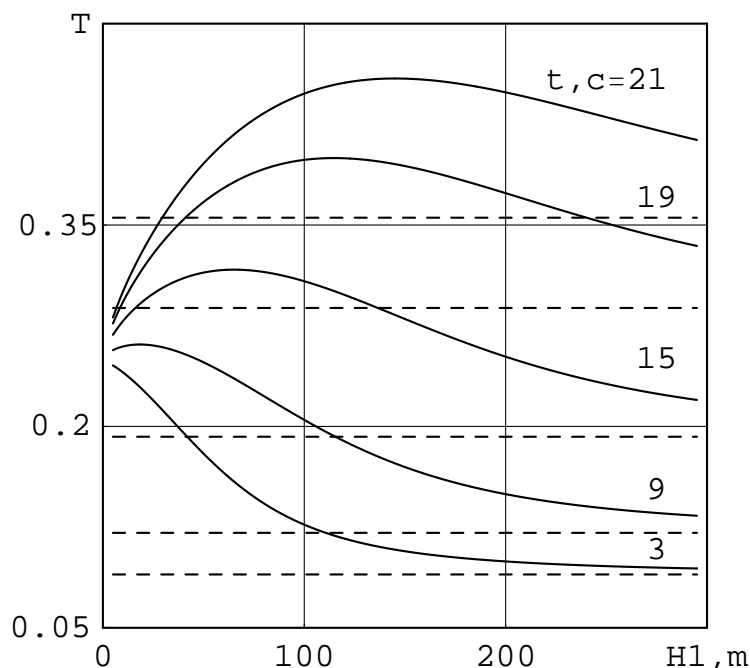


Рис. 6

гии в воде (рис. 3).

Показано, что коэффициент прохождения через скользящее закрепление пластины значительно больше, чем через жесткое. Этот результат объясняется тем, что при скользящем закреплении имеются два канала передачи энергии — вода и пластина, а при жестком только один — вода.

Определены внутренние усилия, развиваемые в жестком и скользящем закреплении. Аналитически показано, что изгибающие моменты в них одинаковы.

Численно показано, что при больших значениях периода коэффициент прохождения через трещину значительно превосходит коэффициенты прохождения через жесткий и скользящий задел. Трещина перестает препятствовать прохождению волны. При малых периодах — ситуация обратная. Коэффициент прохождения через трещину минимальный. Волна почти полностью отражается от трещины. Описанные результаты, по-видимому, объясняются так. На низких частотах, как это было показано во втором разделе, волна носит гравитационный характер (ее волновое число, фазовая скорость, длина такие же, как у гравитационной волны). Эффекты, обусловленные присутствием на поверхности слоя жидкости тонкой упругой пластины, не существенны. Поэтому трещина в пластине практически не влияет на распространение волны и, как следствие, не препятствует ее прохождению. На

высоких частотах влияние гравитационных сил мало. Основная часть энергии переносится волной изгиба по пластине. Трещина в пластине становится препятствием для волны, и наблюдается ее сильное отражение.

