Автоматика и телемеханика, № 7, 2007

Адаптивные и робастные системы

PACS 02.30.Yy

© 2007 г. Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, д-р техн. наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург),
В.О. НИКИФОРОВ, д-р техн. наук
(Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПАССИФИЦИРУЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АДАПТИВНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ[1]

Общий подход к синхронизации динамических систем, основанный на применении адаптивных наблюдателей и методе пассификации развивается на непассифицируемые нелинейные системы, в частности на системы, модель которых имеет относительный порядок, больший единицы. Предложены две схемы синхронизации: на основе адаптивных наблюдателей с расширенной ошибкой и на основе алгоритмов настройки повышенного порядка. Решение задачи синхронизации опирается на новую каноническую форму адаптивного наблюдателя. Установлены условия сходимости оценок параметров к истинным значениям при отсутствии помех в системе, а также показана грубость процесса адаптивной синхронизации по отношению к ограниченной ошибке измерений. На примере управляемой системы Лоренца продемонстрирована возможность применения предложенного метода для передачи информации модуляцией хаотического сигнала.

1. Введение

Среди свойств взаимодействующих колебательных систем важное место занимает свойство *синхронизации*, имеющее многочисленные применения в механике и физике [1–3], в вибрационных технологиях [1, 2], в радиотехнике и технике связи [4, 5] и в других областях. В последние годы возрастает интерес к задачам *управления синхронизацией*, состоящим в обеспечении синхронного протекания процессов в системе путем введения дополнительных обратных связей. В частности, с начала 1990-х г.г. значительно вырос интерес к так называемой *хаотической синхронизации*, при которой каждая из синхронизируемых подсистем продолжает совершать сложные, хаотические колебания и после установления синхронного режима [6–8].

[1] Работа частично финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 05-01-00869, 06-08-01386 и научной программой Президиума РАН № 22 «Процессы управления» (проект 1.8).

Предложен целый ряд способов использования эффекта хаотической синхронизации для повышения скрытности и надежности передачи информации (см., например, обзоры и специальные выпуски журналов [9–16]). В этом направлении получен ряд результатов по применению адаптивных методов [17–20]. Аналогично задаче об адаптивном управлении синхронизацией, в [8, 16, 21–24] рассматривается задача о синхронизации на основе *адаптивного наблюдателя*. Возникающие задачи отличаются от традиционно рассматриваемых задач наблюдения тем, что модель объекта наблюдения нелинейна и, возможно, неустойчива.

В [17, 20] предложен новый метод адаптивной синхронизации, базирующийся на использовании функций Ляпунова и пассификации. Этот метод был развит к задачам синхронизации на основе адаптивных наблюдателей для систем связи [21–23, 25, 26]. Однако применение подхода [17, 20] ограничивается условием *пассифицируемости* объекта (источника сигнала, или «ведущей системы»). Это условие, в частности, означает, что относительная степень объекта не должна превышать единицу. Выполнение требования пассифицируемости препятствует повышению скрытности передаваемой информации, так как скачкообразное изменение полезного сигнала вызывает легко детектируемый скачок производной переданного сигнала [27].

Ниже метод синхронизации на основе адаптивных наблюдателей развивается на *непассифицируемые* системы, в том числе на системы с относительной степенью линейной части, превышающей единицу. Предлагаемое решение опирается на недавние результаты в области теории адаптивного управления нелинейными объектами [22, 28–30], в том числе на структуру адаптивных наблюдателей и новые классы алгоритмов адаптации, предложенные в [31, 32].

Отметим, что ранее, в [27, 33], были предложены некоторые методы адаптивной синхронизации для систем с относительной степенью, большей единицы. Однако алгоритм синхронизации [33] использует обратную связь по состоянию, а не по выходу объекта и, кроме того, в нем предполагается, что известны все параметры источника сигнала (ведущей системы). Подход, используемый в [27] базируется на использовании канонических форм линейных наблюдателей состояния (см., например, [34]). Синтез же *нелинейных* наблюдателей на основе [27] применим лишь к конкретным видам систем и требует привлечения специальных приемов для каждого вида нелинейности. В частности неясно, каким образом метод [27] можно применить к синхронизации систем Лоренца. Наконец, результаты [27] не позволяют учесть погрешности измерений передаваемого сигнала.

В отличие от [27, 33] в данной статье предлагается общий метод адаптивной синхронизации, который позволяет также осуществлять синхронизацию при наличии ограниченных шумов в канале связи путем робастификации («огрубления») алгоритмов адаптации. Приведенные в данной статье результаты моделирования демонстрируют более высокое быстродействие и робастность адаптивного наблюдателя («ведомой системы») по сравнению с изложенным в [25] методом. Предварительные результаты работы были представлены в [35–37].

Математическая постановка задачи дается в разделе 2. Общий метод синтеза адаптивных наблюдателей для систем с относительной степенью, большей единицы, изложен и обоснован в разделах 3, 4. Сначала для удобства изложения в разделе 3 рассматривается более простой случай отсутствия помех в системе. Для него приводятся базовые структуры адаптивных наблюдателей и выводятся условия сходимости. В разделе 4 выполняется модификация базовых алгоритмов, которая позволяет обеспечить робастность системы при действии внешних возмущений (шума измерений). В разделе 5 показано применение предложенного метода для синхронизации управляемых систем Лоренца. Для этого примера приводятся результаты моделирования, которые согласуются с теоретическими положениями и дают количественные сведения о процессах в системе. В разделе 5 также демонстрируется применение предложенного метода адаптивной синхронизации для синтеза алгоритмов передачи информации модуляцией хаотических сигналов.

2. Постановка задачи

Следуя [21], считаем, что динамический объект (*ведущая система*) задается уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + \varphi_0(y) + b\varphi(y)^{\mathrm{T}}\theta, \quad y = c^{\mathrm{T}}x, \tag{2.1}$$

$$y_r = y + \xi, \tag{2.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, значения которого не передаются ведомой системе,[2] y – выход объекта, $y_r = y + \xi(t)$ – измеряемый выходой сигнал, поступающий на вход ведомой системы, $\xi(t)$ – погрешность измерений (аддитивная помеха в канале связи между ведущей и ведомой системами), $\theta \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вектор параметров объекта (в системах телекоммуникации этот вектор содержит передаваемую информацию). Предполагается, что нелинейные зависимости $\varphi_0(y)$, $\varphi(y)$, а также матрица A и векторы b, c известны и могут быть использованы алгоритмом синхронизации, реализованным в ведомой системе.

