И. А. Джунусов, А. Л. Фрадков, Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье, *Автомат. и телемех.*, 2009, выпуск 7, 111–126

Автоматика и телемеханика, № 7, 2009

Адаптивные и робастные системы

PACS 02.30.Yy, 01.60.+q

© 2009 г. И.А. ДЖУНУСОВ
(Санкт-Петербургский государственный университет),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

АДАПТИВНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ СЕТИ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ЛУРЬЕ[1]

Ставится задача адаптивной синхронизации сети взаимосвязанных динамических подсистем с ведущей подсистемой (лидером). Рассматриваются сети с подсистемами в форме Лурье (линейная часть плюс нелинейность) трех типов: с липшицевыми нелинейностями, с нелипшицевыми нелинейностями из некоторого класса и сети, в которых ведущая подсистема структурно согласована с ведомыми подсистемами. Методом скоростного градиента синтезированы децентрализованные алгоритмы адаптивного управления. Получены условия синхронизируемости на основе метода пассификации и леммы Якубовича-Калмана. В отличие от известных публикаций рассмотрен случай неполных измерений и управлений, входящих не во все уравнения подсистем. Результаты иллюстрируются на примере цепей Чуа.

1. Введение

В последнее время в литературе наблюдается повышенный интерес к задачам управления сетями взаимосвязанных систем. Это вызвано не только относительной новизной темы, но и практической значимостью, поскольку многие физические объекты могут рассматриваться как взаимосвязанные системы. К ним можно отнести телекоммуникационные сети, молекулярные ансамбли, биологические объекты, трофические цепочки, встраиваемые системы, коллективы роботов или транспортных средств и т.д. Разработка подобных систем связана со стремительным развитием информационных и коммуникационных технологий, основанных, в частности, на беспроводной связи и беспроводных сенсорах. Однако синтез регуляторов, обеспечивающих синхронизацию, затруднен сложностью и пространственной распределенностью подсистем, а также ограничениями на обмен информацией между ними.

Одним из средств решения подобных задач является децентрализация: регулятор каждой подсистемы использует только локальные измерения и, возможно, информацию о цели управления. Хотя задачи децентрализованного управления хорошо исследованы [1–5], постоянно возникают все более сложные задачи, например управление через канал с ограниченной пропускной способностью.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00775), научной программы Президиума РАН № 22 (проект 1.8) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ2387.2008.1).

Несмотря на большой интерес к задачам управления сетями, пока решен только ограниченный класс таких задач. К примеру, в ряде существующих работ, в основном, рассматриваются линейные модели подсистем [6, 7]. Кроме того, в статьях о синхронизируемости и стабилизируемости сетей [8–11] предполагается, что все состояние отдельной подсистемы доступно измерению, а также, что управление входит во все уравнения подсистем.

В данной работе рассматриваются сети идентичных объектов, описываемых уравнениями в форме Лурье, т.е. системами дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых разбиты на линейные и нелинейные составляющие. Связи между объектами не предполагаются линейными, они могут быть нелинейными. В отличие от известных работ, например [10, 11], считается, что измерению доступна лишь некоторая функция состояния, а не все состояние отдельной подсистемы, а также, что управление входит не во все уравнения подсистем. Считается, что связи между объектами зависят от вектора неизвестных параметров. Кроме того, параметры объектов сети в случае согласованности также считаются зависящими от вектора неизвестных параметров. Выделяется ведущая (лидирующая) подсистема, являющаяся изолированной, т.е. не связанной с остальными. Функция управления ведущей подсистемы считается известной. Ставится задача нахождения децентрализованного алгоритма адаптивного управления и условий, обеспечивающих синхронизацию, т.е. сближение решения каждой подсистемы с решением ведущей подсистемы. Цель управления должна достигаться для каждого вектора неизвестных параметров из некоторого класса. Связи между подсистемами считаются липшицевыми.

Рассматриваются три случая уравнений подсистем: случай подсистем с липшицевыми нелинейностями, случай подсистем с нелипшицевыми нелинейностями, для которых выполнено некоторое условие монотонности, и случай подсистем, для которых выполнено свойство согласованности структуры объектов сети со структурой ведущей подсистемы. Поставленная задача решается с помощью результатов, изложенных в [3, 4, 12–14]. Алгоритм адаптации синтезируется методом скоростного градиента. Получена оценка на константы Липшица взаимосвязей, обеспечивающая достижение цели управления при выполнении дополнительных условий, а именно: при гипер-минимально-фазовости некоторых передаточных функций в первых двух случаях и при строгой пассивности ведущей подсистемы в третьем случае.

Полученные результаты иллюстрируются примером синхронизации нескольких взаимосвязанных цепей Чуа, проявляющих хаотическое поведение. Проведено компьютерное моделирование, подтверждающее теоретические результаты.

2. Формальная постановка задачи

Рассмотрим сеть S, состоящую из d взаимосвязанных подсистем S_i, $i = 1, \dots, d$. Пусть уравнение подсистемы S_i имеет следующий вид:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + \varphi_0(x_i) + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x_i - x_j), \quad y_i = C^{\mathrm{T}} x_i, \quad i = 1, \dots, d, \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^1$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1$, $y_i \in \mathbb{R}^l$. Функции $\varphi_{ij}(\cdot)$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$, описывают взаимосвязи между подсистемами, а функция $\varphi_0(\cdot)$ описывает нелинейность в подсистеме S_i, $i = 1, \dots, d$. Будем считать, что $\varphi_{ii}(0) = 0$, $\alpha_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, d$. Не умаляя общности, можно считать, что если для некоторых i, j функция $\varphi_{ij}(x) \equiv 0$, то $\alpha_{ij} = 0$, и наоборот. Пусть матрицы A, B, C и функция $\varphi_0(\cdot)$ известны, а функции $\varphi_{ij}(\cdot)$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$, зависят от вектора неизвестных параметров $\xi \in \Xi$, где Ξ – известное множество.

Под изолированной подсистемой будем понимать подсистему с отброшенными связями: $\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + \varphi_0(x_i)$, $y_i = C^{\mathrm{T}} x_i$, $i = 1, \dots, d$.

Также рассмотрим лидирующую (ведущую) подсистему вида

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + B\overline{u} + \varphi_0(\overline{x}), \quad \overline{y} = C^{\mathrm{T}}\overline{x}, \tag{2}$$

считая, что $\overline{u} \in \mathbb{R}^1$ – известное заданное управление.

Пусть цель управления состоит в стремлении траекторий всех подсистем к траектории ведущей подсистемы:

$$\lim_{t\to+\infty} (x_i(t) - \overline{x}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \tag{3}$$

Задача адаптивной синхронизации состоит в нахождении функций децентрализованного управления $u_i = \mathcal{U}_i(y_i, t)$, обеспечивающих достижение цели управления (3) для всех значений вектора неизвестных параметров $\xi \in \Xi$.

