

© 2012 г. Н. О. АМЕЛИНА

(Санкт-Петербургский государственный университет),

А. Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук

(Санкт-Петербургский государственный университет, Институт проблем  
машиноведения РАН)

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ КОНСЕНСУС В СТОХАСТИЧЕСКОЙ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТИ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ  
И ЗАДЕРЖКАМИ В ИЗМЕРЕНИЯХ<sup>1</sup>**

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 11-08-01218-а) и Федеральной Целевой Программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (госконтракт № 16.740.11.0042, 14.740.11.0942).

Рассматривается задача достижения приближенного консенсуса в децентрализованной стохастической динамической сети при неполной информации о текущих состояниях узлов, задержках в измерениях и переменной структуре связей. Для решения используется протокол локального голосования с исчезающими шагами. Для анализа динамики замкнутой сети предлагается использовать метод усредненных моделей, распространяемый в работе на системы с задержками в измерениях. Использование этого метода позволяет получать качественные аналитические оценки допустимой длины шага, обеспечивающей заданную точность консенсуса, и существенно снизить вычислительные затраты при исследовании имитационным моделированием. Получаемые результаты применяются к прикладной задаче: анализу динамики системы балансировки загрузки вычислительной сети.

## 1. Введение

Распределенное взаимодействие в сетях динамических управляемых агентов привлекает в последние время внимание все большего числа исследователей. Во многом это объясняется широким применением мультиагентных систем в разных областях, включая управление формациями [1], роями [2], распределенные сенсорные сети [3], управление перегрузкой в сетях связи [4], маневрирование групп беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) [5], относительное выравнивание групп спутников и др. Многие из таких задач переформулируются в терминах достижения консенсуса в мультиагентных системах [6 - 8].

Решение подобных задач существенно усложняется на практике, с одной стороны, из-за неполноты передаваемой информации и наличия помех измерений, с другой, — из-за эффектов квантования (дискретизации), свойственных цифровым системам. Для группы взаимодействующих агентов, обменивающихся с задержкой неполной информацией в дискретные моменты времени по протоколу локального голосования при изменяющейся топологии связей, в [9] предложено использовать подход стохастической аппроксимации для вывода условий достижения консенсуса [10, 11]. Алгоритмы типа стохастического градиента использовали в таких задачах и ранее [12 - 15]. Стохастическая аппроксимация с убывающим размером шага позволяет каждому агенту получать информацию о состоянии своих соседей при одновременном снижении силы воздействия помех. В [13, 16] авторы рассматривали задачу достижения консенсуса при условии наличия зашумленной информации о состояниях своих соседей. Они использовали алгоритм типа стохастической аппроксимации с уменьшающимся до нуля размером шага.

При наличии внешних воздействий и нестационарности агентов (получение новых заданий и т. п.) алгоритмы стохастической аппроксимации с уменьшающимся размером шага не применимы. В [17 - 20] исследуется работоспособность алгоритмов стохастической аппроксимации с постоянным размером шага в условиях нестационарных функционалов качества (среднего риска). Их применимость для балансировки загрузки узлов централизованной вычислительной сети при доступности текущей зашумленной информации о длине очереди и производительности узлов была исследована в [21, 22].

В работах [23 - 25] для исследования дискретных стохастических сетевых систем

было предложено использовать метод усредненных непрерывных моделей [26, 27] (иногда называемый Derevitskii-Fradkov-Ljung (DFL)-схемой [28, 29]). Применение метода усредненных моделей для анализа и синтеза стохастических систем с дискретным временем началось с 1970-х г. С тех пор было опубликовано большое количество статей и ряд монографий [20, 27, 30 - 33], касающихся как применения метода, так и его обоснования.

В настоящей работе результаты [25] расширены и уточнены. Ее основным результатом являются условия достижения приближенного среднеквадратичного консенсуса при использовании протокола локального голосования. Для вывода этих условий получены условия близости в среднеквадратическом траекторий исходной динамической сети и ее усредненной модели. Полученные результаты применяются к задаче балансировки загрузки узлов распределенной вычислительной сети при поступлении в каждый узел только зашумленной информации о длине очереди и производительности соседей. Предполагается, что топология связей в сети может меняться со временем, а информация от соседей доходить с задержкой по времени.

Задачи балансировки загрузки узлов в литературе встречаются достаточно часто (например, [34 - 41]), что говорит об их актуальности. В [34] авторы предлагают использовать правило с равномерным случайным распределением и произвольное правило для балансировки загрузки сети. В [35] рассматривается алгоритм балансировки загрузки гетерогенных P2P-систем с использованием мобильных агентов. В [36] предлагается динамический алгоритм распределения заказов, который использует смешанную децентрализованную и централизованную политику. В данной работе для балансировки загрузки сети используется протокол локального голосования, а

для исследования динамики системы используется метод усредненных моделей.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основные понятия, используемые в статье. В разделе 3 определяется протокол консенсуса, который будет использоваться для решения задачи балансировки загрузки узлов сети. В разделе 4 описывается метод усредненных моделей и формулируются основные результаты. В разделе 5 рассматривается задача балансировки загрузки узлов децентрализованной вычислительной сети, а в разделе 6 приводится аналитическое исследование описанной системы. В разделе 7 приводится пример имитационного моделирования работы алгоритма и его соответствующей усредненной модели.

## 2. Задача консенсуса в динамических сетях

В статье будут использоваться следующие обозначения и термины из теории графов [10, 42]. Верхний индекс узла показывает соответствующий номер узла, а не показатель степени. Для векторов-столбцов  $Z_1, \dots, Z_l$  через  $[Z_1, \dots, Z_l]$  обозначается вектор-столбец, полученный их вертикальным соединением. Нормы векторов или матриц  $M$  понимаются в смысле *нормы Фробениуса*:  $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}(M^T M)}$ , где  $\text{Tr}(\cdot)$  — след (сумма диагональных элементов) матрицы.

Под динамической сетью будем понимать набор динамических систем (агентов), взаимодействующих в соответствии с графом информационных связей. Рассмотрим динамическую сеть из  $n$  агентов. Пусть  $i, i = 1, \dots, n$  — номер агента,  $N = \{1, \dots, n\}$  — множество узлов сети (вершин графа связей). Граф  $(N, E)$  определяется набором вершин  $N$  и набором дуг  $E$ . Предполагаем, что граф *простой*, т. е.  $(i, i) \notin E$  для всех  $i$  отсутствуют петли и между вершинами может быть не более одной дуги. *Множеством соседей* узла  $i$  называется  $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$ , т. е. множество узлов с

дугами, входящими в  $i$ . Сопоставим каждой дуге  $(j, i) \in E$  вес  $a^{i,j} > 0$ . Граф может быть представлен *матрицей смежности (или связности)*  $A = [a^{i,j}]$  с весами  $a^{i,j} > 0$ , если  $(j, i) \in E$ , и  $a^{i,j} = 0$  в противном случае. Отметим, что  $a^{i,i} = 0$ . Для графа, который представлен матрицей смежности  $A$ , будем использовать обозначение  $\mathcal{G}_A$ .

Определим *взвешенную полустепень захода вершины  $i$*  как сумму  $i$ -й строки матрицы  $A$ :  $d^i(A) = \sum_{j=1}^n a^{i,j}$ . Для графа  $\mathcal{G}_A$  определим *диагональную матрицу степеней вершин графа*  $D(A) = \text{diag}\{d^i(A)\}$  из полустепеней захода и *лапласиан* графа  $\mathcal{L}(A) = D(A) - A$ . Заметим, что суммы по строкам элементов лапласиана равны нулю. Обозначим через  $d_{\max}(A)$  максимальную полустепень захода графа  $\mathcal{G}_A$ .

*Направленный путь* из узла  $i_1$  в узел  $i_s$  состоит из последовательности узлов  $i_1, \dots, i_s$ ,  $s \geq 2$  таких, что  $(i_k, i_{k+1}) \in E, k \in \{1, \dots, s-1\}$ . Для орграфа вводятся понятия ориентированных остовных деревьев: входящего и исходящего. Орграф называется входящим деревом, если в каждую его вершину, кроме одной, называемой корнем, входит ровно одна дуга. Входящим остовным деревом орграфа (или просто остовным деревом) называется входящее дерево, составленное из дуг этого орграфа, такое что в нем существует путь в корень из любой другой вершины.

Каждому агенту  $i \in N$  в момент времени  $t = 0, 1, \dots, T$  сопоставляется изменяющееся во времени состояние  $x_t^i \in \mathbb{R}$ . Пусть  $u_t^i \in \mathbb{R}$  — управляющее воздействие, которое воздействует на узел  $i$  в момент времени  $t$ , а  $y_t^{i,i}$  — измеренное значение выхода агента. Будем считать, что заданы начальные условия  $x_0^i \in \mathbb{R}$ , а изменения состояний агентов описываются разностными уравнениями

$$(1) \quad x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i)$$

с управлением  $u_t^i$ , воздействие которого на изменение состояния  $x_t^i$  определяется неко-

торой функцией  $f^i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , зависящей от текущего состояния агента  $x_t^i$  и задаваемого управления  $u_t^i$ .

