Автоматика и телемеханика, № 8, 2011

Линейные системы

© 2011 г. **И.А. ДЖУНУСОВ, канд. физ.-мат. наук
(Санкт-Петербургский государственный университет),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)**

СИНХРОНИЗАЦИЯ В СЕТЯХ ЛИНЕЙНЫХ АГЕНТОВ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ ПО ВЫХОДАМ[1]

Рассматривается задача асимптотической синхронизации по состояниям в сетях идентичных линейных агентов при применении консенсусной обратной связи по выходам. Для сетей с фиксированной топологией и без запаздывания при передаче информации на основе теоремы о пассификации и теоремы Агаева-Чеботарева установлена возможность обеспечения синхронизации (консенсуса) сильной обратной связью в предположениях строгой пассифицируемости агентов и существования входящего остовного дерева у информационного графа. В отличие от известных работ, в которых исследованы лишь задачи с числом управлений, равным числу переменных состояния агентов, в настоящей работе рассматривается существенно более сложный случай, когда число управлений меньше числа переменных состояния, а именно: управление скалярно. Результаты проиллюстрированы примером для кольцевой сети из четырех двойных интеграторов.

1. Введение

Значительный интерес в последние годы вызывают задачи управления сетевыми системами. Среди многочисленных примеров можно упомянуть многопроцессорные системы передачи и обработки информации, различные транспортные сети, высокотехнологичные производственные сети, системы координированного управления движением летательных и подводных аппаратов и подвижных роботов, распределенные системы управления электрическими сетями, сложные кристаллические решетки и наноструктурные объекты. Подтверждением актуальности и научной значимости проблемы является наблюдаемый в мировой научной литературе «бум» в области сложных сетевых систем (Complex Networks). Публикуются обзорные статьи [1, 2], монографии [3–5], издаются специальные выпуски журналов [6–8], проводятся конференции [9, 10].

Одной из задач сетевого управления является синхронизация: обеспечение согласованного во времени поведения подсистем (агентов). В современных работах по синхронизации в сетях существенно используется граф связей, описывающий структуру информационных потоков в сети. Простейшим и наиболее распространенным законом управления в задачах синхронизации является так называемое «консенсусное управление», при котором управляющий сигнал для каждого узла (агента) строится

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-92166, № 11-08-01218), Межсекционной программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН 2 «Проблемы управления и безопасности энергетики и технических систем. Активно-адаптивные сети» и ФЦП «Кадры» (госконтракт 16.740.11.0042).

как взвешенная сумма разностей состояний или выходов соседних узлов [2, 11, 12]. При этом в случае сближения состояний узлов со временем говорят о достижении в сети *консенсуса*. При исследовании консенсусного управления важную роль играют лапласовские матрицы графов [5, 13, 14]. Необходимые и достаточные условия достижения консенсуса в случае, когда каждый узел сети является интегратором, получены в [15, 16]. Обобщение этого результата на сети двойных интеграторов и сети двойных интеграторов с запаздыванием получено в [17]. В случае сетей агентов с динамикой произвольного порядка в большинстве известных работ строятся обратные связи по состоянию объекта. Существующие регуляторы для задач, где измерению доступны только выходы, основаны на введении дополнительных динамических звеньев в регуляторы и использовании наблюдателей [12, 18, 19]. Это усложняет реализацию и может усилить влияние помех и неопределенностей, особенно при большом количестве узлов в сети.

В настоящей работе предложен метод синтеза статических консенсусных регуляторов, обеспечивающих синхронизацию решений динамических систем при неполных измерениях и управлениях в сетях идентичных линейных объектов при произвольном порядке модели агента без использования наблюдателей. Для сетей с фиксированной топологией и без запаздывания при передаче информации на основе теоремы о пассификации и теоремы Агаева–Чеботарева об исходящем остовном дереве получены условия синхронизации (достижения консенсуса в сети). Результаты проиллюстрированы примером для кольцевой сети из четырех двойных интеграторов.

2. Предварительные сведения

2.1. Сведения из теории графов

Приведём необходимые сведения из теории графов, в частности определение лапласовской матрицы и некоторые ее свойства (см. [5, 13, 16, 20, 21]).