Далее сделаем следующие предположения относительно объекта (2.1).

Предположение 1. *При любых ограниченных начальных условиях $x(0)$ и любом допустимом значении вектора θ вектор состояния $x(t)$ является ограниченной функцией времени.*

Предположение 2. *Функции $\varphi_0(y)$, $\varphi(y)$ ограничены для любых ограниченных y.*

В этих предположениях рассматривается задача синтеза адаптивного наблюдателя, представляющего собой динамическую систему вида

$$\dot{z} = F(z, y_r), \quad \widehat{\theta} = h(z, y_r), \tag{2.3}$$

который обеспечивает выполенение целевого условия $\overline{\lim_{t\to\infty}}|\theta - \widehat{\theta}| \le \delta$.

3. Синтез адаптивных наблюдателей при отсутствии возущений

В данном разделе погрешность измерений не учитывается, т.е. считается, что в (2.3) $\xi(t) \equiv 0$.

Ограничимся далее частной формой адаптивного наблюдателя (2.3) (*ведомой системы*), имеющей вид:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + \varphi_0(y) + b\varphi(y)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta} + k(y - \widehat{y}), \quad \widehat{y} = c^{\mathrm{T}}\widehat{x}, \tag{3.1}$$

$$\dot{\widehat{\theta}} = F_\theta\big(\widehat{\theta}, \widehat{x}, y\big), \tag{3.2}$$

где $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ являются оценками переменных x и y, вектор $z = \mathrm{col}\,(x, \widehat{\theta})$, а $\widehat{\theta}$ есть вектор настраиваемых параметров, служащий оценкой вектора θ параметров ведущей системы.

Структура адаптивного наблюдателя (3.1), (3.2) предложена в [21, 23], где установлены условия сходимости для случая, когда линейная часть объекта (ведущей

[2] В дальнейшем, пользуясь аналогиями с системами телекоммуникации, будем говорить, что ведомая система получает сигнал от ведущей через *канал связи*.

системы) пассифицируема. Действие ограниченных возмущений при таком объекте рассмотрено в [25].

Условие пассифицируемости налагает серьезные ограничения на свойства объекта: относительная степень модели объекта r должна равняться единице. Это сужает область применимости метода адаптивных наблюдателей и мотивирует поиск решений задачи построения адаптивных наблюдателей для систем, имеющих $r > 1$. Ниже с учетом сделанных выше предположений предлагается два метода решения поставленной задачи.

Первый метод основывается на использовании подхода *расширенной ошибки*, рассмотренного в [22, 38, 39], а второй – на использовании *алгоритмов настройки высокого порядка* [22, 28, 31, 32, 40].

Использование расширенной ошибки осуществляется с помощью адаптивного наблюдателя вида (3.1), (3.2), в котором вектор k выбирается из условия гурвицевости матрицы $F = A - kc^{\mathrm{T}}$. Для вывода алгоритма адаптации найдем сначала так называемую *модель ошибки*. С этой целью продифференцируем ошибку оценивания $\varepsilon = x - \widehat{x}$ с учетом выражений (2.1) и (3.1). Получим, что

$$\dot{\varepsilon} = F\varepsilon + b\varphi(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}, \quad e = c^{\mathrm{T}}\varepsilon, \tag{3.3}$$

где *регрессор* $\varphi(t) = \varphi\big(y(t)\big)$, $\widetilde{\theta} = \theta - \widehat{\theta}$ – ошибка оценивания параметра, а $e = y - \widehat{y}$ – невязка между выходами объекта и наблюдателя. Уравнение ошибки (3.3) перепишем в виде

$$e = H(p)\big[\varphi(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}\,\big], \tag{3.4}$$

где $p = \mathrm{d}\,/\mathrm{d}\,t$ – оператор дифференцирования по времени, а передаточная функция $H(s)$ системы (3.4), $H(s) = c^{\mathrm{T}}(s\mathrm{I} - F)^{-1}b$, асимптотически устойчива.

Следуя [22, 38, 39], используем алгоритм адаптации следующего вида:

$$\dot{\widehat{\theta}} = \gamma\omega(t)^{\mathrm{T}}\widehat{e}, \tag{3.5}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления алгоритма, $\omega(t) = H(p)\big[\varphi(t)\big]$ – регрессор, пропущенный через фильтр с передаточной функцией $H(s)$, а $\widehat{e}$ есть *расширенный сигнал ошибки*, который определяется следующим выражением:

$$\widehat{e} = e + H(p)\big[\varphi(t)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta}\,\big] - \omega(t)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta}. \tag{3.6}$$

Далее используем

Определение 1 ([38, 41]). *Вектор-функция $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ называется постоянно возбуждающей (ПВ) на $[0, \infty)$, если она измерима и ограничена на $[0, \infty)$ и существуют $\alpha > 0$, $T > 0$ такие, что*

$$\int\limits_{t}^{t+T} f(s)f(s)^T ds \geq \alpha I \tag{3.7}$$

для всех $t \geq 0$.

Смысл условия ПВ состоит в том, что вектор $f(t)$ с ростом t не приближается ни к какой гиперплоскости в пространстве $\mathbb{R}^m$, т.е. компоненты вектора $f(t)$ линейно независимы в усиленном смысле.

Сформулируем теорему, устанавливающую условия осуществления синхронизации на основе адаптивного наблюдателя в отсутствие погрешностей измерений.

Т е о р е м а 1. *Замкнутая система, состоящая из ведущей системы* (2.1), *настраиваемого наблюдателя* (3.1) *и алгоритма адаптации* (3.5), (3.6), *обладает следующими свойствами:*

i) при любых начальных условиях и любом $\gamma > 0$ все переменные, входящие в уравнения замкнутой системы, ограничены и выполнено

$$\lim_{t\to\infty} (y(t) - \widehat{y}(t)) = 0; \tag{3.8}$$

ii) если вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию ПВ, а передаточная функция $H(s)$ минимально-фазовая, то (кроме (i)) *выполнено также*

$$\lim_{t\to\infty} \left|\theta - \widehat{\theta}(t)\right| = 0. \tag{3.9}$$

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Отметим, что для проверки условия ПВ для функции $\varphi(t) = \varphi\big(y(t)\big)$ требуется проверить линейную независимость компонент $\varphi(t)$. Если $y(t)$ – скаляр, то условие линейной зависимости $\sum\limits_{i=1} m\varphi_i(y)C_i$ превращается в нелинейное уравнение. Если это уравнение имеет лишь конечное число корней (например, если нелинейности представляются полиномами) y_j, $j = 1, \ldots, k$, то достаточно доказать, что гиперплоскости $y = y_j$ ($C^{\mathrm{T}}x = y_j$) не являются притягивающими множествами системы (2.1), что, в свою очередь заведомо выполняется, если матрица A неустойчива. Таким образом, условие ПВ зачастую допускает эффективную проверку.