Будем считать, что структура связей динамической сети описывается с помощью последовательности ориентированных графов  $\{(N, E_t)\}_{t \geq 0}$ , где  $E_t \subseteq E$  меняется во времени. Обозначим через  $A_t$  соответствующие матрицы смежности, а максимальное множество каналов связи через  $E_{\max} = \{(j, i) : \sup_{t \geq 0} a_t^{i,j} > 0\}$ . Если  $(j, i) \in E_t$ , то говорим, что узел  $i$  в момент времени  $t$  получает информацию от узла  $j$  для целей управления с обратной связью.

Для формирования управления каждый узел  $i \in N$  имеет информацию о своем собственном состоянии

$$(2) \quad y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}$$

(может быть и зашумленную) и, если множество  $N_t^i$  непусто, зашумленные наблюдения о состояниях соседей

$$(3) \quad y_t^{i,j} = x_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i,$$

где  $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$  — помехи (шум), а  $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$  — целочисленная задержка,  $\bar{d}$  — максимально возможная задержка. Для корректности введенных понятий будем считать, что  $x_{-k}^i = 0, i \in N, k = -d, -d-1, \dots, -1$ . Для удобства предположим, что величины  $w_t^{i,j}$  и  $d_t^{i,j}$  определены для всех  $(j, i) \in E_{\max}$ . Если  $(j, i)$  не появляется в  $E_t$ , тогда (3) не применяется, а  $w_t^{i,j}$  и  $d_t^{i,j}$  можно считать нулями.

### 3. Протокол управления и консенсус

*Определение 1.* Будем называть протоколом управления в динамической сети с топологией  $(N, E_t)$  обратную связь по наблюдениям состояний

$$(4) \quad u_t^i = K_t^i(y_t^{i,j_1}, \dots, y_t^{i,j_{m_i}}),$$

где множество  $\{j_1, \dots, j_{m_i}\} \subseteq \{i\} \cup \bar{N}_t^i$ ,  $\bar{N}_t^i \subseteq N_t^i$ ,  $K_t^i$  — некоторая гладкая функция своих аргументов при каждом  $t = 0, 1, 2, \dots$

Широко используется протокол управления, известный под названием “протокол локального голосования”

$$(5) \quad u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} - y_t^{i,i}),$$

при котором значение входа каждого узла зависит от взвешенной суммы разностей между его состоянием и информации о состоянии его соседей. Здесь  $\alpha_t > 0$  — параметр шага протокола управления (5),  $b_t^{i,j} > 0 \quad \forall j \in \bar{N}_t^i$ . Положим  $b_t^{i,j} = 0$  для всех остальных пар  $(i, j)$ .

*Определение 2.* Будем говорить, что в сети достигается консенсус в момент времени  $t$ , если для всех  $i \in N$  существует такое  $x^*$  (значение консенсуса), что  $x^* = x_t^i$ .

Задача о достижении консенсуса состоит в формировании протокола управления, обеспечивающего консенсус.

### 4. Анализ динамики замкнутой системы

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — основное вероятностное пространство. Будем обозначать:  $E$  — математическое ожидание,  $E_x$  — условное математическое ожидание при условии  $x$ .

Предположим, что для функций  $f^i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  из уравнения динамики сети

(1) выполнено следующее условие:

**A1.** Функции  $f^i(x, u)$  липшицевы по  $x$  и  $u$  для всех  $\forall i \in N$ :  $|f^i(x, u) - f^i(x', u')| \leq$

$$L_1(L_x|x - x'| + |u - u'|);$$

при любом фиксированном  $x$  функции  $f^i(x, \cdot)$  такие, что  $E_x f^i(x, u) = f^i(x, E_x u)$ ;

Из липшицевости следует условие ограниченности скорости роста:  $|f^i(x, u)|^2 \leq L_2(L_c + L_x|x|^2 + |u|^2)$ .

Обозначим через  $\bar{w}_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$  вектор, составленный из элементов  $w_t^{i,j}$ ,  $i, j \in N$  (матрица  $n \times n$  из помех наблюдений или нулей, расписанная по строкам в виде вектора),  $\bar{x}_t = [x_t^1, \dots, x_t^n]$  и  $\bar{u}_t = [u_t^1, \dots, u_t^n]$ .

При невырожденных помехах в наблюдениях  $\bar{w}_t$ , если  $\alpha_t$  не стремятся к нулю, то точный консенсус, как правило, не достигается. Поэтому рассмотрим задачу о достижении приближенного среднеквадратичного консенсуса.

*Определение 3.* Будем говорить, что в сети достигается среднеквадратичный  $\varepsilon$ -консенсус в момент времени  $t$ , если  $E\|x_t^i\|^2 < \infty$ ,  $i \in N$  и существует случайная величина  $x^*$  такая, что  $E\|x_t^i - x^*\|^2 \leq \varepsilon$  для всех  $i \in N$ .

Сформулируем достаточные условия, при которых протокол локального голосования (5) обеспечивает выполнение  $\varepsilon$ -консенсуса.

**A2. а)** Для всех  $i \in N$ ,  $j \in N_t^i \cup \{i\}$  помехи наблюдений  $w_t^{i,j}$  — центрированные, независимые одинаково распределенные случайные величины с ограниченными дисперсиями:  $E(w_t^{i,j})^2 \leq \sigma_w^2$ .

**б)** Для всех  $i \in N$ ,  $j \in N_{\max}^i$  появление “переменных” дуг  $(j, i)$  в графе  $\mathcal{G}_{A_t}$  —

независимые случайные события, вероятность которых  $p_a^{i,j}$  (т. е. матрицы  $A_t$  — независимые одинаково распределенные случайные матрицы).

в) Для всех  $i \in N$ ,  $j \in \bar{N}_t^i$  веса  $b_t^{i,j}$  в протоколе управления — ограниченные случайные величины:  $\underline{b} \leq b_t^{i,j} \leq \bar{b}$  с вероятностью 1 и существуют  $b^{i,j} = \text{Eb}_t^{i,j}$ .

г) Для всех  $i, j \in N$  существует конечная величина  $\bar{d} \in \mathbb{N}$ :  $d_t^{i,j} \leq \bar{d}$  с вероятностью 1 и целочисленные задержки  $d_t^{i,j}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения  $k = 0, \dots, \bar{d}$  с вероятностями  $p_k^{i,j}$ .

Кроме того, все эти случайные величины и матрицы не зависят между собой.

Для  $t = 1, 2, \dots$  определим расширяющиеся последовательности  $\sigma$ -алгебр вероятностных событий  $\mathcal{F}_t$ , порождаемых случайными элементами  $\bar{x}_0, A_0, \dots, A_{t-1}, d_0^{i,j}, \dots, d_{t-1}^{i,j}, b_0^{i,j}, \dots, b_{t-1}^{i,j}, w_0^{i,j}, \dots, w_{t-1}^{i,j}$ ,  $i, j \in N$ , и  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\{\mathcal{F}_t, A_t\}$ .

Пусть заданы случайная величина  $Q$  и  $\sigma$ -алгебра вероятностных событий  $\mathcal{F}$ . Введем обозначение  $\text{E}_{\mathcal{F}}Q$  для условного математического ожидания  $Q$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ . Заметим, что случайные величины  $\bar{x}_t$  измеримы относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$ , т. е.  $\text{E}_{\mathcal{F}_t}\bar{x}_t = \bar{x}_t$ .

При  $\bar{d} > 0$  добавим к рассматриваемой сети  $n\bar{d}$  новых узлов, включив новых “фиктивных” агентов с состояниями в момент времени  $t$ , равными соответствующим состояниям действительных агентов в предшествующие  $\bar{d}$  моментов времени:  $t-1, t-2, \dots, t-\bar{d}$ . Обозначим  $\bar{n} = n(\bar{d} + 1)$  и определим матрицу  $A_{\max}$  размерности  $\bar{n} \times \bar{n}$  по правилу:

$$a_{\max}^{i,j} = p_{j \div n}^{i,((j-1) \bmod n)+1} p_a^{i,((j-1) \bmod n)+1} b^{i,((j-1) \bmod n)+1}, \quad i \in N, \quad j = 1, \dots, \bar{n},$$

$$a_{\max}^{i,j} = 0, \quad i = n + 1, \dots, \bar{n}, \quad j = 1, \dots, \bar{n}.$$

Здесь операция  $\bmod$  — остаток от деления, а операция  $\div$  — деление нацело.

Очевидно, если  $\bar{A}_t$  — последовательность случайных матриц с элементами, задающими связи между всеми  $\bar{n}$  агентами в момент времени  $t$ , то они все одинаково распределены, а матрица  $A_{\max}$  является их математическим ожиданием. Будем считать, что выполняется следующее условие:

**A3.** Граф  $(N, E_{\max})$  имеет остовное дерево и для любой дуги  $(j, i) \in E_{\max}$  среди элементов  $a_{\max}^{i,j}, a_{\max}^{i,j+n}, \dots, a_{\max}^{i,j+\bar{d}n}$  матрицы  $A_{\max}$  найдется хотя бы один ненулевой.