Ориентированным графом $\mathcal{G}$ называется пара $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ – множество дуг. Пусть N – число вершин (мощность множества $\mathcal{V}$). Если для каждой дуги $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$, выполнено $(\beta, \alpha) \in \mathcal{E}$, то граф называется неориентированным, а дуга называется ребром. Здесь и далее рассматриваются графы без петель, т.е. для любой вершины $\alpha \in \mathcal{V}$ выполнено $(\alpha, \alpha) \notin \mathcal{E}$. Путем длины j из вершины α_1 в вершину α_j называется упорядоченное множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j\}$, где $(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \in \mathcal{E}$ для каждого $i = 2, \ldots, j$ и все вершины α_j различны. Вершина α достижима из вершины β, если $\alpha = \beta$ или в орграфе существует путь из вершины β в вершину α. Если для каждой вершины графа существует путь в любую другую вершину, то ориентированный граф называется сильно связным, а неориентированный – связным; в этих случаях компонента связности у (ор)графа будет одна. Известно, что неориентированный граф связен тогда и только тогда, когда у него есть остовное дерево – дерево, множество вершин у которого то же, что и у самого графа. Для орграфа вводятся понятия ориентированных остовных деревьев: входящего и исходящего. Орграф называется входящим деревом, если в каждую его вершину, кроме одной, называемой корнем, входит ровно одна дуга. Входящим остовным деревом орграфа $\mathcal{G}$ называется входящее дерево, составленное из дуг этого орграфа, такое, что в нем существует путь в корень из любой другой вершины $\mathcal{G}$. Аналогично вводится более общее понятие: остовный входящий лес. Остовный входящий лес $\mathcal{F}$ орграфа $\mathcal{G}$ называется максимальным входящим лесом, если в $\mathcal{G}$ нет остовного входящего леса с числом дуг, большим, чем в $\mathcal{F}$. Очевидно, что каждый максимальный входящий лес содержит минимально возможное число корней; это число называется лесной размерностью орграфа (по входящим деревьям) и обозначается через ν. Число дуг в любом максимальном входящем лесе равно, очевидно, $N - \nu$. Отметим, что лесная размерность по исходящим деревьям может, вообще говоря, отличаться от ν.

Неориентированный граф называется взвешенным, если каждой паре вершин $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ сопоставлено число $w(\alpha, \beta) \geqslant 0$ такое, что:

1) $w(\alpha, \beta) > 0$, если $(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$ и $w(\alpha, \beta) = 0$, если $(\alpha, \beta) \notin \mathcal{E}$;
2) $w(\alpha, \beta) = w(\beta, \alpha)$.

Орграф называется взвешенным, если каждой паре вершин $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ сопоставлено число $w(\alpha, \beta) \geqslant 0$ такое, что выполнено условие 1. Матрица смежности $A(\mathcal{G}) = [a_{ij}]$ представляет собой $(N \times N)$-матрицу, i, j-й элемент которой равен $w(\alpha_i, \alpha_j)$. Для вершины α_i введем полустепень захода

$$d_{in}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ji}$$

и полустепень исхода

$$d_{out}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}.$$

Если для каждой вершины орграфа $\mathcal{G}$ полустепень захода равна полустепени исхода, то такой орграф называется сбалансированным [5, 20].

Введем $(N \times N)$-матрицу $D(\mathcal{G}) = \operatorname{diag}\{d_{out}(\alpha_1), d_{out}(\alpha_2), \ldots, d_{out}(\alpha_N)\}$. Лапласовской матрицей (ор)графа $\mathcal{G}$ называется матрица

$$L(\mathcal{G}) = D(\mathcal{G}) - A(\mathcal{G}).$$

Обозначим через $\mathbf{1}_N$ вектор-столбец размерности N, состоящий из единиц. Как известно [5, 13, 14, 16, 20–22], введенная матрица L обладает следующими свойствами:

1. Матрица $L(\mathcal{G})$ имеет нулевое собственное число, которому соответствует правый собственный вектор $\mathbf{1}_N : L(\mathcal{G})\mathbf{1}_N = 0$;
2. Кратность нулевого собственного числа L неориентированного графа равна количеству компонент связности;
3. Нулевое собственное число лапласовской матрицы L имеет единичную кратность, если соответствующий орграф сильно связен;
4. Все собственные числа лапласовской матрицы имеют неотрицательные вещественные части;
5. Для сбалансированного графа $\mathbf{1}_N$ является левым собственным вектором, соответствующим нулевому собственному числу:

$$\mathbf{1}_N^{\mathrm{T}} L(\mathcal{G}) = 0.$$

Важный результат был получен Р.П. Агаевым и П.Ю. Чеботаревым в 2000 г. [21], см. также [11].

Теорема 1 (теорема Агаева–Чеботарева [21]). *Ранг лапласовской матрицы графа $\mathcal{G}$ равен $N - \nu$, где ν – лесная размерность графа по входящим деревьям. В частности,* $\operatorname{rank} L = N - 1$, *т.е. нулевое собственное число матрицы L имеет единичную кратность тогда и только тогда, когда орграф $\mathcal{G}$ имеет входящее остовное дерево.*

Приведём необходимые сведения о пассификации линейных систем [23, 24].