Рассмотрим теперь другое решение поставленной задачи, в котором используются алгоритмы настройки высокого порядка (*high-order tuners*). С этой целью используем следующий настраиваемый наблюдатель:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + \varphi_0(y) + b\nu(y, \widehat{\theta}) + k(y - \widehat{y}), \quad \widehat{y} = c^{\mathrm{T}}\widehat{x}, \tag{3.10}$$

в котором $\nu(y, \widehat{\theta})$ – настраиваемая обратная связь, уравнение которой будет приведено ниже.

Для рассматриваемой системы уравнение ошибки принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = F\varepsilon + b(\varphi(t)^{\mathrm{T}}\theta - \nu), \quad e = c^{\mathrm{T}}\varepsilon,$$

т.е. может быть преобразовано к уравнениям в форме «вход–выход»

$$e = H(p)\big[\varphi(t)^{\mathrm{T}}\theta - \nu\big]. \tag{3.11}$$

Выберем передаточную функцию $W(s)$ как

$$W(s) = (s + \lambda)H(p),$$

где λ – произвольная положительная постоянная. Тогда уравнение (3.11) можно записать в виде

$$e = \frac{1}{p+\lambda}\Big[\overline{\omega}(t)^{\mathrm{T}}\theta - W(p)[\nu]\Big], \tag{3.12}$$

где $\overline{\omega}(t) = W(p)[\varphi(t)]$.

Исходя из вида уравнения ошибки (3.12), выберем настраиваемую обратную связь в форме

$$\nu = W(p)^{-1}\Big[\overline{\omega}(t)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta}\Big], \tag{3.13}$$

где $\widehat{\theta}$ – вектор настраиваемых парметров. Для осуществления обратной связи (3.13) следует получить не только настраиваемые параметры $\widehat{\theta}$, но также и их производные, вплоть до порядка $(r-1)$ включительно, где r – относительная степень передаточной функции $H(s)$. Для преодоления указанной трудности, связанной с дифференцированием сигнала $\widehat{\theta}$, используем следующий алгоритм адаптации:

$$\dot{\widehat{\psi}}_i = \overline{\omega}_i e, \tag{3.14}$$

$$\dot{\eta}_i = (1 + \mu \overline{\omega}^{\mathrm{T}} \overline{\omega})(\Gamma \eta_i + h \widehat{\psi}_i), \tag{3.15}$$

$$\widehat{\theta}_i = l^{\mathrm{T}} \eta_i, \tag{3.16}$$

где $i = 1, \dots, m$, $\mu > 0$ – параметр алгоритма, (l, Γ, h) – минимальная реализация звена с передаточной функцией $\alpha(0)/\alpha(s)$, знаменатель $\alpha(s)$ которой является гурвицевым многочленом порядка $(r-2)$, т.е. выполнено $\alpha(0)/\alpha(s) = l^{\mathrm{T}}(s\mathrm{I} - \Gamma)^{-1} h$.

Замечание. При $r \le 2$ нет необходимости в использовании дополнительных фильтров (3.15), (3.16). Для этого частного случая алгоритм адаптации принимает вид $\dot{\widehat{\theta}} = \overline{\omega} e$.

Справедлива следующая теорема о синхронизации.

Теорема 2. Замкнутая система, состоящая из ведущей системы (2.1), *наблюдателя* (3.10) *и настраиваемой обратной связи* (3.13)–(3.16), *имеет следующие свойства:*

i) для любых начальных условий и любого μ, такого, что выполнено неравенство

$$\mu > \frac{3}{4\lambda} \bigl(|l| + |P F^{-1} h| \bigr)^2,$$

в котором положительно определенная матрица P удовлетворяет уравнению $F^{\mathrm{T}} P + P F = -2\mathrm{I}$, все переменные замкнутой системы ограничены и достигается стремление к нулю (3.8)*;*

ii) если вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию ПВ и передаточная функция $H(s)$ минимально-фазовая, то кроме выполнения i имеет место асимптотическая сходимость (3.9).

Доказательство теоремы основано на стандартных рассуждениях, см., например, [22, 31].

Рассмотрим теперь более общий случай, в котором ведущая система описывается уравнениями

$$\dot{x} = A(y)x + \varphi_0(y) + b\varphi(y)^{\mathrm{T}}\theta, \quad y = c^{\mathrm{T}} x. \tag{3.17}$$

Используем для этого случая следующие дополнительные предположения.

Предположение 3. Существуют вектор-функция $k(y) \in \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $V(x)$ такие, что

$$c_1|x|^2 \le V(x) \le c_2|x|^2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\left(A(c^{\mathrm{T}}x) - k(c^{\mathrm{T}}x)c^{\mathrm{T}}\right)x \le -c_3|x|^2,$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \le c_4|x|,$$

где c_i – некоторые положительные постоянные $(i = \overline{1,4})$.

Предположение 4. При любом ограниченном y все элементы матрицы $A(y)$ также ограничены.

Предположение 3, другими словами, означает экспоненциальную устойчивость автономной системы

$$\dot{x} = G(c^{\mathrm{T}}x)x,$$

где $G(c^{\mathrm{T}}x) = G(y) = A(y) - k(y)c^{\mathrm{T}}$.

Следует отметить, что описанные выше методы синтеза неприменимы к системам вида (3.17). Поэтому предложим еще один метод, представляющий собой разновидность метода с расширенным сигналом ошибки. С этой целью введем настраиваемый наблюдатель вида

$$\dot{\widehat{x}} = A(y)\widehat{x} + \varphi_0(y) + b\varphi(y)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta} + k(y)(y - \widehat{y}), \quad \widehat{y} = c^{\mathrm{T}}\widehat{x}, \tag{3.18}$$

в котором изменяющаяся во времени вектор-функция $k\big(y(t)\big)$ выбирается так, чтобы выполнялось предположение 3. Модель ошибки в этом случае принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = G(t)\varepsilon + b\varphi(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}, \quad e = c^{\mathrm{T}}\varepsilon, \tag{3.19}$$

где $G(t) = G(c^{\mathrm{T}}x(t))$.