3. Синтез управления

Положив $z_i = x_i - \overline{x}$, $\tilde{u}_i = u_i - \overline{u}$, придем к уравнениям вспомогательных подсистем (уравнениям ошибок):

$$\begin{aligned} &\dot{z}_i = Az_i + B\tilde{u}_i + \varphi_0(x_i) - \varphi_0(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x_i - x_j), \\ &\tilde{y}_i = C^{\mathrm{T}} z_i, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \tag{4}$$

Зададим линейный по выходу регулятор вспомогательной подсистемы с настраиваемыми коэффициентами в следующем виде:

$$\tilde{u}_i = \theta_i^{\mathrm{T}}(t)\tilde{y}_i, \quad \theta_i(t) \in \mathbb{R}^l, \quad i = 1, \dots, d,$$

где $\tilde{y}_i$ определено в (4), $\tilde{y}_i = y_i - \overline{y}$, а $\theta_i(t)$ являются настраиваемыми параметрами.

Найдем алгоритм адаптации $\theta_i(t), i = 1, \dots, d$, с помощью метода скоростного градиента. Согласно этому методу нужно выбрать неотрицательную целевую функцию, стремление к нулю которой будет эквивалентно выполнению цели управления (3). В данном случае можно взять целевую функцию следующего вида[2]:

$$Q(z_i) = \frac{1}{2} z_i^{\mathrm{T}} H z_i, \quad H = H^{\mathrm{T}} > 0.$$

Возьмем производную функции $Q(z_i)$ по t в силу изолированной подсистемы:

$$\omega_i(x_i, \overline{x}) = z^{\mathrm{T}} H \left(Az + B\theta_i^{\mathrm{T}}\tilde{y}_i + \varphi_0(x_i) - \varphi_0(\overline{x}) \right), \quad i = 1, \dots, d. \tag{5}$$

Теперь возьмем градиент по θ_i:

$$\nabla_{\theta_i} \omega_i(x_i, \overline{x}) = z_i^{\mathrm{T}} HB\tilde{y}_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

В последнем выражении скаляр $z_i^{\mathrm{T}}HB$ должен быть функцией вектора выходов $\tilde{y}_i(t)$. Поскольку $z_i^{\mathrm{T}}HB$ и $\tilde{y}_i = C^{\mathrm{T}} z_i$ линейны по z_i, то $z_i^{\mathrm{T}}HB$ должен быть линейной комбинацией выходов, т.е. $B^{\mathrm{T}}Hz_i = g^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}z_i$ для некоторого $g \in \mathbb{R}^l$ и любого $z_i \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что $HB = Cg$. Приходим к алгоритму адаптации

$$\dot{\theta}_i(t) = -g^{\mathrm{T}}\tilde{y}_i(t)\Gamma_i\tilde{y}_i(t), \quad i = 1, \dots, d, \tag{6}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i^{\mathrm{T}} > 0$ – положительно определенные матрицы порядка $l \times l$.

[2] Здесь и далее под нормой понимается евклидова норма; $H > 0$ означает, что симметричная матрица H положительно определена; $\mathrm{col}(a_1, \dots, a_k)$ обозначает $(a_1, \dots, a_k)^{\mathrm{T}}$, где $^{\mathrm{T}}$ – знак транспонирования.

Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, d$ регулятор подсистемы S_i имеет вид

$$u_i(t) = \theta_i^{\mathrm{T}}(t)[y_i(t) - \overline{y}(t)] + \overline{u}(t), \tag{7}$$

где $\theta_i(t)$ изменяется в соответствии с (6). Условия, при которых указанный регулятор обеспечивает достижение цели управления и ограниченность $\theta_i(t), i = 1, \ldots, d$, будут изложены в следующем разделе.

4. Условия синхронизируемости

4.1. Случай липшицевых нелинейностей

Для изложения условий синхронизируемости понадобится следующее определение гипер-минимально-фазовости, которое можно найти в [3, 12, 15].

Определение 1. *Пусть $W(s) = \beta(s)/\alpha(s)$ – правильная рациональная функция, $\beta(s)$ и $\alpha(s)$ – вещественные полиномы. $W(s)$ называется минимально-фазовой, если ее числитель $\beta(s)$ является гурвицевым многочленом. $W(s)$ называется гипер-минимально-фазовой, если она минимально-фазовая, а число $\lim\limits_{s\to+\infty} sW(s)$ положительно.*

Рассмотрим вещественные матрицы $H = H^{\mathrm{T}} > 0, g, \theta_*$ порядков $n \times n, l \times 1, l \times 1$ соответственно и число $\rho > 0$ такие, что:

$$HA_* + A_*^{\mathrm{T}} H < -\rho H, \quad HB = Cg, \quad A_* = (A + LI_n) + B\theta_*^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

Обозначим через $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$ минимальное и максимальное собственные числа матрицы H, через $\lambda_* = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$ – число обусловленности матрицы H.

Сделаем следующее предположение, основываясь на котором будем исследовать синхронизируемость.

A1. Функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi_{ij}(\cdot), i = 1, \ldots, d, \ j = 1, \ldots, d,$ – глобально липшицевы:

$$\|\varphi_0(x) - \varphi_0(x')\| \leqslant L\|x - x'\|, \quad L > 0,$$
$$\|\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(x')\| \leqslant L_{ij}\|x - x'\|, \quad L_{ij} > 0.$$

Теорема 1. *Пусть для каждого $\xi \in \Xi$ выполнено предположение* A1, *и для некоторого $g \in \mathbb{R}^l$ функция $g^{\mathrm{T}}\chi(s - L)$ гипер-минимально-фазовая, где передаточная функция $\chi(s) = C^{\mathrm{T}}(sI_n - A)^{-1}B$. Тогда существуют такие $H = H^{\mathrm{T}} > 0$, θ_* порядков $n \times n$, $l \times 1$ и положительное ρ, что выполнены* (8). *Если при этом для каждого $i = 1, \ldots, d$ выполнено неравенство*

$$\sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij} L_{ij}| < \frac{\rho}{2} \frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}, \tag{9}$$

то для каждого $i = 1, \ldots, d$ адаптивное управление (6), (7) *обеспечивает достижение цели*

$$\lim_{t\to+\infty} (x_i(t) - \overline{x}(t)) = 0, \tag{10}$$

при этом вектор настраиваемых параметров θ_i остается ограниченным на $[0, \infty)$ *для всех решений замкнутой системы* (1), (2), (7), (6).