Положим  $\bar{x}_t \equiv 0$  для  $-\bar{d} \leq t < 0$  и определим  $\bar{X}_t \in \bar{n}$  — расширенный вектор состояний  $\bar{X}_t = [\bar{x}_t, \tilde{x}_{t-1}, \dots, \tilde{x}_{t-\bar{d}}]$ , где  $\tilde{x}_{t-k}$  — вектор, состоящий из таких  $x_{t-k}^i$ , что  $\exists j \in N^i \exists k' \geq k : p_{k'}^{i,j} > 0$ , т. е. это значение с положительной вероятностью участвует в формировании хотя бы одного из управляющих воздействий. В дальнейшем для простоты будем считать, что так введенный расширенный вектор состояний равен  $\bar{X}_t = [\bar{x}_t, \bar{x}_{t-1}, \dots, \bar{x}_{t-\bar{d}}]$ , т. е. в него входят все компоненты со всевозможными задержками, не превосходящими  $\bar{d}$ .

Перепишем динамику обобщенных состояний сети в векторно-матричном виде:

$$(6) \quad \bar{X}_{t+1} = U\bar{X}_t + F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t),$$

где  $U$  — матрица размерности  $\bar{n} \times \bar{n}$ , имеющая вид

$$(7) \quad U = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix},$$

в котором  $I$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ , а  $F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n}}$  — вектор-функция соответствующих аргументов

$$(8) \quad F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t) = \begin{pmatrix} \dots \\ f^i(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} ((x_{t-d_t^i}^j - x_t^i) + (w_t^{i,j} - w_t^{i,i}))) \\ \dots \\ 0_{n\bar{d}} \end{pmatrix},$$

содержащая ненулевые компоненты только на первых  $n$  местах.

Для исследования динамики системы в этом случае предлагается применять метод усредненных моделей, который состоит в приближенной замене исходного стохастического разностного уравнения (6), описывающего динамику сети, усредненным дискретным уравнением.

Рассмотрим соответствующую (6) усредненную дискретную модель

$$(9) \quad \bar{Z}_{t+1} = U\bar{Z}_t + G(\alpha_t, \bar{Z}_t), \quad \bar{Z}_0 = \bar{X}_0,$$

где

$$(10) \quad G(\alpha, \bar{Z}) = G \begin{pmatrix} z^1 \\ \alpha, \quad \vdots \\ z^{n(\bar{d}+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ f^i(z^i, \alpha \bar{s}^i(\bar{Z})) \\ \dots \\ 0_{n\bar{d}} \end{pmatrix},$$

$$s^i(\bar{Z}) = \sum_{j \in N_{\max}^i} p_a^{i,j} b^{i,j} \left( \sum_{k=0}^{\bar{d}} p_k^{i,j} z^{j+kn} \right) - z^i = -d^i(A_{\max})z^i + \sum_{j=1}^{\bar{n}} a_{\max}^{i,j} z^j, \quad i \in N.$$

Заметим, что при введенных выше обозначениях и при выполнении последней части условия **A1**

$$\bar{s}(\bar{Z}) = [s^1(\bar{Z}), \dots, s^n(\bar{Z})] = -\mathcal{L}(A_{\max})\bar{Z}.$$

Если последняя часть условия **A1** не выполняется, то вместо (10) можно использовать определение

$$(11) \quad G(\alpha, \bar{Z}) = \mathbb{E}_{\bar{Z}} F(\alpha_t, \bar{Z}, \bar{w}_t),$$

при этом формулировки последующих результатов претерпят незначительные изменения.

Оказывается, что траектории решения исходной системы  $\{\bar{X}_t\}$  из (6) в момент времени  $t$  близки в среднеквадратичном смысле к траекториям усредненной дискретной системы (9).

**Т е о р е м а 1.** *Если выполнены условия **A1, A2**, то существует  $\tilde{\alpha}$  такое, что при  $0 < \alpha_t \leq \bar{\alpha} < \tilde{\alpha}$  справедлива оценка*

$$(12) \quad \mathbb{E} \max_{0 \leq t \leq T} \|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2 \leq c_1 \tau_T e^{(c_2 \tau_T)^2} \bar{\alpha},$$

где  $\tau_T = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{T-1}$ ,  $c_1, c_2 > 0$  — некоторые константы:

$$c_1 = 2^{3+\bar{d}} n^3 L_1^2 \bar{b}^2 \left( \sigma_w^2 + 4 \left( \frac{nL_2 L_c + (\bar{\alpha} n L_1 \bar{b})^2}{c_3 - 1} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) e^{T \ln c_3} \right),$$

$$c_2 = 2^{\bar{d}/2} L_1 \left( \frac{L_x}{\underline{\alpha}} + \|\mathcal{L}(A_{\max})\| \right), \quad \underline{\alpha} = \min_{0 \leq t \leq T} \alpha_t, \quad \bar{d} = 0, \text{ если } \bar{d} = 0, \text{ или } \bar{d} = 1, \text{ если } \bar{d} > 0,$$

$$c_3 = 2^{\bar{d}} + L_x (2^{1+\bar{d}/2} L_1 + L_2) + \bar{\alpha} 2^{1+\bar{d}/2} L_1 \|\mathcal{L}(A_{\max})\| + \bar{\alpha}^2 (L_2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|^2 + (2L_1(n-1)\bar{b})^2).$$

*Доказательство* см. в Приложении.

Заметим, что похожие оценки можно получить и для общего вида протокола (4).

**Т е о р е м а 2.** *Если выполнены условия **A1, A2**,  $0 < \alpha_t \leq \bar{\alpha}$ , в усредненной дискретной системе (9) в момент времени  $T$  достигается  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус и для констант  $c_1, c_2$  из формулировки теоремы 1 справедлива оценка*

$$(13) \quad c_1 \tau_T e^{c_2 \tau_T^2 \bar{\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

*то в стохастической дискретной системе (6) достигается  $\varepsilon$ -консенсус в момент времени  $T$ .*

*Доказательство* см. в Приложении.

Рассмотрим важный частный случай  $f^i(x, u) = u \forall i \in N$  и  $\alpha_t = \alpha = const$ , в котором дискретная усредненная система (9) имеет вид

$$(14) \quad \bar{Z}_{t+1} = (I - ((I - U) + \mathcal{L}(\alpha A_{\max}))) \bar{Z}_t = (I - \bar{\mathcal{L}}) \bar{Z}_t,$$

где у матрицы  $\bar{\mathcal{L}}$  все суммы по строкам элементов равны нулю и все диагональные элементы положительны и равны по абсолютной величине сумме всех остальных элементов в строке, которые отрицательны, т. е. матрица  $\bar{\mathcal{L}}$  является лапласианом некоторого графа.

**Т е о р е м а 3.** *Пусть  $\alpha_t = \alpha > 0$ ,  $f^i(x, u) = u$  для любого  $i \in N$ . Если выполнены условия **A2, A3** и  $\alpha < \frac{1}{d_{\max}(A_{\max})}$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое время  $\bar{T}$ , после которого в усредненной дискретной системе (14) установится  $\frac{\varepsilon}{4}$ -консенсус.*

Кроме того, если существует такое  $T > \bar{T}$ , для которого параметр  $\alpha$  обеспечивает выполнение условия  $\bar{C}_1 e^{\bar{C}_2^2 \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , где

$$\bar{C}_1 = T\alpha 2^{3+\bar{d}} n^3 L_1^2 \bar{b}^2 \left( \sigma_w^2 + 4 \left( \frac{(\bar{\alpha} n L_1 \bar{b})^2}{c_3 - 1} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) e^{T \ln c_3} \right), \quad \bar{C}_2 = T\alpha 2^{\bar{d}/2} \|\mathcal{L}(A_{\max})\|,$$

$$c_3 = 2^{\bar{d}} + \bar{\alpha} 2^{1+\bar{d}/2} \|\mathcal{L}(A_{\max})\| + \bar{\alpha}^2 (\|\mathcal{L}(A_{\max})\|^2 + 4(n-1)^2 \bar{b}^2),$$

то в стохастической дискретной системе (6) достигается  $\varepsilon$ -консенсус в моменты времени  $t : \bar{T} \leq t \leq T$ .

*Доказательство* см. в Приложении.

Заметим, что в [9] при некоторых предположениях, близких к условиям теоремы 3, доказано необходимое и достаточное условие достижения среднеквадратичного консенсуса в случае, если размеры шагов  $\alpha_t$  стремятся к нулю. Выше был рассмотрен более общий случай вида функций  $f^i(x_t^i, u_t^i)$  и не стремящиеся к нулю  $\alpha_t$ .