Определим теперь расширенный сигнал ошибки как

$$\widehat{e} = e + c^{\mathrm{T}}\eta, \tag{3.20}$$

где добавочный вектор η вырабатывается следующими фильтрами

$$\dot{\eta} = G(t)\eta - \Omega\dot{\widehat{\theta}}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.21}$$

$$\dot{\Omega} = G(t)\Omega + b\varphi(t)^{\mathrm{T}}, \quad \Omega \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{3.22}$$

Тогда согласно [39] можно использовать алгоритм адаптации вида

$$\dot{\widehat{\theta}} = \gamma\omega^{\mathrm{T}}\widehat{e}, \tag{3.23}$$

где $\omega = c^{\mathrm{T}}\Omega$.

Сформулируем теорему.

Теорема 3. Замкнутая система, состоящая из ведущей системы (3.17), *настраиваемого наблюдателя* (3.18), *фильтров расширенного сигнала ошибки* (3.20)–(3.22) *и алгоритма адаптации* (3.23), *обладает следующими свойствами:*

i) для любых начальных условий и любого $\gamma > 0$ все переменные, входящие в замкнутую систему, ограничены и достигается сходимость к нулю (3.8);

ii) если, кроме того, вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию ПВ, то имеет место асимптотическая сходимость (3.9).

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

4. Робастный адаптивный наблюдатель для системы с шумами измерения

Широко известно, что алгоритмы адаптации, основанные на операции «чистого» интегрирования, могут потерять устойчивость при действии внешних возмущений или шумов измерения [22, 41, 42]. Для сохранения устойчивости адаптивных систем в этих условиях разрабатываются различные способы робастификации («огрубления») алгоритмов адаптации. Две такие модификации для предложенных в разделе 3 алгоритмов представлены в данном разделе.

Обратимся к случаю действия аддитивных возмущений в канале связи, т.е. будем считать, что вместо истинного сигнала с выхода ведущей системы y на ведомую систему поступает сигнал с помехой (2.2).

Для обеспечения устойчивости процесса адаптации в этих условиях предлагается адаптивный набюдатель с расширенным сигналом ошибки, который описывается уравнениями

— *настраиваемый наблюдатель*

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + \varphi_0(y_r) + b\varphi(y_r)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta} + k(y_r - \widehat{y}), \quad \widehat{y} = c^{\mathrm{T}}\widehat{x}, \tag{4.1}$$

— *формирователь сигнала расширенной ошибки*

$$\overline{e} = y_r - \widehat{y} + H(p)\left[\overline{\varphi}(t)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta}\,\right] - \overline{\omega}(t)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta}, \tag{4.2}$$

где $\overline{\varphi}(t) = \varphi(y_r(t))$, $\overline{\omega}(t) = H(p)[\overline{\varphi}(t)]$,

— *робастифицированный алгоритм адаптации*

$$\dot{\widehat{\theta}} = \gamma\overline{\omega}(t)\overline{e} - \alpha(\widehat{\theta})\widehat{\theta}, \tag{4.3}$$

в котором функция $\alpha(\widehat{\theta})$ удовлетворяет соотношениям

$$\alpha(\widehat{\theta}) = \begin{cases} 0, & |\widehat{\theta}| < \theta^*, \\ \left(\dfrac{|\widehat{\theta}|}{\theta^*} - 1\right), & \theta^* \le |\widehat{\theta}| \le 2\theta^*, \\ 1, & |\widehat{\theta}| > 2\theta^* \end{cases} \tag{4.4}$$

с некоторой положительной постоянной θ^*.

Сформулируем результат о свойствах робастифицированной замкнутой системы.

Теорема 4. *Замкнутая система, состоящая из ведущей системы* (2.1), (2.2), *настраиваемого наблюдателя* (4.1), *формирователя расширенного сигнала ошибки* (4.2) *и алгоритма адаптации* (4.3), (4.4), *обладает следующими свойствами:*

i) для любых начальных условий и любых $\gamma > 0$, $\theta^* > 0$ *все переменные в замкнутой системе ограничены и вектор оценок* $\widetilde{\theta}$ *попадает в предельное множество*

$$D = \left\{\widetilde{\theta} : |\widetilde{\theta}|^2 \le \max\left[(|\theta| + 2\theta^*)^2, \gamma\|\xi + \xi_e\|_\infty^2 + |\theta|^2\right]\right\}, \tag{4.5}$$

где ограниченная переменная ξ_e *удовлетворяет уравнениям*

$$\dot{\Xi}_e = F\Xi_e + \varphi_0(y) - \varphi_0(y_r) + b\big(\varphi(y) - \varphi(y_r)\big)^{\mathrm{T}}\theta - k\xi, \quad \xi_e = c^{\mathrm{T}}\Xi_e; \tag{4.6}$$

ii) если $\xi(t) \equiv 0$ *и* $\theta^* > |\theta|$, *то, кроме (i), обеспечивается затухание* (3.8) *к нулю;*

iii) если, кроме того, вектор-функция $\varphi(t)$ *удовлетворяет условию ПВ, а передаточная функция* $H(s)$ *минимально-фазовая, то достигается сходимость* (3.9).

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении.

Для распространения полученного результата на случай присутствия шумов измерений выхода ведущей системы (3.17), (2.2), используем адаптивный наблюдатель с расширенным сигналом ошибки, описываемый уравнениями:

— *настраиваемый наблюдатель*

$$\dot{\widehat{x}} = A(y_r)\widehat{x} + \varphi_0(y_r) + b\varphi^{\mathrm{T}}(y_r)\widehat{\theta} + k(y_r)(y_r - \widehat{y}), \quad \widehat{y} = c^{\mathrm{T}}\widehat{x}, \tag{4.7}$$

— *формирователь сигнала расширенной ошибки*

$$\overline{e} = y_r - \widehat{y} + c^{\mathrm{T}}\overline{\eta}, \tag{4.8}$$

$$\dot{\overline{\eta}} = \overline{G}(t)\overline{\eta} - \overline{\Omega}\,\dot{\widehat{\theta}}, \quad \overline{\eta} \in \mathbb{R}^n, \tag{4.9}$$

$$\dot{\overline{\Omega}} = \overline{G}(t)\overline{\Omega} + b\overline{\varphi}(t)^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\Omega} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{4.10}$$

где $\overline{G}(t) = A(y_r(t)) - k(y_r(t))c^{\mathrm{T}}$,
— *робастифицированный алгоритм адаптации*

$$\dot{\widehat{\theta}} = \gamma\overline{\omega}(t)\overline{e} - \alpha(\widehat{\theta})\widehat{\theta}, \tag{4.11}$$

где $\overline{\omega}(t) = c^{\mathrm{T}}\,\overline{\Omega}(t)$, а функция $\alpha(\widehat{\theta})$ удовлетворяет условию (4.4).