З а м е ч а н и е 1. Обозначим через ρ_* степень устойчивости числителя функции $g^{\mathrm{T}}\chi(s-L)$. Из результатов [15] легко вывести, что если функция $g^{\mathrm{T}}\chi(s-L)$ гиперминимально-фазовая, то в качестве θ_* и ρ в (8) можно брать $\theta_* = -\varkappa g$ и любое $\rho : 0 < \rho < \rho_*$, где число $\varkappa > 0$ достаточно велико. Таким образом, неравенство (9) можно заменить на

$$\sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij} L_{ij}| < \gamma, \tag{11}$$

где $\gamma = \rho_*/(2\lambda_*)$.

З а м е ч а н и е 2. Будем понимать под графом связей сети S ориентированный граф, состоящий из множества вершин и множества дуг; эти множества определим следующим образом. Множество вершин имеет мощность d, где i-я вершина означает i-ю подсистему S_i. Дуга из i-й вершины к j-й вершине принадлежит множеству дуг, если $\varphi_{ji} \neq 0$. Определим под взвешенной входящей степенью вершины i величину $\sum\limits_{j=1}^{d} |\alpha_{ij} L_{ij}|$. Если каждое ненулевое слагаемое из последней суммы равно 1, то введенное определение взвешенной входящей степени вершины совпадает с определением входящей степени вершины ориентированного графа, которое можно найти, например, в [16]. Условие (9), таким образом, означает, что для каждой вершины взвешенная входящая степень меньше числа γ.

4.2. Случай $\varphi_0(x_i) = B\psi_0(y_i)$

Рассмотрим случай, когда $\varphi_0(x_i) = B\psi_0(y_i)$, $\psi_0\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^1$. Тогда подсистема (1) перепишется так:

$$\dot{x}_i = Ax_i + B(u_i + \psi_0(y_i)) + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x_i - x_j), \quad y_i = C^{\mathrm{T}} x_i, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{12}$$

а ведущая (лидирующая) подсистема так:

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + B(\overline{u} + \psi_0(\overline{y})), \quad \overline{y} = C^{\mathrm{T}}\overline{x}. \tag{13}$$

В (13) по-прежнему считаем, что $\overline{u} \in \mathbb{R}^1$ – заданное управление, которое считается известным.

Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть $G \in \mathbb{R}^l$. Функция $f\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^1$ называется G монотонно убывающей, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^l$ выполнено $(x-y)^{\mathrm{T}} G(f(x) - f(y)) \leqslant 0$.* В случае $l = 1$ и $G > 0$ это определение сводится к обычному определению монотонно убывающей функции.

Сделаем следующее предположение.

A2. Функции φ_{ij}, $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, d$, – глобально липшицевы:

$$\|\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(x')\| \leqslant L_{ij}\|x - x'\|, \quad L_{ij} > 0,$$

а функция $\psi_0(\cdot)$ такова, что обеспечены существование и единственность решений уравнений каждого объекта сети.

Нетрудно видеть, что можно воспользоваться результатами раздела 3 и выбрать в качестве управления (6), (7).

Рассмотрим вещественные матрицы $H = H^{\mathrm{T}} > 0, g, \theta_*$ порядков $n \times n$, $l \times 1$, $l \times 1$ соответственно и число $\rho > 0$ такие, что:

$$(14) \qquad HA_* + A_*^{\mathrm{T}} H < -\rho H, \quad HB = Cg, \quad A_* = A + B\theta_*^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что если в (8) положить $L = 0$, то получаются эти соотношения.

Т е о р е м а 2. *Пусть для каждого $\xi \in \Xi$ выполнено предположение* A2, *и для некоторого $g \in \mathbb{R}^l$ функция $g^{\mathrm{T}}\chi(s)$ гипер-минимально-фазовая, где передаточная функция $\chi(s) = C^{\mathrm{T}}(sI_n - A)^{-1}B$. Тогда существуют такие $H = H^{\mathrm{T}} > 0$, θ_* порядков $n \times n$, $l \times 1$ и положительное ρ, что выполнены* (14). *Пусть, кроме того, функция $\psi_0(\cdot)$ является g-монотонно убывающей и для каждого $i = 1, \dots, d$ выполнено неравенство*

$$(15) \qquad \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij} L_{ij}| < \gamma,$$

где $\gamma = \rho_*/(2\lambda_*)$, λ_* – число обусловленности матрицы H, ρ_* – степень устойчивости числителя функции $g^{\mathrm{T}}\chi(s)$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, d$ адаптивное управление (6), (7) *обеспечивает достижение цели*

$$(16) \qquad \lim_{t \to +\infty} (x_i(t) - \overline{x}(t)) = 0,$$

при этом вектор настраиваемых параметров θ_i остается ограниченным на $[0, \infty)$ *для всех решений замкнутой системы* (6), (7), (12), (13).

4.3. Синхронизация при условиях согласованности

Пусть лидирующая подсистема описывается следующим уравнением:

$$(17) \qquad \dot{\overline{x}} = A_M \overline{x} + B_M(\overline{u} + \psi_0(\overline{y})), \quad \overline{y} = C^{\mathrm{T}} \overline{x},$$

где $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^1$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^l$, $\psi_0 \colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^1$. По-прежнему считаем, что $\overline{u}$ – заданное известное управление. Будем также предполагать, что A_M, B_M, C и $\psi_0(\cdot)$ известны и не зависят от $\xi \in \Xi$, где Ξ – известное множество.

Рассмотрим сеть из d взаимосвязанных объектов, каждый из которых описывается следующим уравнением:

$$(18) \qquad \dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + B_M \psi_0(y_i) + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij} \varphi_{ij}(x_i - x_j), \quad y_i = C^{\mathrm{T}} x_i, \ i = 1, \dots, d,$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^1$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1$, $y_i \in \mathbb{R}^l$. Будем считать, что матрицы A, B и функции $\varphi_{ij}(\cdot)$, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$, зависят от вектора неизвестных параметров $\xi \in \Xi$.

Предположим, что выполнены условия согласованности [17, §7.2, п.2] структуры лидирующей подсистемы (17) со структурой (18) каждого объекта сети:

A3. Для каждого $\xi \in \Xi$ существуют вектор $\nu_* = \nu_*(\xi) \in \mathbb{R}^l$ и число $\theta_* = \theta_*(\xi) > 0$ такие, что справедливы равенства:

$$A_M = A + B\nu_*^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}, \quad B_M = \theta_* B.$$

Обозначим $\sigma_i(t) = \mathrm{col}(y_i(t), \overline{u}(t))$. Так же как и в [17], применим адаптивный регулятор

$$(19) \qquad u_i(t) = \tau_i(t)^{\mathrm{T}} \sigma_i(t), \quad i = 1, \dots, d,$$

где $\tau_i(t) \in \mathbb{R}^{l+1}$ – вектор настраиваемых параметров. Используя метод скоростного градиента, получим алгоритм адаптации вида:

$$(20) \qquad \dot{\tau}_i = -g^{\mathrm{T}}(y_i - \overline{y})\,\Gamma_i\,\sigma_i(t), \quad i = 1, \ldots, d,$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i^{\mathrm{T}} > 0$ – матрицы порядков $(l+1) \times (l+1)$, $g \in \mathbb{R}^l$.