## 5. Балансировка загрузки узлов децентрализованной сети

В последнее время все чаще при вычислениях используются распределенные системы параллельных вычислений, для которых актуальна задача разделения пакета заданий между несколькими вычислительными устройствами. Подобные задачи возникают не только в вычислительных сетях, но также в производственных сетях [43], сетях обслуживания [44], транспортных и логистических сетях и др. Обычно при распределении заданий по узлам их стараются распределять так, чтобы загрузка вычислительных узлов была равномерной.

Большинство стратегий динамической балансировки загрузки можно отнести к классу централизованных или к классу полностью распределенных (децентрализованных). При централизованной стратегии имеется специальный ресурс, который

собирает информацию о состоянии всей сети и принимает решение о распределении заданий для каждого из узлов. При полностью децентрализованных стратегиях на каждом узле выполняется протокол балансировки загрузки, обменивающийся информацией о состоянии с другими узлами сети, и перемещение заданий происходит только между соседними узлами.

Рассмотрим модель системы распределения однотипных заданий между разными узлами (агентами) для параллельной работы с обратной связью. Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  — набор интеллектуальных агентов (узлов), каждый из которых выполняет поступающие задания по принципу очереди. Задания поступают в систему в различные моменты времени и на разные узлы.

В каждый момент времени  $t$  состояние агента  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , описывается двумя характеристиками:

- 1)  $q_t^i \geq 0$  — длина очереди из атомарных элементарных заданий узла  $i$  в момент времени  $t$ ;
- 2)  $r_t^i > 0$  — производительность узла  $i$  в момент времени  $t$ .

Изменения состояний агентов определяются следующими уравнениями:

$$(15) \quad q_{t+1}^i = q_t^i - r_t^i + z_t^i + u_t^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $z_t^i$  — новое задание, поступившее на узел  $i$  в момент времени  $t$ ,  $u_t^i$  — результат перераспределения заданий между узлами (добавление или уменьшение), получающийся в итоге применения выбранного протокола перераспределения заданий. В уравнениях динамики предполагаем, что  $\sum_i u_t^i = 0$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$

Будем считать, что для формирования стратегии управления каждый узел  $i \in N$  в момент времени  $t$  имеет следующую информацию:

- зашумленные данные о своей длине очереди

$$(16) \quad y_t^{i,i} = q_t^i + w_t^{i,i},$$

- зашумленные наблюдения о длинах очередей соседей, если  $N_t^i \neq \emptyset$

$$(17) \quad y_t^{i,j} = q_{t-d_t^{i,j}}^j + w_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i,$$

где  $w_t^{i,j}$  — помехи, а  $0 \leq d_t^{i,j} \leq \bar{d}$  — целочисленная задержка,  $\bar{d}$  — максимально возможная задержка,

- данные о своей производительности  $r_t^i$  и о производительностях узлов соседей

$$r_t^j, \quad j \in N_t^i.$$

Будем рассматривать две постановки задачи: стационарную и нестационарную.

Стационарный случай. Все задания поступают в систему на разные узлы в начальный момент времени и производительности узлов не меняются с течением времени.

Если все задания выполняются только тем агентом, которому они поступили, то время реализации всех заданий определяется как

$$T_{\max} = \max_{i \in N} q_0^i / r_0^i.$$

Заметим, что в стационарном случае вид системы (15) соответствует разностному уравнению (1).

Нестационарный случай. Новые задания могут поступать в систему на любой из  $n$  узлов в различные моменты времени  $t$  и производительности узлов могут меняться с течением времени.

Для момента времени  $t$  определим  $T_t$  — время до окончания выполнения всех заданий на всех узлах.

Если в стационарном случае начиная с момента времени  $t$  задания не перераспределяются между узлами, то время реализации всех заданий определяется как

$$(18) \quad T_t = \max_{i \in N} \frac{q_t^i}{r_t^i}.$$

Будем называть отношение  $\frac{q_t^i}{r_t^i}$  загруженностью узла  $i$  в момент времени  $t$ .

Поставим цель управления

$$(19) \quad T_t \rightarrow \min_{\bar{u}_t}.$$

Для достижения поставленной цели естественно использовать протокол перераспределения заданий с течением времени. Это позволит увеличить пропускную способность системы и уменьшить время выполнения заказов в системе.

**Л е м м а 1. (Об оптимальной стратегии управления.)** *В стационарном случае из всех возможных вариантов распределения общего количества заданий, не обработанных к моменту времени  $t$ , наименьшее время работы системы соответствует тому, при котором*

$$(20) \quad q_t^i / r_t^i = q_t^j / r_t^j, \quad \forall i, j \in N.$$

*Доказательство* см. в Приложении.

**Следствие.** Если взять  $x_t^i = q_t^i / r_t^i + t$  в качестве состояния узла  $i$  динамической сети, то цель управления — достижение консенсуса в сети — будет соответствовать оптимальному распределению заданий между узлами в стационарном случае.

Таким образом, достаточно рассматривать задачу о поддержке равномерной загрузки всех узлов сети. Для ее решения воспользуемся протоколом управления (5),

в котором для всех  $i \in N$ , для всех  $t$  определим  $\bar{N}_t^i = N_t^i$  и  $b_t^{i,j} = r_t^j / r_t^i$ ,  $j \in N_t^i$ .

В действительности, применение протокола (5) на практике оправдано при выполнении дополнительных предположений. Прежде всего предполагается мгновенный обмен соответствующими потоками входных данных. Кроме того, надо дополнительно проверять согласованность пересылок пакетов, так как возможны различные коллизии за счет задержек и получения информации с помехами. В частности, использование протокола (5) на практике в задаче балансировки загрузки узлов децентрализованной вычислительной сети предполагает дополнительные согласования размеров пересылаемых пакетов между агентами. При перераспределении ресурсов (либо заданий между узлами) не допускается ни “перерасход”, ни “недорасход” ресурсов. Для выполнения этого условия в каждом узле происходят дополнительные проверки и согласования с соседями. По протоколу локального голосования каждый узел определяет, сколько он “отдаст” или “примет” заданий. Далее те узлы, которые готовы принять задания, посылают запросы соседям о том, сколько они фактически готовы передать в данный момент. В ответ на эти запросы каждый узел, “принимающий” задания, дает подтверждение, сколько он примет от того или иного узла заданий, и согласовывает это количество с ним (при этом каждый узел ориентируется на свои текущие значения  $\tilde{u}_t^i$ , которые рекомендуются протоколом локального голосования). Предполагается, что процедура согласования и передачи заданий по времени занимает существенно меньше времени, чем длительность одного такта работы динамической сети. Например, в задаче распределения заказов при организации грузоперевозок согласование заданий на следующий день происходит вечером после окончания текущего рабочего дня (см. [45]).

Если, начиная с момента времени  $\bar{t}$  в систему перестают поступать новые задания ( $z_t^i = 0, t \geq \bar{t}$ ) и производительности не меняются ( $r_t^i = r^i, t \geq \bar{t}$ ), то теорема 1, сформулированная в предыдущем разделе, позволяет свести исследование динамики балансировки загрузки узлов к исследованию соответствующей дискретной усредненной модели, которое может выполняться аналитически, либо численно.

Приближенно, с учетом возможных дополнительных согласований по протоколу передачи пакетов на основе протокола (5) динамика системы (1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$(21) \quad x_{t+1}^i = x_t^i + \alpha_t \sum_{j \in N_t^i} b_t^{i,j} (y_t^{i,j} / r_t^j - y_t^{i,i} / r_t^i),$$

где  $\alpha_t$  — последовательность положительно определенных размеров шагов,  $y_t^{i,j}$  — зашумленные наблюдения длины очереди  $j$ -го узла,  $z_t^i$  — новое задание, поступившее на узел  $i$  в момент времени  $t$ .

Предполагается, что размер пересылаемых заданий на любом шаге мал по сравнению с текущей длиной очереди заданий. Поэтому, а также потому, что изучается приближенный консенсус, будем рассматривать состояние узла и длину очереди как вещественные величины.

При реализации протокола (5), конечно, осуществляется округление. Применение алгоритма эффективно, когда очереди из заданий достаточно длинные. В этом случае, так как изучается приближенный консенсус, такое округление существенно не повлияет на результат.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из шести вычислительных блоков (рис. 1). Топология сети в каждый момент времени случайна. Связь 2—1 присутствует с вероятностью  $1/2$ , также как связь 3—1 (рис. 1-б). Вероятности появления

дуги 2—1 и 3—1 одинаковые:  $p_a^{13} = p_a^{12} = 1/2$ .