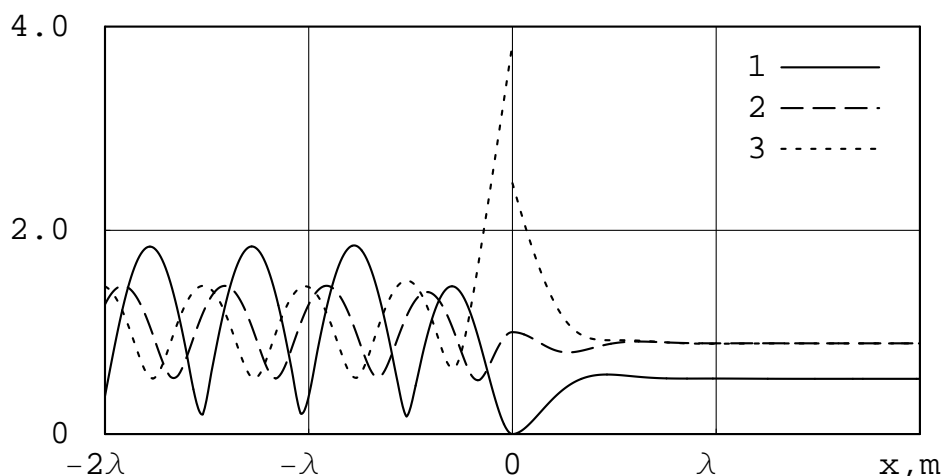


Рис. 7

На рис. 7 представлено распределение нормированных амплитуд колебаний в пластине. По оси абсцисс отложена координата x , по оси ординат — амплитуда прогиба пластины, нормированная на амплитуду колебаний в набегающей волне. Изгибно-гравитационная волна набегаёт на неоднородность в пластине, сосредоточенную в начале координат, из области отрицательных значений координаты x . Сплошной линией показаны результаты для случая жесткого задела, длинным пунктиром — для скользящего задела, коротким пунктиром — для трещины. Период волны $t = 13.3$ с, длина волны $\lambda = 386.7$ м. Глубина водоема $H_1 = 50$ м. Энергетические коэффициенты прохождения равны: 1 — 0.29; 2 — 0.79; 3 — 0.79. Нормализованная перерезывающая сила в жестком заделе равна 6.79, нормализованный изгибающий момент в жестком и скользящем заделах равен 3.1.

Из графиков видно, что в области отрицательных значений x максимумы амплитуды чередуются минимумами. Расстояние между соседними максимумами (минимумами) равно половине длины падающей волны. В случае почти полного отражения волны максимумы примерно равны двум, а минимумы чуть больше нуля. Немонотонность распределения амплитуд прогиба пластины объясняется наложением двух встречных незатухающих прогрессивных волн, одна из которых набегаёт на неоднородность в пластине, а вторая — отражается от нее. Если отражение набегающей волны почти полное, то волновое движение представляет собой стоячую волну, максимальная амплитуда в которой равна удвоенной амплитуде в падающей волне. При увеличении

прохождения волны возрастает та часть энергии, которую переносит прошедшая волна в область положительных значений x . При этом отраженная волна ослабляется, и максимальная амплитуда колебаний в пластине уменьшается. В предельном случае полного прохождения отраженная волна отсутствует, и амплитуда колебаний такая же, как в падающей волне. Из графиков видно также, что максимум амплитуды достигается на краях трещины.

Также получены аналитические представления для полей в предельных случаях мелкой и бесконечно глубокой воды. Степень их пригодности оценивалась по точности расчета энергетического коэффициента прохождения изгибно-гравитационной волны.

В случае скользящего задела ошибка приближенной теории мелкой воды не превышает 15% во всем данном диапазоне круговых частот (от 0 до 1 с^{-1}). Примерно такие же погрешности были получены во втором разделе при расчете волнового числа изгибно-гравитационной волны. Для трещины процент погрешности значительно больше. До частоты 0.4 с^{-1} ошибка менее 5%. Однако при дальнейшем увеличении частоты она сильно возрастает и уже равна почти 30% при частоте 0.5 с^{-1} . В случае жесткого задела погрешность еще больше. Она составляет приблизительно 30% при частоте 0.4 с^{-1} . При частоте 0.5 с^{-1} она достигает 40%. Таким образом, использовать приближенную теорию мелкой воды следует с осторожностью. Видимо, только в случае скользящего задела она дает приемлемые результаты.

Погрешность в предельном случае бесконечно глубокого бассейна при наличии жесткого задела очень большая, в данном диапазоне частот изменяется от 23 до 43%. В двух других случаях (скользящий задел и трещина) ошибки всюду не более 5%. Таким образом, жесткий задел увеличивает глубину локализации поверхностной волны, и применение данной приближенной теории приводит к значительным погрешностям. В случае скользящего задела и трещины погрешность небольшая.

В четвертом разделе результаты, полученные в третьем разделе, обобщены на случай нескольких нарушений режима свободных колебаний пластины вдоль параллельных прямых $x = \alpha_k$ ($k = \overline{1, m}$). Схема модели показана на рис. 8.

В данном случае в правой части граничного условия на нижней поверхности пластины (при $z = 0$) стоит сумма линейных комбинаций δ -функции и ее трех первых производных, сосредоточенных в точках

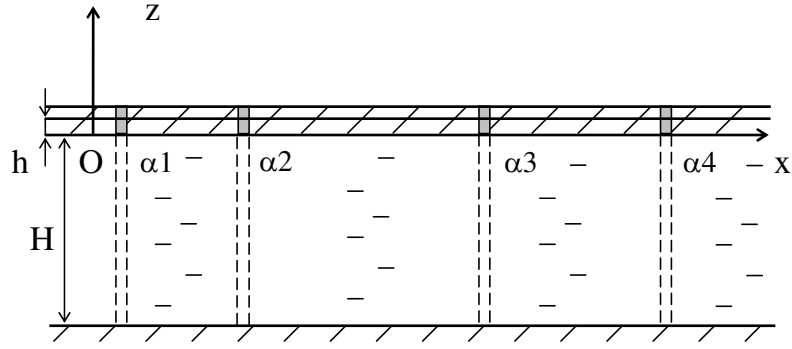


Рис. 8

$$x = \alpha_k \quad (k = \overline{1, m}).$$

$$D \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^4 \partial z} - \rho h \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \rho \omega^2 \Phi = -i\omega \sum_{k=1}^m (A_k \delta(x - \alpha_k) + B_k \delta'(x - \alpha_k) + a_k \delta''(x - \alpha_k) + b_k \delta'''(x - \alpha_k)).$$

Находятся точные аналитические представления для поля изгиба в пластине и волнового поля в жидкости при любом числе препятствий произвольного характера.