Рассмотрим вещественные матрицы $H = H^{\mathrm{T}} > 0, g$ порядков $n \times n$ и $l \times 1$ соответственно и число $\rho > 0$ такие, что

$$(21) \qquad HA_M + A_M^{\mathrm{T}}H < -\rho H, \quad HB_M = Cg.$$

Обозначим $\chi(s) = C^{\mathrm{T}}(sI_n - A_M)^{-1}B_M$. В следующей теореме приведены достаточные условия адаптивной синхронизации.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{rank} B_M = 1$, *матрица* A_M *гурвицева и для некоторого* $g \in \mathbb{R}^l$ *выполняются следующие частотные неравенства*:

$$(22) \qquad \operatorname{Re} g^{\mathrm{T}}\chi(i\omega) > 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \operatorname{Re} g^{\mathrm{T}}\chi(i\omega) > 0$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}^1$. *Тогда существуют* $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ *и* $\rho > 0$ *такие, что выполнены* (21). *Пусть для каждого* $\xi \in \Xi$ *выполнены предположения* A2, A3, *функция* $\psi_0(\cdot)$ *является* g*-монотонно убывающей и пусть для каждого* $i = 1, \ldots, d$ *выполнено неравенство*

$$(23) \qquad \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij} L_{ij}| < \gamma,$$

где $\gamma = \rho_*/(2\lambda_*)$, λ_* *– число обусловленности матрицы* H, ρ_* *– степень устойчивости знаменателя функции* $g^{\mathrm{T}}\chi(s)$. *Тогда для каждого* $i = 1, \ldots, d$ *адаптивное управление* (19), (20), *обеспечивает достижение цели*

$$\lim_{t\to+\infty} (x_i(t) - \overline{x}(t)) = 0,$$

при этом вектор настраиваемых параметров τ_i *остается ограниченным на* $[0, \infty)$ *для всех решений замкнутой системы* (17), (18), (19), (20).

Замечание 3. Условия первой части теоремы 3 эквивалентны строгой пассивности передаточной функции $g^{\mathrm{T}}\chi(s)$ (см. [12]).

5. Пример. Сеть цепей Чуа

5.1. Описание и анализ системы

Цепь Чуа является хорошо известным примером простой нелинейной системы, имеющей сложное хаотическое поведение [18]. Траектории системы Чуа неустойчивы, хотя и ограничены, при этом система имеет форму Лурье. Применим теорему 2 к синхронизации в сети взаимосвязанных систем Чуа.

Будем моделировать цепь Чуа в безразмерной форме с внешним входом $\overline{u}$ следующим образом:

$$(24) \qquad \begin{cases} \dot{\overline{x}}_1 = p(\overline{x}_2 - \overline{x}_1 - f(\overline{x}_1)) + b\overline{u}, \\ \dot{\overline{x}}_2 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + \overline{x}_3, \\ \dot{\overline{x}}_3 = -q\overline{x}_2, \end{cases}$$
$$\overline{y}(t) = \overline{x}_1(t).$$

Здесь $\overline{x} = \mathrm{col}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ – вектор состояния подсистемы, $\overline{y}$ – измеряемый выход, $\overline{u}(t)$ – скалярное управление, $f(x) = m_1 x + \dfrac{m_0 - m_1}{2}(|x+1| - |x-1|)$ – нелинейность, а p, q, m_1, m_0 – параметры подсистемы.

Для того чтобы применить полученные результаты, найдем те значения параметров подсистемы, при которых будут обеспечены гипер-минимально-фазовость и g-монотонное убывание нелинейности. Положив $v(x) = -\dfrac{m_0 - m_1}{2}(|x+1| - |x-1| - - 2x)$, перепишем систему:

$$
\begin{cases}
\dot{\overline{x}}_1 = p\,(-(1+m_0)\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + v(\overline{x}_1)) + b\overline{u},\\
\dot{\overline{x}}_2 = \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + \overline{x}_3,\\
\dot{\overline{x}}_3 = -q\overline{x}_2,
\end{cases}
$$
$$
\overline{y}(t) = \overline{x}_1(t).
$$

Эта система имеет вид (13) с матрицами

$$
A = \begin{pmatrix} -(1+m_0)p & p & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -q & 0 \end{pmatrix},
$$

$B = \mathrm{col}(b, 0, 0)$, $C = \mathrm{col}(1, 0, 0)$ и нелинейностью $\psi_0(\overline{y}) = pv(\overline{y})/b$.

Нетрудно убедиться, что если $p/b > 0$, $g > 0$, $m_0 < m_1$, то $\psi_0(\cdot)$ будет g-монотонно убывать.

Передаточная функция, гипер-минимально-фазовость которой требуется в теореме 2, выглядит следующим образом:

$$
g^{\mathrm{T}}\chi(s) = gC^{\mathrm{T}}(sI - A)^{-1}B = gb\,\frac{s^2 + s + q}{s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0},
$$

где β_2, β_1, β_0 – некоторые числа. Для обеспечения гипер-минимально-фазовости этой функции будем выбирать $g > 0$, $b > 0$. Остается потребовать гурвицевость полинома $(s^2 + s + q)$, что эквивалентно $q > 0$.

Положим $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, 5$. Пусть $A, B, C, \varphi_0(\cdot)$ определены так, как указано выше. Рассмотрим пять взаимосвязанных цепей Чуа:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_i = Ax_i + B(u_i + \psi_0(y_i)) + \sum_{j=1}^{5} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(x_i - x_j),\\
&y_i = C^{\mathrm{T}}x_i, \quad i = 1, \ldots, 5,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где u_i, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}^1$. Обозначим $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x_i - x_j)$, $i = 1, \ldots, 5$, $j = 1, \ldots, 5$. Положим φ_{14}, $\varphi_{25}, \varphi_{32}, \varphi_{42}, \varphi_{45}, \varphi_{52}, \varphi_{53}$ равными $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Заметим, что $\varphi_{ii} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, 5$ (см. раздел 2). Далее положим:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{12} = (\sin(x_{11} - x_{21}), 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_{13} = (0, x_{12} - x_{32}, 0)^{\mathrm{T}},\\
&\varphi_{15} = (0, 0, \sin(x_{13} - x_{53}))^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_{21} = (x_{21} - x_{11}, 0, x_{23} - x_{13})^{\mathrm{T}},\\
&\varphi_{23} = (0, \sin(x_{22} - x_{32}), 0)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_{24} = (0, x_{22} - x_{42}, 0)^{\mathrm{T}},\\
&\varphi_{31} = (\sin(x_{31} - x_{11}), 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_{34} = (\sin(x_{31} - x_{41}), 0, 0)^{\mathrm{T}},\\
&\varphi_{35} = (x_{31} - x_{51}, x_{32} - x_{52}, x_{33} - x_{53})^{\mathrm{T}},\\
&\varphi_{41} = (0, \sin(x_{42} - x_{12}), 0)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_{43} = (\sin(x_{41} - x_{31}), 0, 0)^{\mathrm{T}},\\
&\varphi_{51} = (x_{51} - x_{11}, 0, x_{53} - x_{13})^{\mathrm{T}}, \quad \varphi_{54} = (0, x_{52} - x_{42}, 0)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