Рассмотрим линейную систему с одним входом и несколькими выходами (single-input-multiple-outputs – SIMO):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad z = C^{\mathrm{т}}x, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u = u(t) \in \mathbb{R}^1$ – управляющее воздействие (вход), $z = z(t) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый вектор выходов, A, B, C – постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$, $n \times l$ соответственно.

Задача пассификации для системы (1) понимается как нахождение $(1 \times l)$-матрицы K такой, что система, замкнутая обратной связью $u = -Kz + v$, строго пассивна по отношению к вспомогательному выходу $\sigma = Gz$ (G – $(1 \times l)$-матрица): для некоторого $\rho > 0$ и любых $T > 0$ неравенство $\int\limits_0^T (\sigma v - \rho|x|^2)dt \geqslant 0$ выполнено вдоль траекторий системы (1) с начальным условием $x(0) = 0$. Как следует из леммы Якубовича–Калмана–Попова и из свойств пассивных систем [25–27], пассифицируемость системы эквивалентна существованию матрицы K, обеспечивающей *строгую положительную вещественность* (SPR) замкнутой системы: ее передаточная функция[1] $W(\lambda) = GC^{\mathrm{т}}(\lambda I_n - A + BKC^{\mathrm{т}})^{-1}B$ от входа v к выходу $\sigma = Gz$ удовлетворяет соотношениям:

$$\operatorname{Re} W(i\omega) > 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}^1, \quad i^2 = -1, \tag{2}$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 \operatorname{Re} W(i\omega) > 0. \tag{3}$$

Важность свойств пассивности и пассифицируемости в теории управления определяется их тесной связью с устойчивостью и стабилизируемостью (см. [25, 26, 28]).

Определение 1. *Система* (1) *называется минимально фазовой по выходу* $\sigma = Gz$, *если многочлен*

$$\varphi_0(s) = \det \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ GC^{\mathrm{т}} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

гурвицев (*все его корни имеют отрицательные вещественные части*) *и* гипер-минимально-фазовой (*ГМФ*)*, если она минимально-фазовая и* $GC^{\mathrm{т}}B > 0$.

Если передаточная функция системы (1) “от входа u к выходу $\sigma = Gz$” имеет вид $\bar{W}(s) = b(s)/a(s)$, где $b(s), a(s)$ – многочлены степеней k, n соответственно, $k \leqslant n$, то система гипер-минимально-фазовая, если и только если $b(s)$ – гурвицев многочлен, $k = n - 1$ и $b(0) > 0$.

Теорема 2 (теорема пассификации [23, 24]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

A1. *Существуют положительно-определенная* $(n \times n)$*-матрица* H *и* $(1 \times l)$*-матрица* K *такие, что выполняются соотношения:*

$$H(A + BKC^{\mathrm{т}}) + (A + BKC^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}H < 0, \quad HB = CG^{\mathrm{т}}; \tag{5}$$

B1. *Система* (1) *гипер-минимально-фазовая по отношению к выходу* $\sigma = Gz$;

[1] I_n обозначает единичную $(n \times n)$-матрицу.

С1. *Существует обратная связь*

$$u = Kz + v, \tag{6}$$

делающая замкнутую систему (1), (6) *строго пассивной по отношению к выходу* $\sigma = Gz$.

При выполнении условия В1 матрица K в (5) может быть найдена в виде $K = -\varkappa G$, где $\varkappa$ – достаточно большое положительное число. При этом нижняя граница $\varkappa_0$ для $\varkappa$ имеет вид [24, 28]:

$$\varkappa > \varkappa_0 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^1} \mathrm{Re}\big(GW(i\omega)\big)^{-1}. \tag{7}$$

Обобщение теоремы 2 на случай нескольких входов (MIMO) можно найти в [24]. Для нескольких входов в определение гипер-минимально-фазовости включается дополнительное требование симметрии $(GC^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}} = GC^{\mathrm{T}}B$. Центральной частью теоремы является эквивалентность А1 и В1, которая для MIMO систем была установлена в [23].

3. Постановка задачи

Рассмотрим сеть S, состоящую из N подсистем (агентов) $S_i, i = 1, \ldots, N$. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, N$ подсистема S_i описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad y_i = C^{\mathrm{T}}x_i, \tag{8}$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – управление, $y_i(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор измерений, время $t \in [0, +\infty)$.

Рассмотрим орграф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ – множество дуг. Для каждого $i = 1, \ldots, N$ вершина v_i ассоциирована с подсистемой S_i. Будем считать, что дуга (v_i, v_j) принадлежит множеству дуг $\mathcal{E}$, если информация поступает от подсистемы S_j к подсистеме S_i. Предполагается, что в графе нет петель, т.е. $(v_i, v_i) \notin \mathcal{E}$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, считается, что каждой дуге сопоставлен единичный вес.

