

© 2018  Р.Э. СЕЙФУЛЛАЕВ
(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

АНАЛИЗ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ¹

Метод анализа гибридных систем на основе перехода к системе с пилообразным запаздыванием и использования нестационарных функционалов Ляпунова-Красовского и дескрипторных переменных, развитый Э.М.Фридман для линейных систем, перенесен на нелинейные многосвязные системы Лурье. Рассмотрено дискретное управление в виде обратной связи с ограниченным сверху переменным шагом дискретизации. При этом в уравнениях системы функция управления умножена на скалярную ограниченную нелинейную функцию. Такой случай соответствует многим осцилляторам, в частности, системе «Маятник на тележке». На основе классических результатов В.А. Якубовича о неущербности S-процедуры задача оценки верхней границы шага дискретизации сводится к анализу разрешимости системы линейных матричных неравенств.

1. Введение

Современные системы управления все чаще реализуются на компьютерах и, следовательно, являются цифровыми. При расчете и реализации таких систем возникает важная задача выбора шага (интервала) дискретизации, обеспечивающего устойчивость и приемлемое качество системы. Даже для линейных систем эта задача не является тривиальной, если требуется не просто доказать, что при достаточно малом шаге дискретности система сохраняет свойства непрерывной, а найти достаточно хорошие, «неконсервативные» оценки предельно допустимой величины шага дискретизации. Для нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) систем эта задача, несмотря на ее важность, изучена недостаточно.

В последние годы в мировой литературе вырос интерес к новому подходу, основанному на преобразовании дискретно-непрерывного описания системы к виду систем с переменным (пилообразным) запаздыванием. Сама идея не нова, впервые, по-видимому, она рассматривалась в работах [1, 2], а метод функционалов Ляпунова-Красовского широко применяется для анализа систем с запаздыванием (например, [8, 9]). Однако с предложенным Э.М. Фридман обобщенным функционалом Ляпунова-Красовского [5] в сочетании с дескрипторным методом исследования систем с запаздыванием [3] идея приобрела эффективную расчетную составляющую,

¹Работа выполнена при поддержке рффи (проект 11-08-01218) и Федеральной целевой программы «Кадры» (соглашения 8846, 8855).

основанную на линейных матричных неравенствах (ЛМИ) и превратилась в мощный метод расчета, позволяющий существенно снизить консервативность оценок [4, 5]. Таким образом, можно говорить о Фридмановских оценках шага дискретизации систем. Однако до сих пор метод Фридман применялся только к линейным системам.

В работе рассматривается класс нелинейных систем с произвольным количеством «секторных» нелинейностей. Система замкнута квантованной по времени обратной связью. Задача состоит в оценивании верхней границы шага дискретизации, ниже которой система абсолютно устойчива. Вместо традиционного сведения к объекту с дискретным временем использован альтернативный прием: эффект квантования моделируется как запаздывание с последующим построением и применением функционала Ляпунова-Красовского [5]. На основании метода S-процедуры [6] задача оценивания границы шага дискретизации сводится к анализу разрешимости системы линейных матричных неравенств.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^N q_i \xi_i(t) + (B + B_0 \xi_0(t)) u(t), \\ \sigma_0(t) &= r_0^T x(t), \quad \xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t), \\ \sigma_i(t) &= r_i^T x(t), \quad \xi_i(t) = \varphi_i(\sigma_i(t), t), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – постоянные матрицы, $q_i \in \mathbb{R}^n$, $r_i \in \mathbb{R}^n$, $r_0 \in \mathbb{R}^n$ – постоянные векторы.

Предположим, что для всех $t \geq 0$ график каждой функции $\xi_i = \varphi_i(\sigma_i, t)$ (где t рассматривается как параметр, а σ – как аргумент функции) расположен в двуполостном секторе между прямыми $\xi_i = \mu_{1i} \sigma_i$ и $\xi_i = \mu_{2i} \sigma_i$ (Рис. 1), где $\mu_{1i} < \mu_{2i}$ – некоторые вещественные числа. Таким образом, выполняется неравенство

$$(2) \quad \mu_{1i} \sigma_i^2 \leq \sigma_i \xi_i \leq \mu_{2i} \sigma_i^2, \quad i = 1, \dots, N.$$

Предположим, что нелинейная функция $\xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t)$ ограничена для всех $t \geq 0$

$$\varphi_0^- \leq \xi_0(t) \leq \varphi_0^+.$$

Пусть задана последовательность моментов времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ и кусочно-постоянная функция управления

$$u(t) = u_d(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.