В случае с равномерно распределенными задержками в измерениях, когда целочисленная задержка  $d_t^{ij}$  равна 0 или 1 с вероятностью 1/2,  $\bar{d} = 1$ ,  $p_0^{ij} = p_1^{ij} = 1/2$ , расширим пространство состояний:

$$(22) \quad \bar{X}_t = [x_t^1, \dots, x_t^n, x_{t-1}^1, \dots, x_{t-1}^n] \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Матрица  $G$  соответствующей усредненной дискретной модели (9) выглядит следующим образом:

$$(23) \quad G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}H\alpha & \frac{1}{2}H\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(24) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b^{1,2} & \frac{1}{2}b^{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{2,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{3,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{5,6} \\ b^{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 6. Имитационное моделирование

Для иллюстрации теоретических результатов приведем пример имитационного моделирования для задачи балансировки загрузки децентрализованной вычислительной сети, топология которой приведена на рис. 1. Предварительно были заданы начальные состояния  $q_0^1 = 5000$ ;  $q_0^2 = 3500$ ;  $q_0^3 = 2300$ ;  $q_0^4 = 3150$ ;  $q_0^5 = 7400$ ;  $q_0^6 = 1100$  и производительности узлов  $r^1 = 2$ ;  $r^2 = 0,75$ ,  $r^3 = 1,2$ ;  $r^4 = 1,7$ ;  $r^5 = 3,5$ ;  $r^6 = 2,1$ . Производительности узлов со временем не изменялись.

Наблюдения текущих длин очередей проводились на фоне центрированных независимых одинаково равномерно распределенных помех из интервала  $[-500; 500]$ .

Качество работы протокола (5) (сходимость траекторий к консенсусу  $x^*$ ) характеризуется средней невязкой  $Err = \sqrt{\sum_i \frac{(x_i^i - x^*)^2}{n}}$ . На рис. 2 приведены графики для средних невязок при использовании разных постоянных параметров шага  $\alpha$ . Видно, что чем больше  $\alpha$ , тем состояния узлов быстрее сходятся к консенсусу, но с определенного момента поведение средних невязок становится в значительной степени колебательным.

Результаты сравнения траекторий дискретной стохастической системы (линии из точек) и соответствующей усредненной дискретной модели, описанной выше (пунктирные линии), при постоянном размере шага  $\alpha_t = 0,1$  приведены на рис. 3.

## 7. Заключение

В статье рассмотрена задача достижения консенсуса в мультиагентной стохастической системе с нелинейной динамикой, помехами и задержками в измерениях и переключающейся топологией. Для решения задачи был использован алгоритм типа стохастической аппроксимации с неубывающим до нуля размером шага.

В качестве практического примера такой системы исследована математическая модель задачи децентрализованной балансировки загрузки сети при неполной информации о состояниях узлов и переменной топологии.

Для исследования поведения системы был применен метод усредненных моделей. В дальнейшем предполагается проанализировать влияние разного типа помех на работу алгоритма.

Авторы выражают признательность рецензентам за конструктивные замечания, позволившие существенно повысить качество работы.

## Приложение

*Доказательство теоремы 1.*

Обозначим:

$$(25) \quad v_t = F(\alpha_t, \bar{X}_t, \bar{w}_t) - G(\alpha_t, \bar{X}_t).$$

В силу условия **A2**, усредняя последовательно относительно  $\sigma$ -алгебр  $\tilde{\mathcal{F}}_t$  и  $\mathcal{F}_t$ , получаем, что  $E_{\mathcal{F}_t} v_t = 0$ .

При доказательстве теоремы 1 будут использованы следующие вспомогательные предложения.

*Предложение 1. При выполнении условий **A2**  $\bar{s}(\bar{X}_t) = \frac{1}{\alpha_t} E_{\mathcal{F}_t} \bar{u}_t$  и справедлива оценка*

$$(26) \quad E_{\mathcal{F}_t} \left\| \frac{1}{\alpha_t} \bar{u}_t - \bar{s}(\bar{X}_t) \right\|^2 \leq n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 + 4(n-1)^2 \bar{b}^2 \|\bar{X}_t\|^2, \quad i \in N.$$

*Доказательство.* В силу определения протокола (5) имеем

$$\frac{1}{\alpha_t} u_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} ((x_{t-d_t^i, j}^j - x_t^i) + (w_t^{i,j} - w_t^{i,i})).$$

Взяв условное математическое ожидание при условии  $\sigma$ -алгебры  $\tilde{\mathcal{F}}_t$  от обеих частей последней формулы, в силу предположений **A2. а, в, г** о центрированности помех наблюдений и независимости соответствующих случайных величин получаем формулу

$$\frac{1}{\alpha_t} E_{\tilde{\mathcal{F}}_t} u_t^i = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} \sum_{k=0}^{\bar{d}} b^{i,j} p_k^{i,j} (x_{t-k}^j - x_t^i) = \sum_{j \in \bar{N}_t^i} \sum_{k=0}^{\bar{d}} b^{i,j} p_k^{i,j} (\bar{x}_t^{j+kn} - \bar{x}_t^i),$$

из которой после усреднения относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$  следует первое утверждение:

$s^i(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha_t} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} u_t^i$ . Используя полученный факт, для левой части (26) получаем

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \left\| \frac{1}{\alpha_t} \bar{u}_t - \bar{s}(\bar{X}_t) \right\|^2 = \frac{1}{\alpha_t^2} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\bar{u}_t\|^2 - 2 \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \frac{1}{\alpha_t} \bar{u}_t^\top \bar{s}(\bar{X}_t) + \|\bar{s}(\bar{X}_t)\|^2 = \frac{1}{\alpha_t^2} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\bar{u}_t\|^2 - \|\bar{s}(\bar{X}_t)\|^2.$$

Оценим  $\frac{1}{\alpha_t^2} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\bar{u}_t\|^2$ . Рассмотрев предварительно условное математическое ожидание относительно  $\sigma$ -алгебры  $\tilde{\mathcal{F}}_t$ , в силу центрированности помех наблюдений и ограниченности весовых коэффициентов в протоколе управления (по условиям **A2. а, в, г**) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_t^2} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \|\bar{u}_t\|^2 &= \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} ((x_{t-d_t^i}^j - x_t^i) + (w_t^{i,j} - w_t^{i,i})) \right)^2 = \\ &= \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (x_{t-d_t^i}^j - x_t^i) \right)^2 + \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \left( \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (w_t^{i,j} - w_t^{i,i}) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} (x_{t-d_t^i}^j - x_t^i)^2 \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} (b_t^{i,j})^2 + \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} (b_t^{i,j})^2 ((w_t^{i,j})^2 + (w_t^{i,i})^2) \leq \\ &\leq n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 + (n-1) \bar{b}^2 \sum_{i \in N} \mathbb{E}_{\tilde{\mathcal{F}}_t} \sum_{j \in \bar{N}_t^i} \sum_{k=0}^{\bar{d}} p_k^{i,j} (x_{t-k}^j - x_t^i)^2. \end{aligned}$$

Взяв усреднение относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_t$ , несложно вывести

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_t^2} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\bar{u}_t - \bar{s}(\bar{X}_t)\|^2 &\leq n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 + 2(n-1) \bar{b}^2 \sum_{i \in N} \sum_{j \in N_{\max}^i} (\bar{x}_t^i)^2 + \sum_{k=0}^{\bar{d}} p_k^{i,j} (\bar{x}_t^{j+kn})^2 \leq \\ &\leq n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 + 4(n-1)^2 \bar{b}^2 \|\bar{X}_t\|^2. \end{aligned}$$

**Предложение 2.**

$$\|U \bar{X}\|^2 \leq 2^{\bar{d}} \|\bar{X}\|^2, \dots, \|U^{\bar{d}} \bar{X}\|^2 \leq 2^{\bar{d}} \|\bar{X}\|^2, \dots, \|U^k \bar{X}\|^2 \leq 2^{\bar{d}} \|\bar{X}\|^2.$$

*Доказательство.* В силу определения матрицы  $U$  несложно получить первое неравенство, а последующие неравенства получаем индукцией по  $k$ , учитывая

$$(27) \quad \forall k > \bar{d} \quad U^k = U^{\bar{d}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Предложение 3.** *При выполнении условий **A2** справедлива оценка*

$$\mathbb{E} \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{i=0}^t v_i \right\|^2 \leq 4n \sum_{t=0}^T \mathbb{E} \|v_t\|^2.$$

*Доказательство.* При выполнении условий **A2** случайные элементы  $v_t$  являются мартингальными разностями, т. е. они центрированы при условном усреднении относительно предыстории:  $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}} v_t = 0$ . Доказательство Предположения аналогично доказательству Следствия 1 к Лемме 1 из параграфа 3 работы [46], если взять в качестве  $v_t = \zeta_t - \zeta_{t-1}$ . Размерность векторов  $v_t$  равна  $\bar{n}$ , но так как только первые  $n$  компонент векторов  $v_t$  отличны от нуля, то в формуле для оценки можно вместо  $\bar{n}$  можно использовать величину  $n$ .

**Предложение 4.** *Пусть последовательность чисел  $\mu_t \geq 0$ ,  $\alpha_t \geq 0$ ,  $\tau_t \geq 0$ ,  $t = 0, 1, \dots, T$  удовлетворяет неравенствам*

$$\mu_{t+1} \leq \bar{\alpha} c_1 \tau_t + c_2^2 \tau_t \sum_{k=1}^t \alpha_k \mu_k,$$

где  $c_1, c_2, \bar{\alpha} \geq 0$ , тогда

$$\mu_t \leq c_1 \tau_t e^{(c_2 \tau_t)^2} \bar{\alpha}, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

*Доказательство.* Утверждение предложения непосредственно следует из соответствующего результата в [47] и является дискретным аналогом леммы Гронуолла — Беллмана.