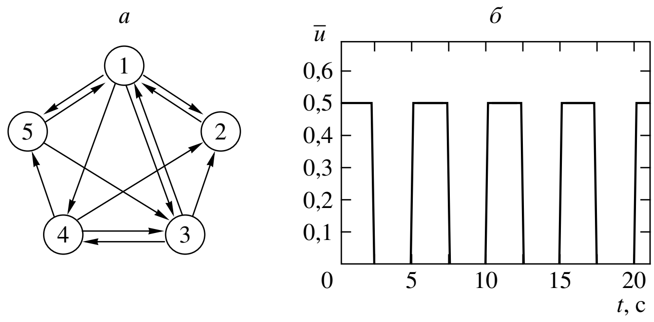

Рис. 1. a – граф связей; $б$ – управление ведущей подсистемы $\overline{u}$.

Очевидно, что константы Липшица всех ненулевых φ_{ij} равны 1. Граф связей показан на рис. 1.

В соответствии с теоремой 2 для $p > 0$, $q > 0$, $b > 0$, $g > 0$, $m_0 < m_1$ и достаточно малых $\sum\limits_{j=1}^{5} |\alpha_{ij}|$, $i = 1, \ldots, 5$, адаптивное децентрализованное управление

$$u_i = \theta_i[y_i - \overline{y}] + \overline{u},$$
$$\dot{\theta}_i = -g\tilde{y}_i\Gamma_i\tilde{y}_i, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i^{\mathrm{T}} > 0$ – положительные числа, обеспечивает синхронизацию в сети цепей Чуа в смысле достижения цели (16), где $\overline{x}(t)$ является решением системы (24) со входным воздействием $\overline{u}(t)$.

5.2. Результаты моделирования

Положим, следуя [19], $m_0 = -8/7$, $m_1 = -5/7$, $p = 15{,}6$, $q = 25{,}58$, $b = g = 1$, $\Gamma_i = 1$, $i = 1, \ldots, 5$, и

$$\overline{x}_1(0) = 0{,}5, \quad \overline{x}_2(0) = 0, \quad \overline{x}_3(0) = 0,$$
$$x_1(0) = (7, 14; 0{,}4)^{\mathrm{T}}, \quad x_2(0) = (0, 4, 4)^{\mathrm{T}}, \quad x_3(0) = (1, -1; 4{,}5)^{\mathrm{T}},$$
$$x_4(0) = (3, -4; 0{,}2)^{\mathrm{T}}, \quad x_5(0) = (2, 8, 15).$$

Заметим, что такой выбор параметров обеспечивает выполнение неравенств $p > 0$, $q > 0$, $b > 0$, $g > 0$, $m_0 < m_1$.

Возьмем в качестве $\overline{u}$ импульсное воздействие с амплитудой $1/2$, нулевой начальной фазой и периодом $T = 5$ с. (см. рис. 1). Обозначим

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{15} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{25} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \ldots & \alpha_{55} \end{pmatrix},$$
$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}0051 & 0{,}1395 & 0 & 0{,}1676 \\ 0{,}0662 & 0 & 0{,}0921 & 0{,}0065 & 0 \\ 0{,}2013 & 0 & 0 & 0{,}2271 & 0{,}1430 \\ 0{,}0907 & 0 & 0{,}0675 & 0 & 0 \\ 0{,}0663 & 0 & 0 & 0{,}2773 & 0 \end{pmatrix}.$$

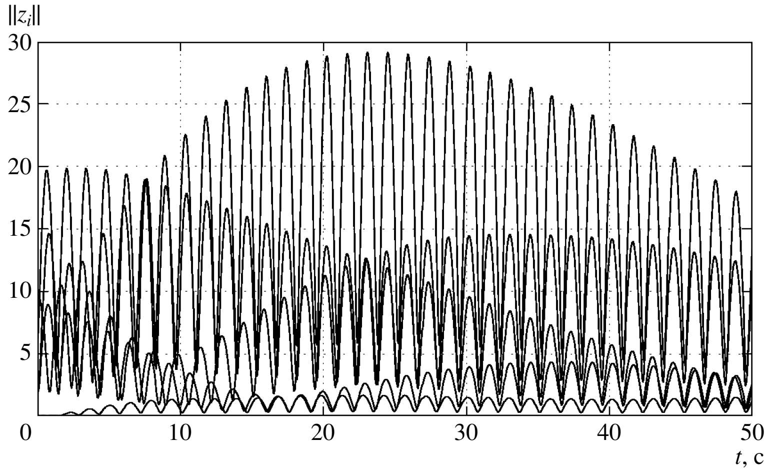

Рис. 2. $\|z_i\|$, $i - 1, \ldots, 5$, при $\alpha = 2{,}2 \cdot \widehat{\alpha}$.

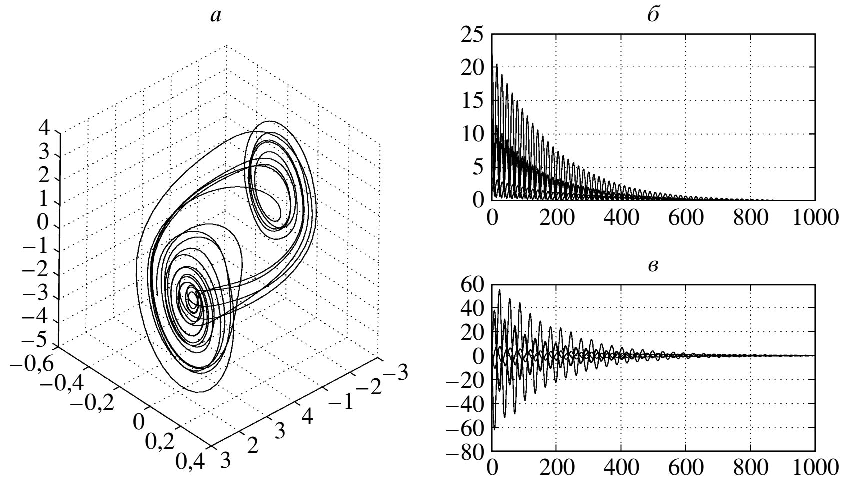

Рис. 3. *а* – фазовый портрет ведущей подсистемы; *б* – $\|z_i\|$; *в* – $\widetilde{u}_i = u_i - \overline{u}$, $i = 1, \ldots, 5$, $\alpha = \widehat{\alpha}$.