Пусть закон управления для агента S_i имеет вид

$$u_i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_i - y_j) = KC^{\mathrm{T}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i - x_j), \tag{9}$$

где $K \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ – вектор-строка коэффициентов усиления, $\mathcal{N}_i = \{k = 1, \ldots, N | (v_i, v_k) \in \mathcal{E}\}$ – множество индексов вершин, достижимых из v_i за один шаг. Управление вида (9) называется консенсусным. Изучению свойств систем с консенсусным управлением посвящено множество работ в последние несколько лет (см. библиографию в [1, 4, 11]). Однако в известных работах исследованы лишь задачи, в которых число управлений равно числу переменных состояния агентов. В настоящей работе рассматривается существенно более сложный случай, когда число управлений меньше числа переменных состояния. Для определенности будем полагать, что управление скалярно.

Рассмотрим в качестве цели управления асимптотическую синхронизацию по состояниям (асимптотическую координатную синхронизацию по терминологии [29]) агентов S:

$$\lim_{t \to \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

Задача состоит в нахождении такого K из (9), чтобы выполнялась цель управления (10).

В случае выполнения (10) асимптотическое поведение всех объектов сети S будет одинаковым. Обозначив через $c(t)$ функцию времени, описывающую асимптотическое поведение объектов сети при синхронизации, можно переформулировать цель управления (10) следующим образом:

$$(11) \qquad \exists\, c(t) : \lim_{t\to\infty} (x_i(t) - c(t)) = 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

4. Условия достижения цели управления в случае сбалансированного информационного графа

Обозначим $\chi(s) = C^{\text{т}}(sI_n - A)^{-1}B, s \in \mathbb{C}$, и сделаем следующие предположения.

А1. *У орграфа $\mathcal{G}$ есть входящее остовное дерево.*

По теореме Агаева–Чеботарева это предположение обеспечивает единичную кратность нулевого собственного числа лапласовской матрицы $L(\mathcal{G})$ (см. подраздел 2.1).

А2. *Существует вектор $g \in \mathbb{R}^l$ такой, что функция $g^{\text{т}}\chi(s)$ – гипер-минимально-фазовая.*

Согласно теореме 2 подраздела 2.2 последнее предположение обеспечивает существование матрицы $H = H^{\text{т}} > 0$ и вектора $\theta \in \mathbb{R}^l$ таких, что выполнены соотношения:

$$(12) \qquad HA_* + A_*^{\text{т}}H < 0, \quad HB = Cg, \quad A_* = A + B\theta^{\text{т}}C^{\text{т}}.$$

При этом вектор θ можно выбирать в виде:

$$(13) \qquad \theta = -\varkappa \cdot g,$$

где число $\varkappa > 0$ достаточно большое (см. раздел 2).

Вектор-строку коэффициентов усиления K закона управления (9) будем брать в таком виде:

$$(14) \qquad K = -k \cdot g^{\text{т}}, \quad k \in \mathbb{R}^1.$$

Сопоставим орграфу $\mathcal{G}$ граф $\widehat{\mathcal{G}}$ такой, что $A(\widehat{\mathcal{G}}) = A(\mathcal{G}) + A(\mathcal{G})^{\text{т}}$. Лапласовская матрица $L(\widehat{\mathcal{G}})$ получившегося таким образом графа $\widehat{\mathcal{G}}$ симметрична и имеет нулевое собственное число единичной кратности. Матрица $L(\widehat{\mathcal{G}})$ имеет следующие собственные числа $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N$. Пусть $x = \text{col}(x_1, \ldots, x_N)$ и $\otimes$ – кронекерово произведение.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены предположения А1, А2 и граф $\mathcal{G}$ сбалансирован. Тогда для достаточно больших $k > 0$ управление* (9) *с вектором коэффициентов усиления* (14) *обеспечивает выполнение цели* (11) *с функцией $c(t) = N^{-1/2}e^{At}(\mathbf{1}_N^{\text{т}} \otimes I_n)x(0)$.*

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е 1. Теорему 3 можно сформулировать так (см. доказательство):

Пусть выполнены предположения А1, А2 и граф $\mathcal{G}$ сбалансирован. Тогда для k таких, что

$$k \geqslant \frac{2\varkappa}{\lambda_2},$$

управление (9) *с вектором коэффициентов усиления* (14) *обеспечивает выполнение цели* (11) *с функцией $c(t) = N^{-1/2}e^{At}(\mathbf{1}_N^{\text{т}} \otimes I_n)x(0)$.*

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства теоремы 3 и из теоремы Агаева–Чеботарева следует, что если входящее остовное дерево в графе информационных связей отсутствует, т.е. лесная размерность графа по входящим деревьям $\nu > 1$, то консенсусные регуляторы (9) обеспечивают сходимость решений системы (8), (9) к подпространству размерности ν, натянутому на векторы, соответствующие корневым вершинам леса. Таким образом, в этом случае имеет место частичная синхронизация с числом лидеров, соответствующих числу корневых вершин графа связей.