**Предложение 5.** При выполнении условий **A1–A2**

$$\mathbb{E}\|\bar{X}_t\|^2 \leq \left(\frac{2nL_2 + (\bar{\alpha}nL_1\bar{b})^2}{c_3 - 1} + \|\bar{X}_0\|^2\right)e^{t \ln c_3}.$$

*Доказательство.* Запишем уравнение (6) в виде

$$(28) \quad \bar{X}_{t+1} = U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t) + v_t.$$

Для квадрата нормы  $\bar{X}_{t+1}$  имеем

$$(29) \quad \|\bar{X}_{t+1}\|^2 = \|U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t)\|^2 + 2(U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t))^T v_t + \|v_t\|^2.$$

Взяв условное математическое ожидание от обеих частей (29) по  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}_t$  (т. е. при фиксированном  $\bar{X}_t$ ), в силу условной центрированности  $v_t$  получаем

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}}\|\bar{X}_{t+1}\|^2 &= \|U\bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t)\|^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}}\|v_t\|^2 = \\ &= \|U\bar{X}_t\|^2 + 2(U\bar{X}_t)^T G(\alpha_t, \bar{X}_t) + \|G(\alpha_t, \bar{X}_t)\|^2 + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}}\|v_t\|^2. \end{aligned}$$

В силу вида  $v_t$  и липшицевости по  $u$  функций  $f^i(\cdot, \cdot)$  (по предположению **A1**) для  $\|v_t\|^2$  имеем

$$\begin{aligned} \|v_t\|^2 &= \sum_{i \in N} |f^i(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j} (x_{t-d_t^i}^j - x_t^i + w_t^{i,j} - w_t^{i,i})) - \\ &\quad - f^i(x_t^i, \alpha_t s_t^i(\bar{X}_t))|^2 \leq L_1^2 \|\bar{u}_t - \alpha_t \bar{s}_t\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая результат предложения 1, имеем

$$(31) \quad \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{t-1}}\|v_t\|^2 \leq \alpha_t^2 L_1^2 (n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 + 4(n-1)^2 \bar{b}^2 \|\bar{X}_t\|^2).$$

Последовательно оценивая все слагаемые в правой части (30) и учитывая свойства функций  $f^i(\cdot, \cdot)$  (по предположению **A1**) и результаты предложений 1, 2, выводим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathcal{F}_t} \|\bar{X}_{t+1}\|^2 &\leq 2^{\bar{d}} \|\bar{X}_t\|^2 + 2^{1+\bar{d}/2} \|\bar{X}_t\| L_1 (L_x \|\bar{X}_t\| + \alpha_t \|\bar{s}\|) + \\
&+ L_2 (nL_c + L_x \|\bar{X}_t\|^2 + \alpha_t^2 \|\bar{s}\|^2) + \alpha_t^2 L_1^2 (4(n-1)^2 \bar{b}^2 \|\bar{X}_t\|^2 + n^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2) \leq \\
&\leq (2^{\bar{d}} + 2^{1+\bar{d}/2} L_1 L_x + L_2 L_x + \alpha_t 2^{1+\bar{d}/2} L_1 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|) + \\
&+ \alpha_t^2 (L_2 \|\mathcal{L}(A_{\max})\|^2 + 4(n-1)^2 L_1^2 \bar{b}^2) \|\bar{X}_t\|^2 + nL_2 L_c + \alpha_t^2 n^2 L_1^2 \bar{b}^2 \sigma_w^2 \leq \\
&\leq \bar{c} + c_3 \|\bar{X}_t\|^2,
\end{aligned}$$

где  $\bar{c} = nL_2 L_c + \alpha_t^2 \tilde{c}$ .

Взяв безусловное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства, последовательно итерируя по  $t$ , получаем заключение предложения 5

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \|\bar{X}_t\|^2 &\leq \bar{c} + c_3 \mathbb{E} \|\bar{X}_{t-1}\|^2 \leq \bar{c} + \bar{c} c_3 + c_3^2 \mathbb{E} \|\bar{X}_{t-2}\|^2 \leq \\
&\leq \bar{c} (1 + c_3 + c_3^2 + \dots + c_3^{t-1}) + c_3^t \|\bar{X}_0\|^2 \leq \bar{c} \frac{c_3^t - 1}{c_3 - 1} + c_3^t \|\bar{X}_0\|^2 \leq \\
&\leq \left( \frac{\bar{c}}{c_3 - 1} + \|\bar{X}_0\|^2 \right) c_3^t \leq (\bar{c}_4 + \|\bar{X}_0\|^2) e^{t \ln c_3},
\end{aligned}$$

где  $\bar{c}_4 = \bar{c}/c_3 - 1$ .

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1. Итерируя соотношение (6) для  $t, t-1, \dots, 0$ , получим

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{t+1} &= U \bar{X}_t + G(\alpha_t, \bar{X}_t) + v_t = \\
(32) \quad &= U^2 \bar{X}_{t-1} + UG(\alpha_{t-1}, \bar{X}_{t-1}) + G(\alpha_t, \bar{X}_t) + Uv_{t-1} + v_t = \\
&= \dots = U^{t+1} \bar{X}_0 + \sum_{k=0}^t U^{t-k} G(\alpha_k, \bar{X}_k) + \sum_{k=0}^t U^{t-k} v_k.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$(33) \quad \bar{Z}_{t+1} = U^{t+1}\bar{X}_0 + \sum_{k=0}^t U^{t-k}G(\alpha_k, \bar{Z}_k).$$

Оценим величину  $\|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Вычитая (33) из (32) и возводя результат в квадрат, получаем

$$(34) \quad \begin{aligned} \|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2 &= \left\| \sum_{k=0}^t U^{t-k}v_k + \sum_{k=0}^t U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k)) \right\|^2 \leq \\ &\leq 2\left\| \sum_{k=0}^t U^{t-k}v_k \right\|^2 + 2\left\| \sum_{k=0}^t U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k)) \right\|^2 \leq \\ &\leq 2\left\| \sum_{k=0}^t U^{t-k}v_k \right\|^2 + 2\tau_t \sum_{k=0}^t \frac{1}{\alpha_t} \left\| U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k)) \right\|^2. \end{aligned}$$

Для слагаемых во второй сумме в (34), используя предложение 2 и липшицевость  $f^i(\cdot, \cdot)$  (предположение **A1**), выводим

$$\begin{aligned} \left\| U^{t-k}(G(\alpha_k, \bar{X}_k) - G(\alpha_k, \bar{Z}_k)) \right\|^2 &\leq 2^{\bar{d}}L_1^2 \sum_{i=1}^n (L_x|x_k^i - z_k^i| + \\ &+ \alpha_k|s(x_k^i) - s(z_k^i)|)^2 \leq 2^{1+\bar{d}}L_1^2 \sum_{i=1}^n L_x|x_k^i - z_k^i|^2 + \alpha_k^2 s(x_k^i - z_k^i)^2 \leq \\ &\leq 2^{1+\bar{d}}L_1^2(L_x + \alpha_k\|\mathcal{L}(A_{\max})\|)^2 \|\bar{X}_k - \bar{Z}_k\|^2 \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей (34), обозначив  $\mu_T = \max_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2$  и применив предложение 3 к первому слагаемому и полученную выше оценку второго, получим

$$(35) \quad \mu_T \leq 2^{3+\bar{d}}n \sum_{k=0}^T \mathbb{E}\|v_k\|^2 + 2\tau_T L_1^2 \sum_{k=0}^t \alpha_k \left( \frac{L_x}{\underline{\alpha}} + \|\mathcal{L}(A_{\max})\| \right)^2 \mu_k.$$

Для оценки  $\mathbb{E}\|v_k\|^2$ , воспользовавшись полученным ранее соотношением (31) и результатом предложения 5, выводим

$$\mathbb{E}\|v_k\|^2 \leq \alpha_k^2(n^2\sigma_w^2 + 4(n-1)^2(\bar{c}_4 + \|\bar{X}_0\|^2)e^{k \ln c_3})$$

и, следовательно,

$$(36) \quad 2^{3+\bar{d}}n \sum_{k=0}^T \mathbb{E} \|v_k\|^2 \leq \bar{\alpha} 2^{3+\bar{d}} n^3 L_1^2 \bar{b}^2 \tau_T (\sigma_w^2 + 4(\bar{c}_4 + \|\bar{X}_0\|^2) e^{T \ln c_3}).$$

В силу простого соотношения  $\sum_{k=0}^t \alpha_k^2 \leq \bar{\alpha} \sum_{k=1}^t \alpha_k = \bar{\alpha} \tau_t$ , учитывая оценки (36) из (35), имеем

$$(37) \quad \mathbb{E} \mu_T \leq \bar{\alpha} c_1 \tau_T + c_2^2 \tau_T \sum_{k=1}^T \alpha_k \mathbb{E} \mu_k.$$

Из последнего неравенства (37), применив предложение 4, получаем заключение теоремы 1.