Сформулируем теорему о робастифицированном адаптивном наблюдателе в условиях помех.

Теорема 5. *Замкнутая система, состоящая из ведущей системы* (3.17), (2.2), *настраиваемого наблюдателя* (4.7), *формирователя расширенного сигнала ошибки* (4.8)–(4.10) *и алгоритма адаптации* (4.11), (4.4), *обладает следующими свойствами:*

i) при любых начальных условиях и любых $\gamma > 0$, $\theta^* > 0$ все переменные в замкнутой системе ограничены и параметрическая ошибка $\widetilde{\theta}$ попадает в предельное множество

$$D = \Big\{\widetilde{\theta} : |\widetilde{\theta}|^2 \le \max\big((|\theta| + 2\theta^*)^2, \gamma\|\xi + \xi_y\|_\infty^2 + |\theta|^2\big)\Big\}, \tag{4.12}$$

где ограниченная переменная ξ_y удовлетворяет уравнениям:

$$\dot{\Xi}_y = \overline{G}(t)\Xi_y + \varphi_0(y) - \varphi_0(y_r) + b\big(\varphi(y) - \varphi(y_r)\big)^{\mathrm{T}}\theta - k(y_r)\xi + \big(A(y) - A(y_r)\big)x,$$
$$\xi_y = c^{\mathrm{T}}\Xi_y;$$

ii) если $\xi(t) \equiv 0$ и $\theta^* > |\theta|$ то в дополнение к (i) *обеспечивается стремление к нулю* (3.8)*;*

iii) если, кроме того, вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию ПВ, а передаточная функция $H(s)$ – минимально-фазовая, то обеспечивается сходимость (3.9).

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении.

5. Пример. Передача информации на основе адаптивной синхронизации управляемых хаотических систем Лоренца

5.1. Синтез адаптивного наблюдателя с расширенным сигналом ошибки для системы Лоренца

Рассмотрим в качестве примера применение предложенного метода адаптивной синхронизации к хаотической системе Лоренца.

Пусть в качестве ведущей системы используется *система Лоренца*, описываемая следующими уравнениями [8, 13, 23, 43]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma x_2 - \sigma x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_3 + \theta x_1, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_3 + x_1 x_2. \end{cases} \tag{5.1}$$

Постоянные параметры β, σ считаем известными (т.е. их значения могут быть использованы при синтезе ведомой системы), а параметр θ является переменным, его значения меняются в зависимости от передаваемой полезной информации (передаваемого сообщения) и должны быть восстановлены наблюдателем. Предполагается также, что компонент x_1 вектора состояния служит выходным сигналом ведущей системы, $y \equiv x_1$.

Очевидно, что система (5.1) является частным случаем (3.17), в котором:

$$\begin{aligned} &A(y) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & -1 & -y \\ 0 & y & -\beta \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ &\varphi_0(y) = [0, 0, 0], \quad \varphi(y) = y, \quad c^{\mathrm{T}} = [1, 0, 0]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что предположение 4 для данной системы выполняется. Как следует из предположения 3, чтобы применить теорему 3, нужно найти вектор-функцию $k(y) \in \mathbb{R}^3$ такую, чтобы система $\dot{x} = \bigl(A(y) - k(y)c^{\mathrm{T}}\bigr)\,x$, $y = c^{\mathrm{T}}x$ была асимптотически устойчивой. Для этого выберем $k(y) \equiv k = [0, -\sigma, 0]^{\mathrm{T}}$. Тогда матричная функция $G(y) = A(y) - k(y)c^{\mathrm{T}}$ представляет собой сумму диагональной и кососимметрической матриц:

$$G(y) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -\sigma & -1 & -y \\ 0 & y & -\beta \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Легко убедиться, что при таком выборе предположение 3 выполняется. Действительно, рассмотрим систему $\dot{x} = G(c^{\mathrm{T}}x)x$, у которой матрица $G(y)$ определяется выражением (5.3), и введем функцию Ляпунова $V(x) = \dfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}x$. Дифференцируя функцию $V\bigl(x(t)\bigr)$ по t, получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\bigl(G(c^{\mathrm{T}}x)^{\mathrm{T}} + G(c^{\mathrm{T}}x)\bigr)x = \\ &= x^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} x = -\sigma x_1^2 - x_2^2 - \beta x_3^2 \le c_3 |x|^2 \end{aligned}$$

при $c_3 = \min\{\sigma, 1, \beta\}$, откуда непосредственно вытекает *экспоненциальная устойчивость* системы $\dot{x} = G(c^{\mathrm{T}}x)x$. Таким образом, предположения 3 и 4 выполнены, что позволяет применить теорему 3. Настраиваемый наблюдатель для ведущей системы в форме системы Лоренца (5.1) описывается уравнением (3.18) с матрицами вида (5.2). Для оценивания неизвестного параметра θ (и, следовательно, для восстановления сообщения) в наблюдателе реализуется алгоритм настройки (3.20)–(3.23) с $n = 3$. При значительном уровне помех в канале связи следует использовать робастифицированный алгоритм адаптации (4.3), (4.4). Рассмотрим некоторые численные примеры применения предложенного метода для передачи сообщений на основе модуляции генератора Лоренца.

Используем алгоритм (3.18), (3.20)–(3.23) для восстановления значения параметра θ ведущей системы (5.1). Выше предполагалось, что θ является неизвестной постоянной величиной. В системах передачи информации параметр θ меняется в соответствии с передаваемыми данными, $\theta = \theta(t)$. Поэтому применимость предложенного метода будет зависеть от скорости настройки параметра $\widehat{\theta}(t)$ наблюдателя. Для ее определения воспользуемся численным моделированием.