5. Условия достижения цели управления в случае несбалансированного информационного графа

Пусть выполнено предположение A1, тогда нулевое собственное число лапласовской матрицы L имеет единичную кратность. Приведем лапласовскую матрицу L к жордановой форме:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_e \end{pmatrix} = P^{-1}LP,$$

считая, что первый столбец неособой матрицы P равен $N^{-1/2}\mathbf{1}$. Обозначим через l_1 левый собственный вектор, соответствующий нулевому собственному числу лапласовской матрицы L, такой, что $l_1^{\mathrm{T}} N^{-1/2}\mathbf{1} = 1$.

Вектор-строку коэффициентов усиления K закона управления (9) будем брать в виде:

$$K = k \cdot \theta^{\mathrm{T}}, \quad k \in \mathbb{R}^1. \tag{15}$$

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены предположения A1, A2 и $\Lambda_e + \Lambda_e^* > 0$. *Тогда для* k *таких, что*

$$I_{N-1} + \frac{k}{2}(\Lambda_e + \Lambda_e^*) \leqslant 0,$$

управление (9) *с вектором коэффициентов усиления* (15) *обеспечивает выполнение цели* (11) *с функцией* $c(t) = N^{-1/2} e^{At} (l_1^{\mathrm{T}} \otimes I_n) x(0)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

6. Условия достижения цели управления в случае неориентированного информационного графа

Сформулируем условия достижения цели управления в случае неориентированного информационного графа $\mathcal{G}$ и выполнения следующего предположения:

A3. *У неориентированного графа* $\mathcal{G}$ *есть остовное дерево.*

Как известно, это предположение эквивалентно связности графа $\mathcal{G}$. Таким образом, при выполнении этого предположения кратность нулевого собственного числа лапласовской матрицы $L = L(\mathcal{G})$ будет равна единице. Обозначим собственные числа матрицы L так: $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N(L)$.

В следующей теореме приводятся условия достижения цели управления в случае неориентированного информационного графа.

Т е о р е м а 5. Пусть выполнены предположения A2, A3. Тогда для k *таких, что*

$$k \geqslant \frac{\varkappa}{\lambda_2(L)},$$

управление (9) *с вектором коэффициентов усиления* (14) *обеспечивает выполнение цели* (11) *с функцией* $c(t) = N^{-1/2} e^{At}(\mathbf{1}_N^{\text{т}} \otimes I_n)x(0)$.

Теорема является следствием замечания 1 из раздела 4.

7. Пример. Кольцевая сеть двойных интеграторов

Рассмотрим сеть S, состоящую из четырех подсистем $S_i, i = 1, \dots, 4$. Пусть для каждого $i = 1, \dots, 4$ подсистема S_i описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad y_i = C^{\text{т}} x_i,$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния, $u_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – управление, $y_i(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор измерений. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда передаточная функция каждого объекта имеет вид

$$\chi(s) = C^{\text{т}}(sI_2 - A)^{-1}B = \frac{s+1}{s^2}. \tag{16}$$

Можно сказать, что каждый объект является двойным интегратором, в котором измерению доступна сумма выходной переменной и ее производной.

Первую компоненту вектора состояния отдельного объекта можно трактовать как скорость точки, вторую компоненту – как положение точки на прямой. Достижение цели управления (10) означает сближение четырех точек на прямой и их движение с одинаковой скоростью, зависящей от начальных условий.

Предположим, что орграф $\mathcal{G}$, описывающий информационные связи в сети, сбалансирован и имеет вид, приведенный на рис. 1. Это значит, что консенсусные регуляторы (9) имеют в данном случае вид:

$$u_1 = -k(y_1 - y_2), \quad u_2 = -k(y_2 - y_3), \quad u_3 = -k(y_3 - y_4), \quad u_4 = -k(y_4 - y_1).$$

Лапласовская матрица графа $\widehat{\mathcal{G}}$ имеет следующие собственные числа: 0, 2, 2, 4.

Применим теорему 3. Передаточная функция (16) является гипер-минимально-фазовой при $g = 1$. Нетрудно видеть, что неравенство (13) для выбора числа $\varkappa$ принимает вид $\varkappa > 1$. Таким образом, по теореме 3 при $k \geqslant 1$ регулятор (9) с вектором-строкой коэффициентов усиления (14) обеспечивает достижение цели (10).