*Доказательство теоремы 2.*

В силу первого условия в усредненной дискретной системе достигается  $\varepsilon$ -консенсус. Обозначим через  $x^*$  значение  $\varepsilon$ -консенсуса усредненной дискретной системе (9). Из первых условий теоремы 2 следует выполнение условия теоремы 1, т. е. ее результат справедлив. Из остальных условий теоремы 2 и результата теоремы 1 получаем

$$\mathbb{E} \|\bar{X}_t - x^* \mathbf{1}\|^2 \leq 2\mathbb{E} \|\bar{X}_t - \bar{Z}_t\|^2 + 2\|\bar{Z}_t - x^* \mathbf{1}\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

*Доказательство теоремы 3.*

Результат теоремы 3 является непосредственным следствием теоремы 2.

Все суммы по строкам элементов матрицы  $\bar{\mathcal{L}} = (I - U) + \mathcal{L}(\alpha A_{\max})$  равны нулю и, более того, все диагональные элементы положительны и равны по абсолютной величине сумме всех остальных элементов в строке, которые отрицательны. Следовательно, матрица  $\bar{\mathcal{L}}$  является лапласианом некоторого графа.

При выполнении условия **A3** граф, соответствующий лапласиану  $\bar{\mathcal{L}}$ , имеет остовное дерево, так как граф из первых  $n$  вершин имеет остовное дерево по условию **A3**, а стоящие по  $(n+1)$ -й диагонали единицы связывают последовательно 1-ю вершину с  $(n+1)$ -й, 2-ю вершины с  $(n+2)$ -й и т. д. В такой дискретной системе достигается асимптотический консенсус [25]. Так как в силу предположений теоремы 3 выполнено условие  $\alpha < \frac{1}{d_{\max}}$ , то в силу утверждению на стр. 171–172 из [24] в усредненной дискретной системе достигается асимптотический консенсус, т. е. любой сколь угодно малый уровень близости к состоянию консенсуса достижим за конечное время.

Для выполнения условий теоремы 2 осталось показать, что константы  $\bar{C}_1$  и  $\bar{C}_2$  совпадают с соответствующими константами из теоремы 1. Это следует из того, что в рассматриваемом случае  $L_1 = L_2 = 1$ ,  $L_x = L_c = 0$ .

*Доказательство леммы 1.*

Возьмем в качестве состояния узла  $i$ :  $x_t^i = q_t^i / r_t^i$ .

Проведем доказательство от противного. Предположим, что при некоторой оптимальной стратегии не все  $x_t^i$  равны между собой, т. е. существует такой узел с номером  $k \in N$  и такое подмножество узлов  $\tilde{N}_t$ , что  $x_t^k > x_t^j, \forall j \in \tilde{N}_t$ .

Обозначим через  $l = |\tilde{N}_t|$  количество узлов в  $\tilde{N}_t$ . Состояние остальных  $n - l$  узлов равны  $x_t^k$ .

Пусть разница между состоянием  $k$ -го узла и наибольшим из множества  $\tilde{N}_t$  равна  $\epsilon_t$ , т. е.

$$(38) \quad \epsilon_t = x_t^k - \max_{j \in \tilde{N}_t} x_t^j.$$

Рассмотрим новую стратегию распределения заданий. Уменьшим загрузку всех

$n - l$  узлов, имевших максимальную загрузку, на  $\frac{\epsilon}{2(n-l)}$  (т. е. всего на  $\frac{\epsilon}{2}$ ) и добавим эти  $\frac{\epsilon}{2}$  заданий к любому из  $l$  узлов из  $\tilde{N}_t$ . Для новой стратегии получили, что время обработки заданий в системе будет меньше исходного на  $\frac{\epsilon}{2(n-l)}$ , т. е. меньше, чем минимальное по предположению. Получили противоречие.

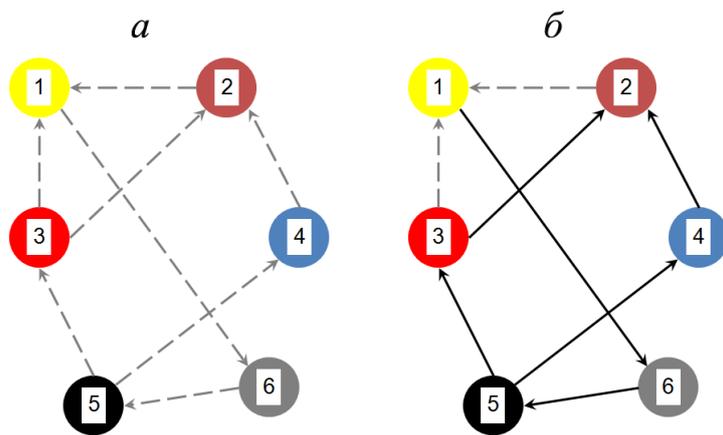


Рис. 1. а – максимальное множество каналов связи  $E_{\max}$ ; б – топология сети.

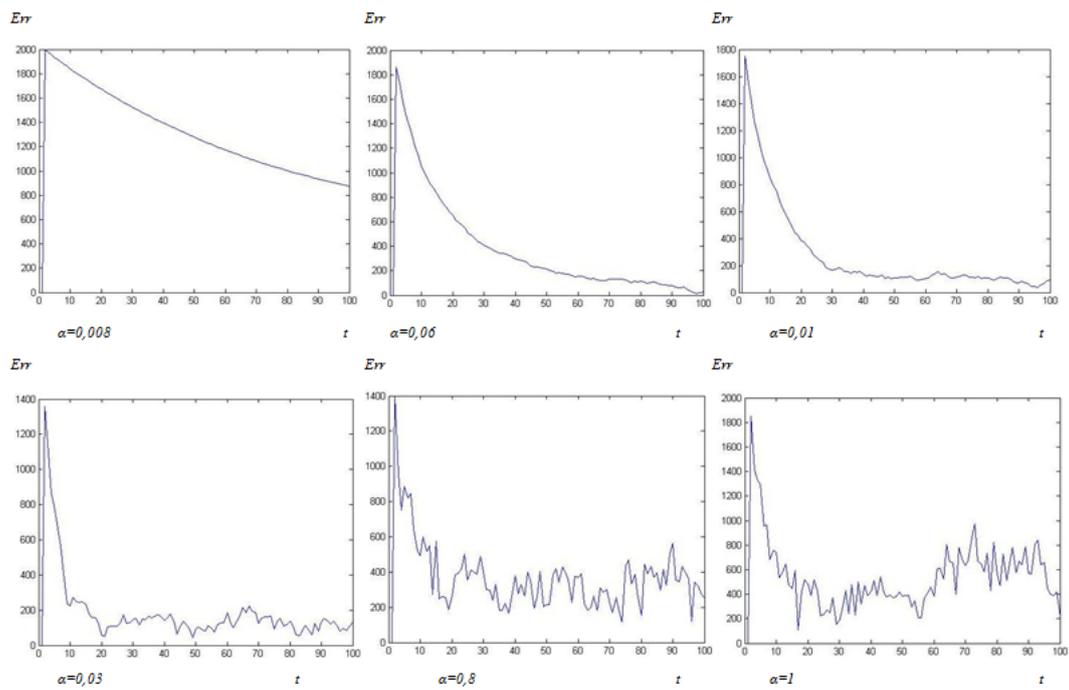


Рис. 2. Сравнение средних невязок при разных параметрах шага  $\alpha$ .

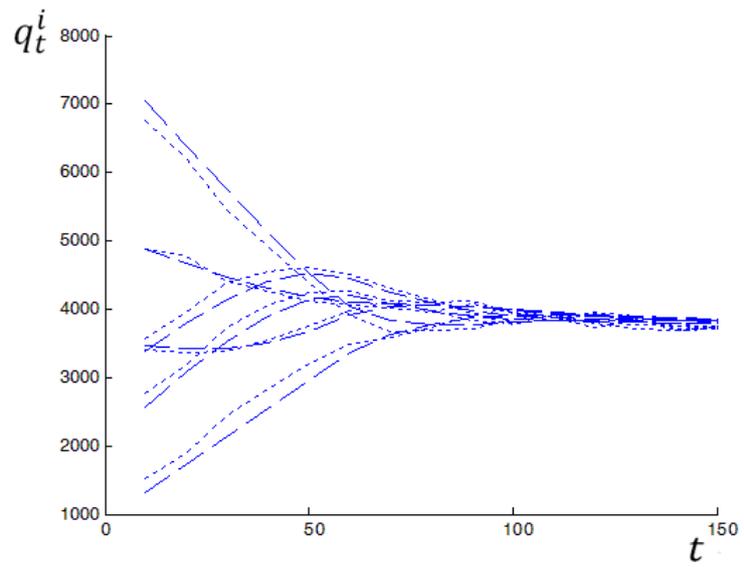


Рис. 3. Поведение траекторий системы (21) и соответствующей усредненной модели.