Например, для изгибного поля в пластине при $x \neq \alpha_l$ ($l = \overline{1, m}$) получено выражение

$$\zeta(x) = \frac{i}{\omega} C e^{i\lambda_0 x} \lambda_0 \operatorname{sh}(\lambda_0 H) + i \sum_{k=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho \omega^2 \lambda_n (A_k - a_k \lambda_n^2 + i(B_k - b_k \lambda_n^2) \lambda_n \operatorname{sign}(x - \alpha_k)) e^{i\lambda_n |x - \alpha_k|}}{\Delta_1(\lambda_n)}.$$

При $x = \alpha_l$ оно приобретает вид

$$\zeta(\alpha_l \pm 0) = \frac{i}{\omega} C e^{i\lambda_0 \alpha_l} \lambda_0 \operatorname{sh}(\lambda_0 H) + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho \omega^2 \lambda_n (A_l - a_l \lambda_n^2)}{\Delta_1(\lambda_n)} \pm \frac{b_l}{2D} + i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho \omega^2 \lambda_n (A_k - a_k \lambda_n^2 + i(B_k - b_k \lambda_n^2) \lambda_n \operatorname{sign}(\alpha_l - \alpha_k)) e^{i\lambda_n |\alpha_l - \alpha_k|}}{\Delta_1(\lambda_n)}.$$

Аналитически найдены амплитудные коэффициенты прохождения и отражения падающей волны.

$$C_T = 1 + \frac{\omega}{C} \sum_{k=1}^m \frac{A_k - a_k \lambda_0^2 + i(B_k - b_k \lambda_0^2) \lambda_0}{\Delta'(\lambda_0)} e^{-i\lambda_0 \alpha_k},$$

$$C_R = \frac{\omega}{C} \sum_{k=1}^m \frac{A_k - a_k \lambda_0^2 - i(B_k - b_k \lambda_0^2) \lambda_0}{\Delta'(\lambda_0)} e^{i\lambda_0 \alpha_k}.$$

Проведено исследование прохождения набегающей волны через два прямолинейных параллельных препятствия. На рис. 9–11 сплошной линией показаны результаты для случая двух жестких заделов, длинным пунктиром — двух скользящих заделов, коротким пунктиром — жесткого и скользящего заделов (рис. 9 и 10) и двух трещин (рис. 11). Глубина водоема $H_1 = 50$ м.

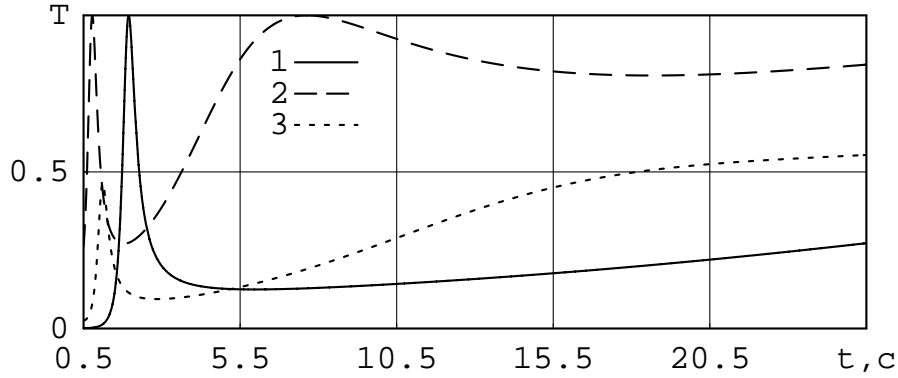


Рис. 9

На рис. 9 представлена зависимость энергетического коэффициента прохождения $T = |C_T|^2$ в зависимости от периода волны t , с. Расстояние между заделами пластины было зафиксировано и равнялось $d = 100$ м. Как видно из рисунков, имеются минимумы и максимумы коэффициентов прохождения. В случае одинаковых типов закреплений максимумы достигают единицы, и имеет место полное прохождение волны. При рассмотрении закреплений разных типов резонансные пики также наблюдаются, однако полного прохождения нет.