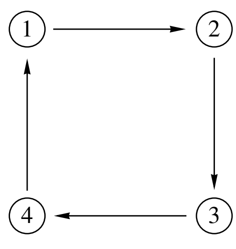

Рис. 1. Орграф $\mathcal{G}$.

Пусть подсистемы имеют следующие начальные данные:

$$x_1(0) = \mathrm{col}(0,5; 2), \quad x_2(0) = \mathrm{col}(-7; 3),$$
$$x_3(0) = \mathrm{col}(1; 0), \quad x_4(0) = \mathrm{col}(10; -10).$$

При $k = 1$ достижение цели управления подтверждается результатами численного 50-секундного моделирования. Траектории подсистем на одной и той же фазовой плоскости с координатами $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$, $i = 1, 2, 3, 4$ при различных k приведены на рис. 2–5.

Следует заметить, что для данного примера из результатов [17] можно вывести точные условия асимптотической синхронизации: $k > 0{,}5$.

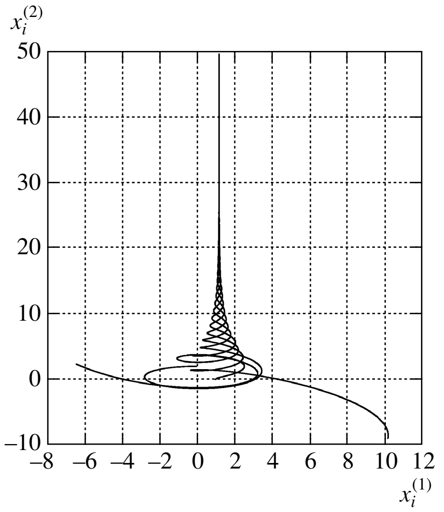

Рис. 2. Фазовая плоскость при $k = 1$.

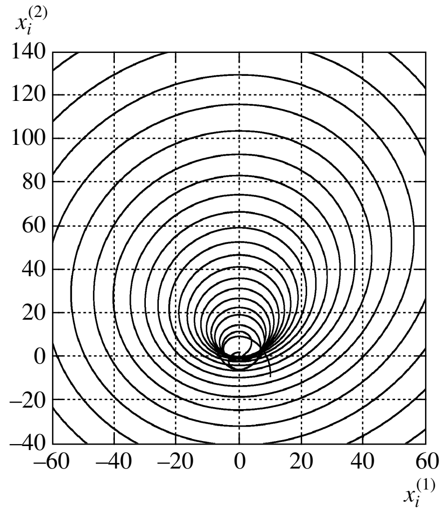

Рис. 3. Фазовая плоскость при $k = 0{,}3$.

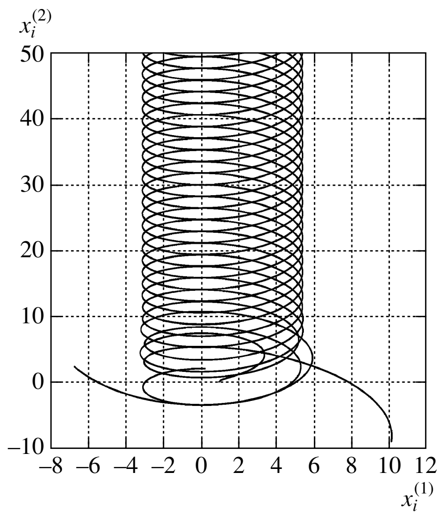

Рис. 4. Фазовая плоскость при $k = 0{,}5$.

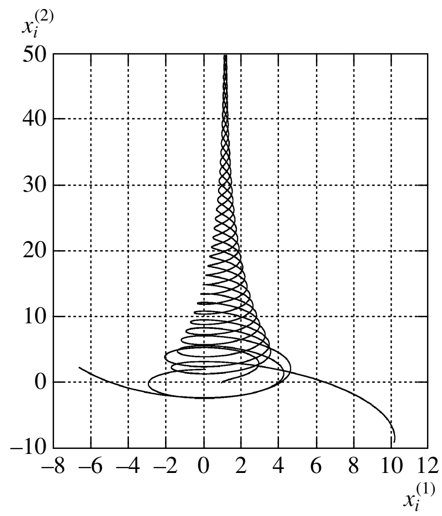

Рис. 5. Фазовая плоскость при $k = 0{,}7$.

8. Заключение

При помощи метода пассификации и теоремы Агаева–Чеботарева найдены условия достижения синхронизации по состояниям в сетях линейных агентов при неполных измерениях и управлениях с помощью консенсусных регуляторов, реализующих статическую обратную связь по выходам. В отличие от большинства известных работ, в которых исследованы лишь задачи с числом управлений, равным числу переменных состояния агентов, в настоящей работе рассматривается существенно более сложный случай, когда число управлений меньше числа переменных состояния, а именно: управление скалярно. В отличие от результата работы [30] (теорема 4) в данной работе требуется не пассивность, а лишь пассифицируемость агентов, что позволяет синхронизировать сети неустойчивых агентов.