В рассматриваемом примере имеется система, заданная следующими уравнениями:

— *в е д у щ а я с и с т е м а:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma x_2 - \sigma x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_3 + r\big(1 + \vartheta(t)\big)x_1, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_3 + x_1 x_2, \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \tag{5.4}$$

где r — известная постоянная, $\vartheta(t)$ – переменный параметр. В системах связи, использующих модуляцию хаотического генератора, $\vartheta(t)$ играет роль *информационного сигнала*. В рассматриваемом примере имеет место $\theta(t) = r\big(1 + \vartheta(t)\big)$;

— *н а с т р а и в а е м ы й н а б л ю д а т е л ь:*

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}}_1 = \sigma \widehat{x}_2 - \sigma \widehat{x}_1, \\ \dot{\widehat{x}}_2 = -\widehat{x}_2 - y_r(t)\widehat{x}_3 + \sigma e(t) + r\big(1 + \widehat{\vartheta}(t)\big)y_r(t), \\ \dot{\widehat{x}}_3 = -\beta x_3 + y_r(t)\widehat{x}_2, \\ e(t) = y_r(t) - \widehat{x}_1(t), \end{cases} \tag{5.5}$$

где $e(t)$ служит *ошибкой наблюдения*, $y_r(t)$ – измеряемый сигнал на входе ведомой системы (для систем связи y_r является *принимаемым сигналом*). При отсутствии возмущений выполнено $y_r(t) \equiv y(t)$;

— *ф о р м и р о в а т е л ь с и г н а л а р а с ш и р е н н о й о ш и б к и:*

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \sigma \Omega_2 - \sigma \Omega_1, \\ \dot{\Omega}_2 = -\sigma \Omega_1 - \Omega_2 + y_r(t)\Omega_3, \\ \dot{\Omega}_3 = -\beta \Omega_3 + y_r(t)\Omega_2, \\ \omega(t) = \Omega_1(t), \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \sigma \eta_2 - \sigma \eta_1 - \Omega_1(t)\dot{\widehat{\vartheta}}(t), \\ \dot{\eta}_2 = -\sigma \eta_1 - \eta_2 + y_r(t)\eta_3 - \Omega_2(t)\dot{\widehat{\vartheta}}(t), \\ \dot{\eta}_3 = -\beta \eta_3 + y_r(t)\eta_2 - \Omega_3(t)\dot{\widehat{\vartheta}}(t); \end{cases} \tag{5.7}$$

— *а л г о р и т м а д а п т а ц и и:*

$$\begin{gathered} \widehat{e}(t) = e(t) + c^{\mathrm{T}}\eta(t), \\ \dot{\widehat{\vartheta}} = \gamma \omega \widehat{e}, \quad \widehat{\vartheta}(0) = \widehat{\vartheta}_0, \end{gathered} \tag{5.8}$$

где положительный параметр $\gamma > 0$ играет роль *коэффициента усиления* алгоритма.

При моделировании взяты следующие значения параметров системы (5.5)–(5.8): $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $r = 97$, $\gamma = 0{,}45$. В качестве информационного сигнала $\vartheta(t)$ использована «прямоугольная волна». Результаты представлены на рис. 1, 2.

График сигнала на входе ведомой системы $y_r(t)$ показан на рис. 1,*а*. На рис. 1,*б* представлены графики исходного информационного сигнала $\vartheta(t)$ и сигнала, восстановленного адаптивным наблюдателем (5.5)–(5.8).

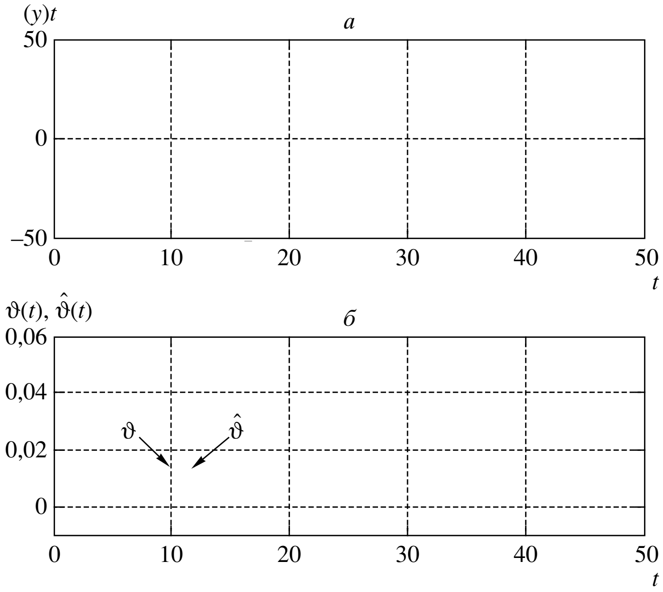

Рис. 1. *а* – хаотический сигнал на входе ведомой системы $y_r(t)$; *б* – информационный сигнал в ведущей системе $\vartheta(t)$ и его оценка $\widehat{\vartheta}(t)$ ведомой системой. Алгоритм (5.5)–(5.8).

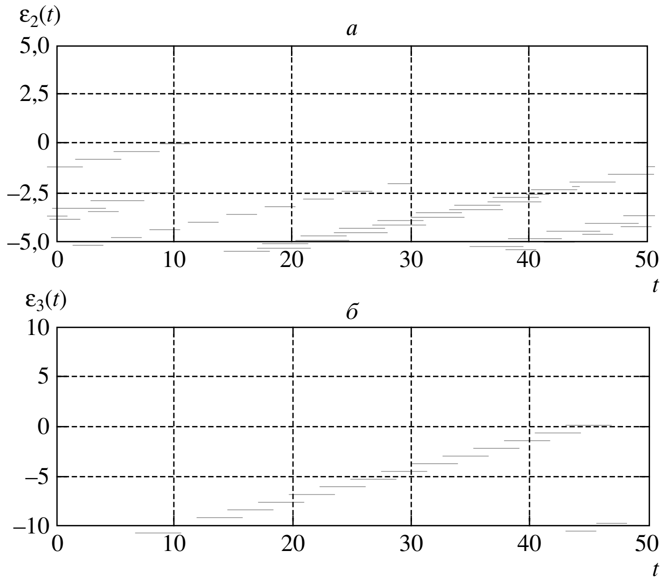

Рис. 2. Графики ошибок оценок состояния $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ по алгоритму (5.5)–(5.8).

На рис. 2 отражены компоненты вектора ошибки оценок состояния $\varepsilon_i(t) = x_i(t) - \widehat{x}_i(t)$, где $i = 1, 2$. Результаты моделирования показывают, что процесс адаптации по предложенному алгоритму протекает с высокой скоростью и что время идентификации неизвестного параметра по данному алгоритму близко ко времени, за которое происходит синхронизация процессов ведущей и ведомой систем.

6. Заключение

Получен общий метод нелинейной адаптивной синхронизации хаотических систем, основанный на изложенном в [17, 20, 21, 25] подходе и предложенных в [22, 31, 32] алгоритмах адаптации. Данный метод дает возможность использовать *непассифицируемые* нелинейные системы, в частности системы, относительный порядок которых превышает единицу, в качестве источников хаотических сигналов для передачи информации на основе адаптивной синхронизации. Применение предложенного метода позволит расширить класс источников хаотического сигнала и повысить скрытность передаваемой информации.