Из принципа взаимности вытекает, что коэффициент прохождения не зависит от порядка следования препятствий. Полученные нами в ходе численного эксперимента результаты были успешно проверены на выполнение этого равенства.

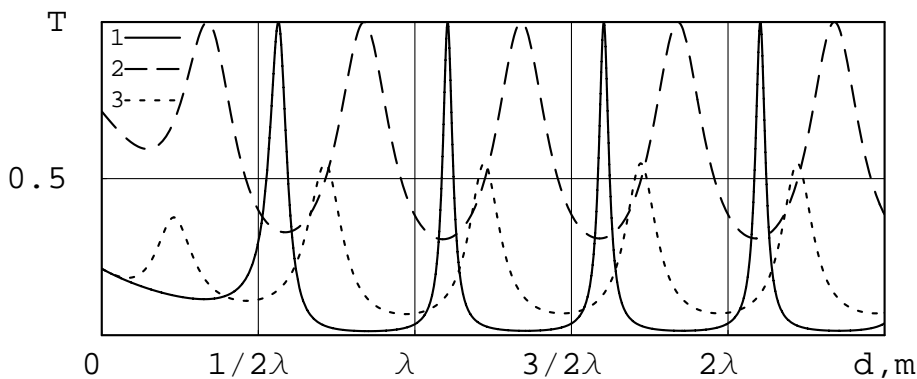


Рис. 10

На рис. 10 приведены зависимости энергетического коэффициента прохождения T от расстояния d , м между закреплениями, выраженного в долях длины λ набегающей волны. Период волны выбран равным $t = 5$ с. Длина волны $\lambda \approx 250.5$ м. Как показывают рисунки, максимумы коэффициента прохождения сменяются минимумами через четверть длины набегающей волны. В случае чередования двух закреплений разного типа экстремумы коэффициента прохождения расположены между соответствующими экстремумами для двух одинаковых закреплений, и равноудалены от них.

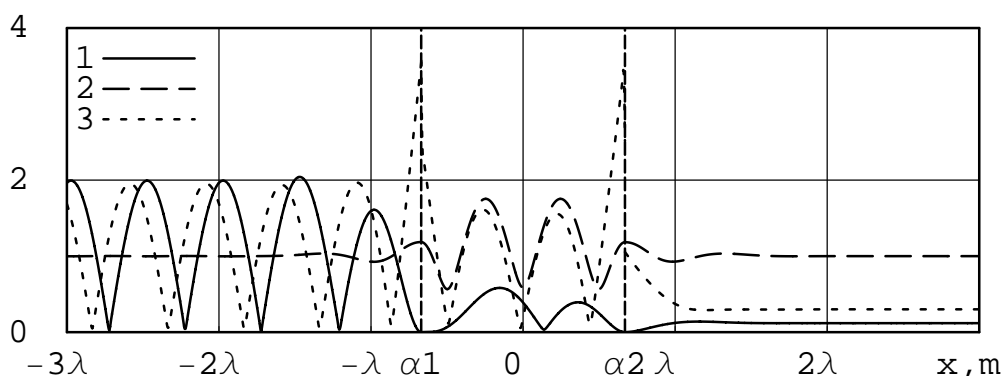


Рис. 11

На рис. 11 показано распределение нормированных амплитуд колебаний в пластине. По оси абсцисс отложена координата x , по оси ординат – амплитуда прогиба пластины, нормированная на амплитуду колебаний в падающей волне. Изгибно-гравитационная волна набегаёт на неоднородности в пластине, сосредоточенные вдоль двух прямых $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$ ($\alpha_1 < \alpha_2$), из области отрицательных значений координаты x . Расстояние между ними $d = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 335.61$ м. Период волны 5 с, длина волны $\lambda \approx 250.5$ м. Энергетические коэффициенты прохождения равны: 1 – 0.01; 2 – 1.0; 3 – 0.09.

Из графиков видно, что амплитуды прогиба пластины распределены немонотонным образом. При $x < \alpha_2$ максимумы амплитуды чередуются минимумами. Расстояние между соседними максимумами (минимумами) равно половине длины набегающей волны. В случае почти полного отражения максимумы при $x < \alpha_1$ примерно равны двум, а минимумы чуть больше нуля. При полном прохождении волны при $x < \alpha_1$ и $x > \alpha_2$ амплитуды равны единице, а при $\alpha_1 < x < \alpha_2$ имеют экстремумы. Немонотонный характер распределения амплитуд прогиба пластины является результатом наложения отраженной волны на набегающую и возникновением стоячих волн. Показано, что амплитуда вертикального смещения пластины достигает своего наибольшего значения на краях трещины.