50-секундное моделирование при $\alpha = 2{,}2 \cdot \widehat{\alpha}$ показывает, что цель не достигается: $\|z_i\| \nrightarrow 0$, см. рис. 2. Если же взять матрицу α с меньшими элементами $\alpha = \widehat{\alpha}$, то моделирование показывает достижение цели управления, т.е. $\|z_i\| \to 0$, при этом $\tilde{u} = u_i - \overline{u} \to 0$, $i = 1, \ldots, 5$. Фазовый портрет ведущей подсистемы, $\|z_i\|$, $\tilde{u}_i = u_i - \overline{u}$, $i = 1, \ldots, 5$, найденные при 50-секундном моделировании, приведены на рис. 3. При этом как ведущая, так и ведомые подсистемы проявляют хаотическое поведение.

6. Заключение

В отличие от существующих работ в данной статье получены условия синхронизации для нелинейных динамических систем с неполными наблюдениями, неполной информацией о параметрах системы и неполной информацией о связях. Синтез децентрализованного алгоритма адаптивного управления, обеспечивающего синхронизацию, основан на методе скоростного градиента [3, 12], условия синхронизируемости получены с помощью теорем о пассификации [3, 15] и леммы Якубовича-Калмана [14]. Количественные условия на параметры систем, при выполнении которых будет иметь место синхронизация, получены для объектов с липшицевыми нелинейностями, объектов с g-монотонными нелипшицевыми нелинейностями и объектов, для которых выполнены условия структурной согласованности ведущей и ведомых подсистем. Представляет интерес распространение полученных результатов на задачи с частично децентрализованным управлением.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для доказательства понадобятся два вспомогательных результата. Первый из них является модифицированной для рассматриваемого случая теоремой о пассификации ([12, теорема П3.1; 15]).

Лемма 1. Для существования вещественных матриц $H = H^* > 0$ *и* θ_*, *таких что* $HA_* + A_*^{\mathrm{T}}H < 0$, $HB = Cg$, *где* $A_* = (A + LI_n) + B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$, *достаточно, чтобы функция* $g^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(sI_n - A - LI_n)^{-1}B$ *была гипер-минимально-фазовой.*

Второй результат устанавливает свойства алгоритма скоростного градиента в задачах децентрализованного управления и является модификацией теоремы 2.18 из [3].

Лемма 2. Рассмотрим систему, состоящую из N *взаимодействующих подсистем, динамика каждой из которых описывается уравнением*

$$\dot{x}_i = F_i(x_i, \theta_i, t) + h_i(x, \theta, t), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{П.1}$$

$$\dot{\theta}_i = -\gamma_i \nabla_{\theta_i} \omega_i(x_i, \theta_i, t), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{П.2}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\theta_i \in \mathbb{R}^{m_i}$,

$$\omega_i(x_i, \theta_i, t) = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \nabla Q_i(x_i, t)^{\mathrm{T}} F_i(x_i, \theta_i, t),$$

здесь $Q(\cdot)$ – *некая целевая функция,* $n = \sum n_i$, $m = \sum m_i$, $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^n$. *Предположим, что для* (П.1) *выполнены следующие группы условий*:

1. *Функции* $F_i(\cdot)$ *непрерывны по* x_i *и* t, *непрерывно дифференцируемы по* θ_i *и локально ограничены по* $t > 0$; *функции* $\omega_i(x_i, \theta_i, t)$ *выпуклы по* θ_i; *существуют векторы* $\theta_i^* \in \mathbb{R}^{m_i}$ *и скалярные непрерывные возрастающие функции* $\kappa_i(Q)$, $\rho_i(Q)$ *такие, что* $\kappa_i(0) = \rho_i(0) = 0$, $\kappa_i(Q) \to +\infty$ *при* $Q_i \to +\infty$:

$$\omega_i(x_i, \theta_i^*, t) \leqslant -\rho_i(Q_i(x_i, t)) \tag{П.3}$$

и $Q_i(x_i, t) \geqslant \kappa_i(\|x_i - x_i^*(t)\|)$, *где* $x_i^* = \mathrm{argmin}_{x_i} Q_i(x_i, t)$ *и* $Q_i(x_i^*(t), t) \equiv 0$.

2. *Функции* $h_i(x, \theta, t)$ *непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$|\nabla_{x_i} Q_i(x_i, t)^{\mathrm{T}} h_i(x, \theta, t)| \leqslant \sum_{j=1}^{l} \mu_{ij} \rho_j(Q_j(x_j, t)), \tag{П.4}$$

где матрица $M - I$ *гурвицева,* $M = \{\mu_{ij}\}$, $\mu_{ij} \geqslant 0$, I – *единичная матрица.*

Тогда система (П.1), (П.2) *асимптотически устойчива в целом по переменным* $x_i - x_i^*(t)$, *все ее траектории ограничены и при этом* $\lim\limits_{t\to\infty} Q_i(x_i, t) = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Рассмотрим первую группу условий леммы 2. Условие локальной ограниченности по $t > 0$ выполняется, так как для каждого $i = 1, \ldots, d$ правая часть системы (4) и функция $Q(z_i)$

есть гладкие функции, независящие от t. Условие выпуклости обеспечивается линейностью по θ_i правой части выражения (5). В качестве функций $\rho_i(\cdot), i = 1, \ldots, d$, фигурирующих в лемме 2, будем брать одну и ту же линейную функцию $Q \to \rho \cdot Q$. Покажем, что условие существования $\theta_* \in \mathbb{R}^l$ и ρ таких, что $\omega_i(z_i, \theta_*) \leqslant -\rho Q(z_i)$, обеспечивается гипер-минимально-фазовостью функции $g^{\mathrm{T}}\chi(s)$. Действительно, согласно лемме 1 гипер-минимально-фазовость функции $g^{\mathrm{T}}\chi(s)$ обеспечивает существование $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ и θ_* таких, что

$$HA_* + A_*^{\mathrm{T}}H < 0, \; HB = Cg,$$

где $A_* = (A + LI_n) + B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$\omega_i(z_i, \theta_*) \leqslant z_i^{\mathrm{T}}H[(A + LI_n) + B{\theta_*}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}]z_i = \frac{1}{2}z_i^{\mathrm{T}}[HA_* + A_*^{\mathrm{T}}H]z_i, \; i = 1, \ldots, d.$$