В работе предложены два вида алгоритмов адаптивной синхронизации: алгоритмы, использующие адаптивные наблюдатели с расширенным сигналом ошибки, и алгоритмы настройки повышенного порядка. Для случая отсутствия шумов (искажений) в канале связи установлены условия, обеспечивающие асимптотическую сходимость процесса идентификации (теоремы 1–3). Предложена также робастная модификация алгоритмов адаптивной синхронизации, предназначенная для использования в системах с шумом в канале связи (теоремы 4–5).

Теоретические результаты иллюстрируются примером адаптивной синхронизации управляемых хаотических систем Лоренца. Компьютерным моделированием получены реализации процессов в системе, показывающие высокое быстродействие алгоритма адаптивной синхронизации и идентификации параметров, что говорит о перспективе применения предложенных алгоритмов для передачи информации модуляцией хаотических сигналов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Как известно [22, 38], с точностью до экспоненциально затухающего слагаемого, зависящего от начальных условий, можно представить расширенный сигнал ошибки $\widehat{e}$ (3.6) следующей эквивалентной моделью:

$$\widehat{e} = \omega(t)\widetilde{\theta}. \tag{П.1}$$

При этом производные от экспоненциально затухающих членов останутся таковыми и при дифференцировании, что обосновывает корректность дифференцирования равенства (П.1). Вычисляя призводную от функции Ляпунова $V(\widetilde{\theta}) = \dfrac{1}{2\gamma}\widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}$, в силу системы (3.5) и с учетом выражения (П.1) получим, что $\dot{V}(\widetilde{\theta}) = -\widehat{e}^2$. Из последнего выражения следует ограниченность переменной $\widehat{\theta}$. Так как правые части (2.1), (3.2), (3.5) локально-липшицевы по x, $\widehat{x}$, а $\widehat{\theta}$ равномерна по t [29], то отсюда следует, что $\widehat{e}(t)$ стремится к нулю. В силу ограниченности $\omega(t)$ из выражения (3.5) следует, что $\dot{\widehat{\theta}} \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, из выражения (3.6) получим, что $e - \widehat{e} \to 0$ и, следовательно, $e \to 0$, что доказывает справедливость утверждения i. Справедливость утверждения ii доказывается стандартным образом [22, 38].

Доказательство теоремы 3. Дифференцируя следующее выражение для вспомогательной ошибки $\delta = \varepsilon + \eta - \Omega\widetilde{\theta}$ и учитывая (3.19), (3.21), получим, что

$$\dot{\delta} = G\varepsilon + b\varphi^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + G\eta - \Omega\dot{\widehat{\theta}} - G\Omega\widehat{\theta} - b\varphi^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + \Omega\dot{\widehat{\theta}} = G\big(\varepsilon + \eta - \Omega\widetilde{\theta}\big) = G\delta.$$

Тогда расширенный сигнал ошибки, который определяется выражением (3.20), можно представить в виде $\widehat{e} = \omega^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + \delta_e$, в котором слагаемое $\delta_e = c^{\mathrm{T}}\delta$ экспоненциально убывает. Тогда, используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, можно показать ограниченность всех сигналов в контуре обратной связи, выполнение условия (3.8) и при выполнении условия ПВ – справедливость (3.9).

Доказательство теоремы 4. Дифференцируя по времени ошибку оценивания $\varepsilon = x - \widehat{x}$ с учетом уравнений (2.1), (2.2), (4.1), после несложных преобразований получим выражение

$$\dot{\varepsilon} = F\varepsilon + b\overline{\varphi}(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + \Delta(t), \tag{П.2}$$

где $\Delta(t) = \varphi_0(y) - \varphi_0(y_r) + b\big(\varphi(y) - \varphi(y_r)\big)^{\mathrm{T}}\theta - k\xi$.

Поэтому расширенный сигнал ошибки $\overline{e}$, заданный уравнением (4.2), принимает вид

$$\overline{e} = \overline{\varpi}(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + \xi_e + \xi, \tag{П.3}$$

где ограниченная переменная ξ_e удовлетворяет уравнениям (4.6).

Используем функцию Ляпунова вида $V(\widetilde{\theta}) = \dfrac{1}{2}\widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}$. Ее производная по времени в силу системы (4.3), (П.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(\widetilde{\theta}) = \widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\big(-\gamma\overline{\varpi e} - \alpha\widetilde{\theta} + \alpha\theta\big) = \widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\big(-\gamma\overline{\varpi}\,\overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} - \gamma\overline{\varpi}(\xi_e + \xi) - \alpha\widetilde{\theta} + \alpha\theta\big) \leq \\
&\leq -\gamma\big|\overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}\big|^2 + -\sigma\big|\widetilde{\theta}\big|^2 + \gamma\big|\overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}\big|\big\|\xi_e + \xi\big\|_\infty + \alpha\big|\widetilde{\theta}\big|\,|\theta| \leq \\
&\leq -\frac{1}{2}\gamma\big|\overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}\big|^2 - \frac{1}{2}\alpha\big|\widetilde{\theta}\big|^2 + \frac{1}{2}\gamma\,\|\xi_e + \xi\|_\infty^2 + \frac{1}{2}\alpha|\theta|^2 \leq \\
&\leq -\frac{1}{2}\alpha\big|\widetilde{\theta}\big|^2 + \frac{1}{2}\gamma\big\|\xi_e + \xi\big\|_\infty + \frac{1}{2}\alpha|\theta|^2.
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует ограниченность всех переменных, входящих в замкнутую систему, и выполнение неравенства, входящего в правую часть (4.5).

Если $\xi(t) \leq 0$ и $\theta^* > |\theta|$, то для производной по времени от функции Ляпунова $V(\widetilde{\theta}) = \dfrac{1}{2}\widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}$ выполнено $\dot{V}(\widetilde{\theta}) = -\gamma\big|\overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}\big|^2 + \gamma\sigma(\widehat{\theta})\widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\widehat{\theta} \leq -\gamma\big|\overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}\big|^2$. Из последнего неравенства следует справедливость (3.8).