По точности расчета энергетического коэффициента прохождения в случаях одинаковых нарушений упругих свойств плавающей пластины исследовались границы применимости приближенных теорий бесконечно глубокой и мелкой воды. Как показали результаты расчетов, теория мелкой воды дает приемлемые результаты только в случае двух скользящих заделов. В этом случае на частотах, меньших 1 с^{-1} , ошибка не превышает 10%. Немного большие погрешности ($<15\%$) были получены нами в третьем разделе при расчете энергетического коэффициента прохождения через один скользящий задел. Для двух трещин и двух жестких заделов погрешности значительные (примерно такие же, как для одной трещины и одного жесткого задела).

Теория бесконечно глубокого бассейна хорошо описывает прохождение волны через два скользящих задела и две трещины. В этих случаях погрешности во всем рассмотренном нами диапазоне частот составили не более 10% и 5% соответственно. Погрешности для двух скользящих заделов немного больше, чем для одного скользящего задела, а для двух трещин приблизительно такие же, как для одной трещины. В случае двух жестких заделов применение данной приближенной теории приводит к значительным погрешностям. В диапазоне частот от 0.3 до 2 с^{-1} погрешность изменяется от 30 до 56%, что еще больше, чем для одного жесткого задела.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Получены точные аналитические решения двумерных гранично-контактных задач о рассеянии изгибно-гравитационных волн на сосредоточенных прямолинейных препятствиях в бесконечной плавающей упругой пластине.
2. Найдены выражения для изгибного поля в пластине и волнового поля в жидкости.
3. Аналитически найдены коэффициенты прохождения и отражения набегающей волны.
4. Создан пакет прикладных программ для численного исследования прохождения набегающей изгибно-гравитационной волны через произвольное количество прямолинейных препятствий различных типов. Пакет программ позволяет рассчитывать коэффициенты прохождения и отражения набегающей волны, прогиб пластины, внутренние усилия в каждом закреплении пластины. С использованием данного пакета получены все численные результаты, приведенные в диссертации.

5. Получены аналитические представления полей в двух предельных случаях мелкой и бесконечно глубокой воды.
6. Показано, что оба приближения хорошо описывают прохождение волны через одно и два скользящих закрепления пластины. Кроме того, приближение бесконечно глубокой воды также хорошо работает в случае прохождения через одну и две трещины в пластине. Однако применение приближенных теорий в случаях одного и двух жестких закреплений пластины приводит к значительным погрешностям.

Все перечисленные результаты диссертации получены **впервые** и являются **новыми**.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Жучкова, М. Г.** Прохождение изгибно-гравитационной волны через жесткую опору пластины, расположенной на поверхности жидкости / М. Г. Жучкова, Д. П. Коузов // Труды XXVII летней школы «Анализ и синтез нелинейных механических систем» / ИПМаш РАН. – 2000. – С. 389–399. – Библиогр.: с. 395.
2. **Жучкова, М. Г.** Об одной из проблем моделирования волновых движений плавучих аэродромов / М. Г. Жучкова, Д. П. Коузов // Материалы 4-й международной конференции по морским интеллектуальным технологиям «Моринтех – 2001». – СПб., 2001. – Т. 2. – С. 120–123. – Библиогр.: с. 123.
3. **Жучкова, М. Г.** Прохождение изгибно-гравитационной волны через жесткий задел в плавающей пластине / М. Г. Жучкова, Д. П. Коузов // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66. Вып. 3. – С. 457–464. – Библиогр.: с. 463–464.
4. **Zhuchkova, M. G.** Bending gravitational wave's transmission through a set of rigid clamps in a floating plate / M. G. Zhuchkova, D. P. Kouzov // Advanced problems in mechanics / IPME RAS. – 2002. – P.376–381. – Bibliography: p. 381.
5. **Zhuchkova, M. G.** Hydro-elastic behavior of a floating supported plate in water waves / M. G. Zhuchkova, D. P. Kouzov // In: CD-ROM Proc. of intern. conf. on subsea technologies «SubSeaTECH2009» / State Marine Technical Univ. of St.Petersburg. – St. Petersburg, Russia, 2009. 4 p. – Bibliography: p. 4.

ИЦ СПбГМТУ, Лоцманская, 10
Подписано в печать 09.08.2010. Зак. 4023. Тир. 100. 1, 3 печ. л.