Пример синхронизации в кольцевой сети четырех двойных интеграторов показывает, что полученные условия не слишком далеки от точных. Их достоинство состоит еще и в том, что они легко распространяются на нелинейные системы с секторной нелинейностью. Это распространение предполагается сделать в дальнейшем.

Авторы пользуются случаем поблагодарить П.Ю. Чеботарева за ряд полезных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. При доказательстве понадобятся некоторые свойства кронекерова произведения матриц (см., например, [31, 32]). Обозначим для краткости $L = L(\mathcal{G}), \widehat{L} = L(\widehat{\mathcal{G}})$. Пусть P – вещественная ортогональная матрица такая, что

$$P^{\mathrm{т}}\widehat{L}P = \mathrm{diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$$

с первым столбцом, равным $N^{-1/2}\mathbf{1}_N$. Первый столбец произведения LP нулевой, поскольку $\mathbf{1}_N$ является правым собственным вектором матрицы L. Следовательно, первый столбец $P^{\mathrm{т}}LP$ также нулевой. По предположению A1 орграф $\mathcal{G}$ сбалансирован, следовательно, L имеет левый собственный вектор, соответствующий нулевому собственному числу. Последнее позволяет заключить, что первая строка $P^{\mathrm{т}}LP$ нулевая. Таким образом,

$$P^{\mathrm{т}}LP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & \Lambda_e & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}, \tag{П.1}$$

где $\Lambda_e \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$. Пусть $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$. Тогда (9) можно представить в виде

$$u = (L \otimes KC^{\mathrm{т}})x. \tag{П.2}$$

Перепишем (8), используя (П.2):

$$\dot{x} = ((I_N \otimes A) + (L \otimes BKC^{\mathrm{т}}))\, x. \tag{П.3}$$

Идея о координатном преобразовании составного вектора состояния взята из [19].

Пусть $z = (P^{\mathrm{т}} \otimes I_n)x,\ z \in \mathbb{R}^{Nn}$, и $z = \mathrm{col}(z_1, z_e),\ z_1 \in \mathbb{R}^n,\ z_e \in \mathbb{R}^{(N-1)n.}$ Тогда (П.3) с учетом (П.1) можно представить так

$$\text{(П.4)} \qquad \dot{z}_1 = Az_1,$$

$$\text{(П.5)} \qquad \dot{z}_e = ((I_{N-1} \otimes A) + (\Lambda_e \otimes BKC^{\mathrm{т}}))\, z_e.$$

Если решение $z_e(t) \equiv 0$ системы уравнений (П.5) асимптотически устойчиво, то цель управления (11) достигается с функцией $c(t) = N^{-1/2} e^{At} (\mathbf{1}_N^{\mathrm{т}} \otimes I_n) x(0)$.

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V_e = z_e^{\mathrm{т}} (I_{N-1} \otimes H) z_e,$$

где матрица H определяется из (12). Вычислим производную V_e в силу (П.5):

$$\dot{V}_e = z_e^{\mathrm{т}} (I_{N-1} \otimes (A^{\mathrm{т}} H + HA) + \Lambda_e^{\mathrm{т}} \otimes CK^{\mathrm{т}} B^{\mathrm{т}} H + \Lambda_e \otimes HBKC^{\mathrm{т}}) z_e =$$
$$= z_e^{\mathrm{т}} (I_{N-1} \otimes (A^{\mathrm{т}} H + HA) + \Lambda_e^{\mathrm{т}} \otimes CK^{\mathrm{т}} g^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} + \Lambda_e \otimes CgKC^{\mathrm{т}}) z_e.$$

Здесь использовалось то, что $HB = Cg$ (см. (12)). Обозначим

$$\mathcal{P} = I_{N-1} \otimes (A^{\mathrm{т}} H + HA) + \Lambda_e^{\mathrm{т}} \otimes CK^{\mathrm{т}} g^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} + \Lambda_e \otimes CgKC^{\mathrm{т}}.$$

Покажем, что нулевое решение системы (П.5) асимптотически устойчиво. Для этого достаточно показать, что $\mathcal{P} < 0$, поскольку $\dot{V}_e = z_e^{\mathrm{т}} \mathcal{P} z_e$.