Поскольку $HA_* + A_*^{\mathrm{T}}H$ отрицательно определена, то существует положительное число ρ такое, что $HA_* + A_*^{\mathrm{T}}H \leqslant -\rho H$, что и обеспечивает условие

$$\omega_i(z_i, \theta_*) \leqslant -\rho Q(z_i), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Перейдем к условиям на взаимосвязи подсистем (вторая группа условий леммы 2). В рассматриваемом случае они выглядят следующим образом:

$$\left|\nabla_{z_i} Q(z_i)^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(z_i - z_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} \mu_{ij}\rho \cdot Q(z_j), \quad i = 1, \ldots, d,$$

где матрица $M - I$ гурвицева, $M = \{\mu_{ij}\}$, $\mu_{ij} \geqslant 0$, I – единичная матрица. Перепишем последнее неравенство:

$$\text{(П.5)} \qquad \left|z_i^{\mathrm{T}}H \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(z_i - z_j)\right| \leqslant \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{d} \mu_{ij}\, z_j^{\mathrm{T}}Hz_j, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Оценим величину, стоящую в левой части (П.5):

$$\begin{aligned}
&\left|z_i^{\mathrm{T}}H \sum_{j=1}^{d} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(z_i - z_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} \left|z_i^{\mathrm{T}}H\alpha_{ij}\varphi_{ij}(z_i - z_j)\right| = \\
&= \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij}| \cdot \left|z_i^{\mathrm{T}}H\varphi_{ij}(z_i - z_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij}| \cdot \|z_i^{\mathrm{T}}H\| \cdot \|L_{ij}(z_i - z_j)\| = \\
&= \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij}L_{ij}| \cdot \|z_i^{\mathrm{T}}H\| \cdot \|z_i - z_j\| \leqslant \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij}L_{ij}| \cdot \|z_i\| \cdot \|H\| \cdot \|z_i - z_j\| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij}L_{ij}| \cdot \|H\| \cdot (\|z_i\|^2 + \|z_i\| \cdot \|z_j\|) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{ij}L_{ij}| \cdot \lambda_{\max}(H) \cdot (\|z_i\|^2 + \|z_i\| \cdot \|z_j\|), \quad i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Теперь оценим снизу правую часть (П.5):

$$\frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{d}\mu_{ij}z_j^{\mathrm{T}}Hz_j \geqslant \frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{d}\mu_{ij}\lambda_{\min}(H)\|z_j\|^2, \quad i=1,\ldots,d.$$

Таким образом, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\sum_{j=1}^{d}|\alpha_{ij}L_{ij}|\cdot\lambda_{\max}(H)\cdot(\|z_i\|^2+\|z_i\|\cdot\|z_j\|)\leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{d}\mu_{ij}\lambda_{\min}(H)\|z_j\|^2, \quad i=1,\ldots,d,$$

или

$$\sum_{j=1}^{d}|\alpha_{ij}L_{ij}|\cdot(\|z_i\|^2+\|z_i\|\cdot\|z_j\|)\leqslant \frac{\rho}{2}\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}\sum_{j=1}^{d}\mu_{ij}\|z_j\|^2, \quad i=1,\ldots,d.$$

Положим $\mathbf{z}=\mathrm{col}(\|z_1\|,\|z_2\|,\ldots,\|z_d\|)$. Для каждого $i=1,\ldots,d$ введем матрицы $\nu_i^{(1)}$, $\nu_i^{(2)}$, η_i порядка $n\times n$. Положим

$$\nu_i^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\0&0&\ldots&\sum\limits_{j=1}^{d}|\alpha_{ij}L_{ij}|&\ldots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&0&\ldots&0\end{pmatrix}.$$

Здесь ненулевой элемент $\sum\limits_{j=1}^{d}|\alpha_{ij}L_{ij}|$ расположен на главной диагонали на i-й строке. Положим, считая $\alpha_{i,i}=0$,

$$\nu_i^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0&0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0&0&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\|\alpha_{i1}L_{i1}|&|\alpha_{i2}L_{i2}|&\ldots&|\alpha_{i,i-1}L_{i,i-1}|&0&|\alpha_{i,i+1}L_{i,i+1}|&\ldots&|\alpha_{id}L_{id}|\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}.$$

Здесь ненулевые элементы расположены на i-й строке. Далее, положим

$$\eta_i=\frac{\rho}{2}\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}\begin{pmatrix}\mu_{i1}&0&\ldots&0\\0&\mu_{i2}&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&\mu_{id}\end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений для выполнения (П.5) достаточно, чтобы для любого $i=1,\dots,d$ было справедливо следующее неравенство

$$\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\left(\nu_i^{(1)}+\nu_i^{(2)}\right)\mathbf{z}\leqslant \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\eta_i\mathbf{z},$$

т.е. матрица $\eta_i-\nu_i^{(1)}-\nu_i^{(2)}$ для каждого $i=1,\dots,d$ должна быть неотрицательно определенной.

Возьмем в качестве матрицы $M=\{\mu_{ij}\}$ диагональную следующим образом:

$$0<\mu_{ii}<1,\quad \mu_{ij}=0,\quad i\neq j,\quad i=1,\dots,d,\quad j=1,\dots,d.$$

Тогда матрица $M-I$ будет гурвицевой.

Неотрицательная определенность матрицы $\eta_i-\nu_i^{(1)}-\nu_i^{(2)}$ дает следующее условие:

$$\mu_{ii}\frac{\rho}{2}\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}-\sum_{j=1}^{d}|\alpha_{ij}L_{ij}|\geqslant 0,\quad i=1,\dots,d,$$

или

$$\mu_{ii}\geqslant\left(\frac{\rho}{2}\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{d}|\alpha_{ij}L_{ij}|,\quad i=1,\dots,d.$$

Замечая, что $\mu_{ii}<1$, приходим к условию (9). Таким образом, можно применить лемму 2, что и обеспечивает выполнение утверждений теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Будем действовать так же, как и в доказательстве теоремы 1 и применим леммы 1 и 2, заменяя везде L на 0.