Доказательство теоремы 5. Дифференцируя по времени ошибку оценивания $e = x - \widehat{x}$ с учетом (3.17), (2.2), (4.7), после несложных преобразований получим выражение

$$\dot{\varepsilon} = \overline{G}(t)\varepsilon + b\overline{\varphi}(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + \Delta(t), \tag{П.4}$$

где $\Delta(t) = \big(A(y) - A(y_r)\big)x + \varphi_0(y) - \varphi_0(y_r) + b\big(\varphi(y) - \varphi(y_r)\big)^{\mathrm{T}}\theta - k(y_r)\xi$. Дифференцируя теперь вспомогательную ошибку $\Xi_\delta = \varepsilon + \overline{\eta} - \overline{\Omega}\widetilde{\theta}$, с учетом (П.4), (4.12), (4.10) получим

$$\begin{aligned}
&\dot{\Xi}_y = \overline{G}(t)\Xi_y + \varphi_0(y) - \varphi_0(y_r) + b\Big(\varphi(y) - \varphi(y_r)\Big)^{\mathrm{T}}\theta - \\
&- k(y_r)\xi + \Big(A(y) - A(y_r)\Big)x, \quad \xi_y = c^{\mathrm{T}}\Xi_y.
\end{aligned}$$

Таким образом, расширенный сигнал ошибки $\overline{e}$, определенный выражением (4.8), можно представить в виде $\overline{e} = \overline{\varpi}^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta} + \xi_\delta + \xi$, где $\xi_\delta = c^{\mathrm{T}}\Xi_\delta$. Используя теперь подход, принятый при доказательстве теоремы 4, убеждаемся в справедливости утверждений теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
2. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
3. *Пиковский А.Б., Розенблюм М.Б., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
4. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000.
5. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1978.
6. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821–823.
7. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. Singapore: World Scientific Publishers, 1998.
8. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999.
9. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Заруб. радиоэлектроника. 1997. № 10. С. 4–26.
10. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит. 2002.
11. IEEE Trans. Circ. Syst. Special issue on applications of chaos in modern communication systems / Eds. L. Kocarev, G.M. Maggio, M. Ogorzalek et al. 2001. V. 48. № 12.
12. Int. J. Circuit Theory Appl. Special issue: Commun. Inform. Proc. Control Using Chaos / Eds. M. Hasler, J. Vandewalle. 1999. V. 27. № 6.
13. IEEE Trans. Circuits Syst., Special issue: Chaos control and synchronization / Eds. M. Kennedy, M. Ogorzałek, 1997. V. 44. № 10.
14. Int. J. Circuit Theory Appl. Special issue: Communications, Information Processing and Controling Chaos / Eds. M. Hasler, J. Vandewalle. 1999. V. 27. № 6.
15. *Kennedy M.P., Kolumban G.* Digital Communications Using Chaos / Control. Chaos Bifurcat. in Engin. Syst. / Ed. G. Chen, CRC Press, 1999. P. 477–500.
16. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом. Методы и приложения. II // АиТ. 2004. № 4. С. 3–34.
17. *Fradkov A.L.* Adaptive synchronization of hyper-minimum-phase systems with nonlinearities / Proc. 3rd IEEE Mediterranean Conf. on New Directions Control. 1995. V. 1. P. 272–277.
18. *Markov A.Yu., Fradkov A.L.* Adaptive synchronization of coupled chaotic systems // Proc. Int. Conf. "Fractals and Chaos in Chemical Engineering". Rome, Sept. 2–5, 1996. P. 153–154.
19. *Wu C., Yang Y., Chua L.* On adaptive synchronization and control of nonlinear dynamical systems // Int. J. Bifurcat. Chaos. 1996. V. 6. P. 455–471.
20. *Fradkov A.L., Markov A.Yu.* Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification // IEEE Trans. Circ. Syst. – I. 1997. № 10. P. 905–912.
21. *Fradkov A.L., Nijmeijer H., Markov A.Yu.* Adaptive observer-based synchronization for communications // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2000. V. 10. № 12. P. 2807–2814.
22. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными системами. СПб.: Наука, 2000.
23. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб: Наука, 2001.
24. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.
25. *Andrievsky B.R., Fradkov A.L.* Information transmission by adaptive synchronization with chaotic carrier and noisy channel // Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control. Sydney. 2000. P. 1025–1030.
26. *Andrievsky B.R.* Adaptive synchronization methods for signal transmission on chaotic carriers // Math. Comput. Simulat. 2002. V. 58. Issue 4–6. P. 285–293.

27. *Huijberts H., Nijmeijer H., Willems R.* System identification in communication with chaotic systems // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2000. V. 47. № 6. P. 800–808.
28. *Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // АиТ. 1996. № 2. С. 3–33.
29. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and adaptive control design. N.Y.: John Willey and Sons, 1995.
30. *Marino R.* Adaptive observers for single output nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. V. AC-35. P. 1054–1058.
31. *Nikiforov V.O.* Robust high-order tuner of simplified structure // Automatica. 1999. V. 35. № 8. P. 1409–1415.
32. *Nikiforov V.O., Voronov K.V.* Adaptive backstepping with high-order tuner // Automatica. 2001. V. 37. P. 1953–1960.
33. *Ge S.S., Wang C.* Adaptive control of uncertain Chua's circuits // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 2000. V. 47. № 9. P. 1397–1402.
34. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control – Stability, Convergence, and Robustness. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.
35. *Fradkov A.L., Nikiforov V.O., Andrievsky B.R.* Adaptive observers for nonlinear nonpassifiable systems with application to signal transmission // Proc. 41th IEEE Conf. Dec. Control. Las Vegas. 2002. P. 4706–4711.
36. *Nikiforov V.O., Fradkov A.L., Andrievsky B.R.* Adaptive observer-based synchronization of nonlinear nonpassifiable systems // arXiv.org e-Print archive, http://arxiv.org/abs/math/0509650, 2005.
37. *Fradkov A.L., Nikiforov V.O., Andrievsky B.* Text and image transmission based on adaptive synchronization of nonlinear nonpassifiable chaotic systems // Prepr. 1st IFAC Conf. Anal. Control Chaotic Syst. "Chaos 06", June 28–30, Reims, France, 2006.
38. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.
39. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Адаптивные системы управления с расширенным сигналом ошибки // АиТ. 1994. № 9. С. 3–22.
40. *Morse A.S.* High-order Parameter Tuners for Adaptive Control of Nonlinear Systems / Syst., Models and Feedback: Theory Appl. Isidori, A. and T.J. Tarn (Eds.), N.Y.: Birkhäuser, 1992.
41. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
42. *Ioannou P.A., Kokotović P.V.* Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // Automatica. 1984. V. 20. № 5. P. 583–594.
43. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H.* Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications // IEEE Trans. Circuits Syst. II. 1993. V. 40. № 18. P. 626–633.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 04.12.2006