Подписи к рисункам

Рис. 1. а – максимальное множество каналов связи  $E_{\max}$ ; б – топология сети.

Рис. 2. Сравнение средних невязок при разных параметрах шага  $\alpha$ .

Рис. 3. Поведение траекторий системы (21) и соответствующей усредненной модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fax A., Murray R.M.* Information flow and cooperative control of vehicle formations // IEEE Trans. Automat. Contr. Sept. 2004. Vol. 49. P. 1465–1476.
2. *Toner J., Tu Y.* Flocks, herds, and schools: a quantitative theory of flocking // Phys. Rev. E. Oct. 1998. Vol. 58. №4. P. 4828–4858.
3. *Cortes J., Bullo F.* Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2005. Vol. 44. №5. P. 1543–1574.
4. *Paganini F., Doyle J., Low S.* Scalable laws for stable network congestion control // Proc. Of 40th IEEE Conf. on Decision and Control. 2001. Vol. 1. Orlando. FL. P. 185–190.
5. *Antal C., Granichin O., Levi S.* Adaptive autonomous soaring of multiple UAVs using SPSA // In Proc. 49th IEEE CDC. 2010. December 15-17. Atlanta. GA. USA. P. 3656–3661, 2010.
6. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Trans. Automat. Contr. June 2003. Vol. 48. P. 988–1000.
7. *Olfati-Saber R., Murray R.M.* Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Trans. Automatic Control. Sep. 2004. Vol. 49. P. 1520–1533.

8. *Ren W., Beard R.W.* Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies, *IEEE Trans. Automat. Control.* 2005. Vol. 50. №. 5. P. 655–661.
9. *Huang M.* Stochastic Approximation for Consensus with General Time-Varying Weight Matrices // *Proc. 49th IEEE CDC.* Atlanta. GA. USA. Dec. 2010. P. 7449–7454.
10. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) // *Управление большими системами.* Спец. вып. 30.1 “Сетевые модели в управлении”. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 470–505.
11. *Ren W., Beard R.W.* Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control, *Communication and Control Engineering Series*, New York, Springer Verlag, 2007, ISBN: 978-1-84800-014-8.
12. *Tsitsiklis J.N., Bertsekas D.P., Athans M.* Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1986. Vol. 31. №. 9. P. 803–812.
13. *Huang M., Manton J.H.* Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: stochastic algorithms and asymptotic behavior // *SIAM J. Control Optim.* 2009. Vol. 48. №. 1. P. 134–161.
14. *Kar S., Moura J.M.F.* Distributed consensus algorithms in sensor networks with imperfect communication: link failures and channel noise // *IEEE Trans. Sig. Process.* 2009. Vol. 57. №. 1. P. 355-369.

15. *Li T., Zhang J.-F.* Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies // *Automatica*. 2009. Vol. 45. №. 8. P. 1929-1936.
16. *Rajagopal R., Wainwright M. J.* Network-based consensus averaging with general noisy channels // *IEEE Trans. on Signal Proc.* 2011. Vol. 59. №. 1. P. 373–385.
17. *Granichin O., Vakhitov A., Vlasov V.* Adaptive control of SISO plant with time-varying coefficients based on random test perturbation // *In Proc. 2010 Amer. Control Conf.* June 30-July 02. 2010. Baltimore. MD. USA. P. 4004–4009.
18. *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Гуревич Л.С.* Алгоритм стохастической аппроксимации с пробным возмущением на входе в нестационарной задаче оптимизации // *АиТ*. 2009. №11. С. 70–79.
19. *Granichin O., Gurevich L., Vakhitov A.* Discrete-time minimum tracking based on stochastic approximation algorithm with randomized differences // *Proc. Combined 48th IEEE Conf. on Decision and Control and 28th Chinese Control Conf.* December 16-18. 2009. Shanghai. P.R. China. P. 5763–5767.
20. *Borkar V.S.* Stochastic approximation: a dynamical systems viewpoint. New York: Cambridge University Press. 164 p. 2008.
21. *Граничин О.Н.* Стохастическая оптимизация и системное программирование // *Стохаст. оптимизация в информатике*. 2010. Т. 6. С. 3–44.
22. *Вахитов А.Т., Граничин О.Н., Паньшенсков М.А.* Методы оценивания скорости передачи данных в Грид // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2009. №. 11. С. 45–52.

23. *Амелина Н.О.* Балансировка загрузки узлов децентрализованной вычислительной сети при неполной информации // *Нейрокомпьютеры: разработка, применение.* 2011. № 6. С. 56–63.
24. *Амелина Н.О.* Мультиагентные технологии, адаптация, самоорганизация, достижение консенсуса // *Стохаст. оптимизация в информатике.* 2011. Т. 7. Вып. 1. С. 149–185.
25. *Амелина Н. О., Фрадков А. Л.* Метод усредненных моделей в задаче достижения консенсуса // *Стохаст. оптимизация в информатике.* 2012. Т. 8. Вып. 1. С. 3–39.
26. *Дерезицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации // *АиТ.* 1974. № 1. С. 67–75.
27. *Дерезицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. — М.: Наука, 1981. 216 с.
28. *Ljung L.* Analysis of recursive stochastic algorithms // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1977. №. 4. P. 551–575.
29. *Gerencser L.* A representation theorem for the error of recursive estimators // *SIAM J. Control Optim.* 2006. Vol. 44. №. 6. P. 2123–2188.
30. *Kushner H.J.* Approximation and Weak Convergence Methods for Random processes, with Application to Stochastic Systems Theory. Boston. MIT Press. 1984. 287 p.
31. *Kushner H.J., Clark D.S.* Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems. NY: Springer–Verlag, 1978. 276 p.

32. *Ljung L., Soderstrom T.* Theory and Practice of Recursive Identification. Boston. MIT Press. 1983. 541 p.
33. *Fradkov A.L.* Continuous-time averaged models of discrete-time stochastic systems: survey and open problems // Proc. IEEE CDC-50. 2011. Orlando. USA. P. 2076–2081.
34. *Friedrich T.A., Sauerwald T.B., Vilenchik D.C.* Smoothed analysis of balancing networks // Random Structures and Algorithms. Aug. 2011. Vol. 39. №1. P. 115–138.
35. *Li H.* Load balancing algorithm for heterogeneous P2P systems based on Mobile Agent // Proc. ICEICE 2011. 2011. P. 1446–1449.
36. *Kechadi M.-T., Savvas I.K.* Dynamic task scheduling for irregular network topologies // Parallel Computing. 2005. Vol. 31. №. 7. P. 757–776.
37. *Катыева Я.В.* Балансировка загрузки несимметричного вычислительного комплекса при решении задачи статистического оценивания // Информатика и системы управления. 2006. № 2(12). С. 88–93.
38. *Костенецкий П.С., Лепихов А.В., Соколинский Л.Б.* Технологии параллельных систем баз данных для иерархических многопроцессорных сред // АиТ. 2007. № 5. С. 112–125.
39. *Li Y., Lan Z.* A survey of load balancing in Grid computing // Proc. Int. Symposium on Computational and Information Science (CIS04). 2004. Shanghai. China. P. 280–285.

40. *Gilly K., Juiz C., Puigjaner R.* An up-to-date survey in web load balancing // World Wide Web. 2011. Vol. 14. №2. P. 105–131.
41. *Sim K.M., Sun W.H.* Ant colony optimization for routing and load-balancing: Survey and new directions // IEEE Trans. Syst. Man, and Cybernetics. P. A: Syst. Humans. Sept. 2003. Vol. 33. No. 5. P. 560–572.
42. *Джунусов И.А., Фрадков А.Л.* Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам // Автоматика и Телемеханика. No. 8, 2011. С. 41–52.
43. *Armbruster D., Mikhailov A.S., Kaneko K. (eds.)* Networks of Interacting Machines: Production Organization in Complex Industrial Systems and Biological Cells — World Scientific. Singapore. 2005. 267 p.
44. *Glashenko A., Inozemtzev S., Grachev I., Skobelev P.* Magenta Technology: case studies of Magenta i-scheduler for road transportation // Proc. Int. Conf. Autonom. Agents Multi Agent Syst. (AAMAS-6). Hawaii. 2007. P. 1385–1392.
45. *Амелина Н., Лада А., Майоров И. и др.* Исследование моделей организации грузовых перевозок с применением мультиагентной системы адаптивного планирования грузовиков в реальном времени // Проблемы управления. 2011. №6. С. 31–37.
46. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968. 356 с.
47. *Бернштейн С.Н.* Стохастические уравнения в конечных разностях и стохастические дифференциальные уравнения. Т. 4. М.: Наука, 1964. С. 484–542.

Амелина Н.О., *Санкт-Петербургский государственный университет, аспирант,*  
*Санкт-Петербург, ngranichina@gmail.com*

Фрадков А.Л., *Санкт-Петербургский государственный университет, Институт*  
*проблем машиноведения РАН, профессор, Санкт-Петербург, fradkov@mail.ru*