Обозначим

$$\mathcal{K} = -I_{N-1} \otimes (C\theta g^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} + Cg\theta^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}}) + \Lambda_e^{\mathrm{т}} \otimes CK^{\mathrm{т}} g^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} + \Lambda_e \otimes CgKC^{\mathrm{т}}.$$

Замечая, что

$$A^{\mathrm{т}} H + HA = A_*^{\mathrm{т}} H + HA_* - (C\theta g^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} + Cg\theta^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}}),$$

преобразуем выражение для $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = I_{N-1} \otimes (A_*^{\mathrm{т}} H + HA_*) + \mathcal{K}.$$

Достаточно показать, что $\mathcal{K} \leqslant 0$. Перепишем выражение для $\mathcal{K}$, используя (13), (14):

$$\mathcal{K} = -I_{N-1} \otimes (-\varkappa Cgg^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} - \varkappa Cgg^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}}) - \Lambda_e^{\mathrm{т}} \otimes Cgkg^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} - \Lambda_e \otimes Cgkg^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} =$$
$$= (2\varkappa I_{N-1} - k(\Lambda_e + \Lambda_e^{\mathrm{т}})) \otimes (Cgg^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}}).$$

Поскольку $Cgg^{\mathrm{т}} C^{\mathrm{т}} \geqslant 0$, а $2\varkappa I_{N-1} - k(\Lambda_e + \Lambda_e^{\mathrm{т}}) \leqslant 0$ по условию теоремы 3, получаем $\mathcal{K} \leqslant 0$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proc. IEEE. 2007. V. 95. P. 215–233.
2. *Ren W., Beard R.W., Atkins E.M.* Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control // IEEE Control Syst. Magazin. 2007. V. 27. P. 71–82.
3. *Wu C.W.* Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2007.
4. *Ren W., Beard R.W.* Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control. Theory and Applications. London: Springer, 2008.
5. *Bullo F., Cortez J., Martinez S.* Distributed control of robotic networks Princeton Univ. Press, 2009.
6. IEEE Trans. on Automatic Control. Spec. Iss. on Networked Control Systems, Sept., 2004.
7. IEEE Control Systems Magazine. Special Section “Complex Networked Control Systems”, Aug. 2007.
8. Proc. of the IEEE. Special Iss. on Networked Control Systems Technology, Jan. 2007.

9. Proc. 1st IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems, 24–26 Sept, 2009, Venice, Italy. http://www.ifac-papersonline.net/
10. Proc. 2nd IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems. 13–14 Sept., 2010, Grenoble, France. http://www.ifac-papersonline.net/
11. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // АиТ. 2009. № 3. С. 136–151.
12. *Li Z., Duan Z., Chen G., Huang L.* Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint // IEEE Trans. Circuit. Syst. I. 2010. V. 57(1). P. 213–224.
13. *Mohar B.* Some applications of Laplace eigenvalues of graphs. "Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications", NATO ASI Ser. C 497. 1997. P. 225–275.
14. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Лапласовские спектры орграфов и их приложения // АиТ. 2005. № 5. С. 47–62.
15. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rule // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. V. 48(6). P. 988–1001.
16. *Ren W., Beard R.W.* Consensus Seeking in Multiagent Systems Under Dynamically Changing Interaction Topologies // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50. P. 655–661.
17. *Yu W., Chen G., Cao M.* Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems // Automatica. 2010. V. 46(6). P. 1089–1095.
18. *Fax J.R., Murray R.M.* Information flow and cooperative control of vehicle formations // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2004. V. 49. P. 1465–1476.
19. *Yoshioka C., Namerikawa T.* Observer-based consensus control strategy for multi-agent system with communication time delay // Proc. IEEE MSC-2008, San-Antonio, USA. 2008. P. 1037–1042.
20. *Olfati-Saber R., Murray R.M.* Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
21. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // АиТ. 2000. № 9. С. 15–43.
22. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Остовные леса орграфа и их применение // АиТ. 2001. № 3. С. 108–133.
23. *Фрадков А.Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. мат. журн. 1976. № 2. С. 436–446.
24. *Fradkov A.L.* Passification of nonsquare linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma // Eur. J. Control. 2003. No. 6. P. 573–582.
25. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems, part I: General theory; part II: Linear systems with quadratic supply rates // Archive Rationale Mechan. Analysis. 1972. V. 45. P. 321–393.
26. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.* Пассивность и пассификация нелинейных систем (обзор) // АиТ. 2000. № 3. С. 3–37.
27. *Yakubovich V.A., Fradkov A.L., Hill D.J., Proskurnikov A.V.* Dissipativity of T-Periodic Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2007. V. 52. No. 6. P. 1039–1047.
28. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.
29. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры СПб.: Наука, 2003.
30. *Scardovi L., Sepulchre R.* Synchronization in networks of identical linear systems // Automatica. 2009. V. 45. No. 11. P. 2557–2562.
31. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
32. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств М.: Наука, 1972.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 16.08.2010