Покажем, что $\omega_i(z_i,\theta_*)\leqslant-\rho Q(z_i)$ для $i=1,\dots,d$.

$$\begin{aligned}\omega_i(z_i,\theta_*)&=z_i^{\mathrm{T}}H(A+B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})z_i+z_i^{\mathrm{T}}HB(\psi_0(y_i)-\psi_0(\overline{y}))=\\&=z_i^{\mathrm{T}}H(A+B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})z_i+z_i^{\mathrm{T}}Cg(\psi_0(y_i)-\psi_0(\overline{y}))=\\&=z_i^{\mathrm{T}}H(A+B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})z_i+(\psi_0(y_i)-\psi_0(\overline{y}))^{\mathrm{T}}g^{\mathrm{T}}(y_i-\overline{y})=\\&=z_i^{\mathrm{T}}H(A+B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})z_i+(y_i-\overline{y})^{\mathrm{T}}g(\psi_0(y_i)-\psi_0(\overline{y}))\leqslant\\&\leqslant z_i^{\mathrm{T}}H(A+B\theta_*C^{\mathrm{T}})z_i,\quad i=1,\dots,d.\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $\psi(\cdot)$ является g-монотонно убывающей. Далее,

$$\omega_i(z_i,\theta_*)\leqslant z_i^{\mathrm{T}}H(A+B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})z_i=\frac{1}{2}z_i^{\mathrm{T}}\left[HA_*+A_*^{\mathrm{T}}H\right]z_i,\quad i=1,\dots,d.$$

Здесь $A_*=A+B\theta_*^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$. Поскольку $HA_*+A_*^{\mathrm{T}}H$ отрицательно определена, то существует положительное ρ такое, что $HA_*+A_*^{\mathrm{T}}H\leqslant-\rho H$, что и обеспечивает для каждого $i=1,\dots,d$ условие

$$\omega_i(z_i,\theta_*)\leqslant-\rho Q(z_i).$$

Повторив далее доказательство теоремы 1 и принимая во внимание замечание 1, получим выполнение условий теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства понадобится лемма Якубовича-Калмана (частотная теорема) [14] в следующей форме.

Л е м м а 3. *Пусть* $u \in \mathbb{R}^m$, $\chi(s) = C^{\mathrm{T}}(sI_n - A)^{-1}B$, $\operatorname{rank} B = m$. *Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1. *Существует положительно определенная матрица* $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ *такая, что*

$$HA + A^{\mathrm{T}}H < 0, \ \ HB = C;$$

2. *Полином* $\det(sI_n - A)$ *гурвицев, и выполняются частотные неравенства*:

$$\operatorname{Re} u^{\mathrm{T}}\chi(i\omega)u > 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \operatorname{Re} u^{\mathrm{T}}\chi(i\omega)u > 0$$

для всех $\omega \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^m$, $u \neq 0$.

Заметим, что в рассматриваемом случае $m = 1$, т.е. u скалярно, и вместо C возьмем Cg. Тогда условия леммы 3 и теоремы 3 обеспечат существование матрицы $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ такой, что

$$HA_M + A_M^{\mathrm{T}}H < 0, \ \ HB = Cg.$$

Пусть z_i и $Q(z_i)$, $i = 1, \ldots, d$, обозначают те же величины, что и в разделе 3. Для каждого $i = 1, \ldots, d$ под $\omega_i(x_i, \overline{x}, \tau_i)$ будем понимать производную в силу изолированной подсистемы:

$$\omega_i(x_i, \overline{x}, \tau_i) = z_i^{\mathrm{T}}H(Ax_i + B\tau_i^{\mathrm{T}}(t)\sigma_i(t) + B_M\psi_0(y_i) - A_M\overline{x} - B_M(\overline{u} + \psi_0(\overline{y}))).$$

Обозначим $\tau_* = \operatorname{col}(\nu_*, \theta_*)$. При $\tau = \tau_*$ получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_i(x_i, \overline{x}, \tau_*) = \\
&= z_i^{\mathrm{T}}H(Ax_i + B(\nu_*C^{\mathrm{T}}x_i + \theta_*\overline{u}) + B_M\psi_0(y_i) - A_M\overline{x} - B_M(\overline{u} + \psi_0(\overline{y}))) = \\
&= z_i^{\mathrm{T}}H(A_Mz_i + B_M\psi_0(y_i) - B_M\psi(\overline{y})) \leqslant z_i^{\mathrm{T}}HA_Mz_i, \quad i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $\psi(\cdot)$ является g-монотонно убывающей (см. доказательство теоремы 2). Таким образом,

$$\omega_i(z_i, \tau_*) \leqslant z_i^{\mathrm{T}}HA_Mz_i = \frac{1}{2}z_i^{\mathrm{T}}\left[HA_M + A_M^{\mathrm{T}}H\right]z_i, \quad i = 1, \ldots, d,$$

т.е. существует число $\rho > 0$ такое, что $\omega_i(z_i, \tau_*) \leqslant -\rho Q(z_i)$. Повторив далее доказательство теоремы 1, получим требуемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.
2. *Siljak D.D.* Decentralized Control of Complex Systems, ser. Mathematics in Science and Engineering. Boston, MA: Academic, 1990. V. 184.
3. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
4. *Druzhinina M.V., Fradkov A.L.* Adaptive decentralized control of interconnected systems // Proc. 14th IFAC World Congr. 1999. V. L. P. 175–180.
5. *Миркин Б.М.* Адаптивное децентрализованное управление с модельной координацией // АиТ. 1999. № 1. С. 90–100.
6. *Fax J.R., Murray R.M.* Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. № 9. P. 1465–1476.
7. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Estimation and Control over Communication Networks. Birkhauser, 2008.

8. *Jinhu Lu, Guanrong Chen.* A Time-Varying Complex Dynamical Network Model and Its Controlled Synchronization Criteria // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50. № 6.
9. *Yao J., David J. Hill, Zhi-Hong Guan, Hua O. Wang.* Synchronization of Complex Dynamical Networks with Switching Topology via Adaptive Control // Proc. 45th IEEE Conf. Dec. Control. 2006. P. 2819–2824.
10. *Zhou J., Lu J., Lu J.* Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network // IEEE Trans. Automat. Control. 2006. V. 51. № 4. P. 652–656.
11. *Zhong W.-S., Dimirovski G.M., Zhao J.* Decentralized synchronization of an uncertain complex dynamical network // Proc. 2007 Amer. Control Conf. P. 1437–1442.
12. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
13. *Fradkov A.L, Markov A.Yu.* Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification // IEEE Trans. Circ. Syst. 1997. V. 44. № 10. P. 905–912.
14. *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.
15. *Fradkov A.L.* Passification of nonsquare linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov Lemma // Eur. J. Control. 2003. № 6. P. 573–582.
16. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2001.
17. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
18. *Chai Wah Wu, Chua L.O.* Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems // IEEE Trans. Circ. Syst.-I. 1995. V. 42. № 8. P. 430–447.
19. *Alligood K., Sauer T., Yorke J.* Chaos: an introduction to dynamical systems. New York: Springer-Verlag, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 17.07.2008