Предположим, что для некоторого $h \in \mathbb{R}$ ($h > 0$) выполнено

$$t_{k+1} - t_k \leq h, \quad \forall k \geq 0$$

и рассмотрим закон управления в виде обратной связи

$$(3) \quad u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},$$

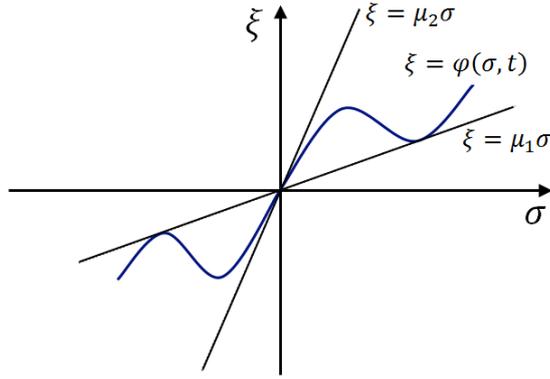


Рис. 1. Секторная нелинейность

где $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Закон (3) перепишем следующем образом:

$$(4) \quad u(t) = Kx(t - \tau(t)),$$

где $\tau(t) = t - t_k$, $t_k \leq t < t_{k+1}$.

Целью является исследование влияния величины верхней границы шага дискретизации h на устойчивость замкнутой системы

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + (B + B_0 \xi_0(t)) Kx(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^N q_i \xi_i(t), \\ \sigma_0(t) &= r_0^T x(t), \quad \xi_0(t) = \varphi_0(\sigma_0(t), t), \\ \sigma_i(t) &= r_i^T x(t), \quad \xi_i(t) = \varphi_i(\sigma_i(t), t), \quad i = 1, \dots, N, \\ \tau(t) &= t - t_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \end{aligned}$$

3. Предварительные сведения

Определение 1. Пространство абсолютно непрерывных на $[-h, 0)$ функций $f : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с интегрируемым квадратом первой производной обозначим через W .

Введем в W норму: $\|f\|_W = \max_{\theta \in [-h, 0]} |f(\theta)| + \left[\int_{-h}^0 |\dot{f}(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}$.

Функцию $x(t)$ на интервале $[-h, 0)$ доопределим не умаляя общности нулем, т.е. $x(t) \equiv 0$ при $t \in [-h, 0)$. Функции $x_t(\theta) : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим через

$$x_t(\theta) = x(t + \theta).$$

Определение 2. Систему (5) будем называть экспоненциально устойчивой в целом с показателем затухания α , если существует $\beta > 0$ такое, что для решения (5) $x(t)$ с начальным условием x_{t_0} выполнено

$$|x(t)|^2 \leq \beta e^{-2\alpha(t-t_0)} \|x_{t_0}\|_W^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

Доказательство основного результата основано на следующей предварительной лемме, доказательство которой приведено в [5].

Лемма 1. Пусть существуют положительные числа β_1, β_2 и функционал $V : \mathbb{R} \times W \times L_2[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$(6) \quad \beta_1 |\phi(0)|^2 \leq V(t, \phi, \dot{\phi}) \leq \beta_2 \|\phi\|_W^2, \quad \forall \phi \in W.$$

Пусть $x(t)$ удовлетворяет (5), и функция $\bar{V}(t) = V(t, x_t, \dot{x}_t)$ непрерывна справа по t , абсолютно непрерывна для всех $t \neq t_k$ и удовлетворяет условию

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow t_k^-} \bar{V}(t) \geq \bar{V}(t_k).$$

Если для заданного $\alpha > 0$ неравенство

$$(8) \quad \dot{\bar{V}}(t) + 2\alpha \bar{V}(t) \leq 0$$

выполнено для почти всех t , то система (5) экспоненциально устойчива в целом с показателем затухания α .

4. Основные результаты

Для краткости записи введем обозначения:

$$\mathcal{B}(t) = B + B_0 \xi_0(t), \quad \mathcal{B}^- = B + B_0 \varphi_0^-, \quad \mathcal{B}^+ = B + B_0 \varphi_0^+.$$

Пусть P, Q – симметричные положительно определенные матрицы размера $n \times n$, P_2, P_3 – некоторые матрицы размера $n \times n$, $\{\varkappa_0^-\}_{i=1}^N, \{\varkappa_0^+\}_{i=1}^N, \{\varkappa_1^-\}_{i=1}^N, \{\varkappa_1^+\}_{i=1}^N$ – положительные вещественные числа.

Рассмотрим следующие матрицы:

$$\Psi_{S_0}^- = \begin{bmatrix} \Phi_{S_1}^- & \Phi_{F_{12}}^- & \Phi_{S_2}^{-(1)} & \cdots & \Phi_{S_2}^{-(N)} \\ * & \Phi_{F_{22}|\tau(t)=0} & \Phi_{F_{23}}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F_{23}}^{(N)} \\ * & * & \Phi_{S_3}^{-(1)} & \cdots & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & \Phi_{S_3}^{-(N)} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{S_0}^+ = \begin{bmatrix} \Phi_{S_1}^+ & \Phi_{F_{12}}^+ & \Phi_{S_2}^{+(1)} & \cdots & \Phi_{S_2}^{+(N)} \\ * & \Phi_{F_{22}|\tau(t)=0} & \Phi_{F_{23}}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F_{23}}^{(N)} \\ * & * & \Phi_{S_3}^{+(1)} & \cdots & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & \Phi_{S_3}^{+(N)} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{S_1}^- = \begin{bmatrix} \Phi_{S_4}^- & \Phi_{F_{12}}^- & \Phi_{S_5}^{-(1)} & \cdots & \Phi_{S_5}^{-(N)} & -hP_2^T \mathcal{B}^- K \\ * & \Phi_{F_{22}|\tau(t)=h} & \Phi_{F_{23}}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F_{23}}^{(N)} & -hP_3^T \mathcal{B}^- K \\ * & * & \Phi_{S_6}^{-(1)} & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & \Phi_{S_6}^{-(N)} & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{S1}^+ = \begin{bmatrix} \Phi_{S4}^+ & \Phi_{F12}^+ & \Phi_{S5}^{+(1)} & \dots & \Phi_{S5}^{+(N)} & -hP_2^T \mathcal{B}^+ K \\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=h} & \Phi_{F23}^{(1)} & \dots & \Phi_{F23}^{(N)} & -hP_3^T \mathcal{B}^+ K \\ * & * & \Phi_{S6}^{+(1)} & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & \Phi_{S6}^{+(N)} & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix},$$

где " * " обозначает симметричный блок симметричной матрицы, а

$$\Phi_{F11}(t) = P_2^T (A + \mathcal{B}(t)K) + (A + \mathcal{B}(t)K)^T P_2 + 2\alpha P,$$

$$\Phi_{F12}(t) = P - P_2^T + (A + \mathcal{B}(t)K)^T P_3,$$

$$\Phi_{F13}^{(i)} = P_2^T q_i, \quad \Phi_{F23}^{(i)} = P_3^T q_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\Phi_{F22}(t) = -P_3 - P_3^T + (h - \tau(t))Q,$$

$$\Phi_{F11}^- = \Phi_{F11}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^-}, \quad \Phi_{F11}^+ = \Phi_{F11}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^+},$$

$$\Phi_{F12}^- = \Phi_{F12}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^-}, \quad \Phi_{F12}^+ = \Phi_{F12}(t)|_{\mathcal{B}(t)=\mathcal{B}^+},$$

$$\Phi_{S1}^- = \Phi_{F11}^- - \sum_{i=1}^N \varkappa_{0i}^- \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T, \quad \Phi_{S1}^+ = \Phi_{F11}^+ - \sum_{i=1}^N \varkappa_{0i}^+ \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T,$$

$$\Phi_{S2}^{-(i)} = P_2^T q_i + \frac{1}{2} \varkappa_{0i}^- (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \quad \Phi_{S3}^{-(i)} = -\varkappa_{0i}^-,$$

$$\Phi_{S2}^{+(i)} = P_2^T q_i + \frac{1}{2} \varkappa_{0i}^+ (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \quad \Phi_{S3}^{+(i)} = -\varkappa_{0i}^+,$$

$$\Phi_{S4}^- = \Phi_{F11}^- - \sum_{i=1}^N \varkappa_{1i}^- \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T, \quad \Phi_{S4}^+ = \Phi_{F11}^+ - \sum_{i=1}^N \varkappa_{1i}^+ \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T,$$

$$\Phi_{S5}^{-(i)} = P_2^T q_i + \frac{1}{2} \varkappa_{1i}^- (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \quad \Phi_{S6}^{-(i)} = -\varkappa_{1i}^-,$$

$$\Phi_{S5}^{+(i)} = P_2^T q_i + \frac{1}{2} \varkappa_{1i}^+ (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \quad \Phi_{S6}^{+(i)} = -\varkappa_{1i}^+.$$

Теорема 1. Пусть для заданного $\alpha > 0$ существуют матрицы $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($P > 0$), $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($Q > 0$), $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а также положительные вещественные числа $\{\varkappa_{0i}^-\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{0i}^+\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{1i}^-\}_{i=1}^N$ и $\{\varkappa_{1i}^+\}_{i=1}^N$, такие, что следующая система линейных матричных неравенств

$$\Psi_{S0^-} < 0, \quad \Psi_{S0^+} < 0, \quad \Psi_{S1^-} < 0, \quad \Psi_{S1^+} < 0$$

разрешима. Тогда система (5) экспоненциально устойчива в целом со скоростью затухания α .

Далее рассмотрим более сложный случай, позволяющий добиться более точных результатов за счет использования "расширенного" функционала (см. Приложение 2), предложенного Э.М. Фридман [5].

Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_3^{(i)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 1, \dots, N$), $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – некоторые матрицы.

Рассмотрим следующие матрицы:

$$\Theta = \begin{bmatrix} P + h \frac{X+X^T}{2} & hX_1 - hX \\ * & -hX_1 - hX_1^T + h \frac{X+X^T}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{H0}^- &= \begin{bmatrix} \Phi_{H1|\tau(t)=0}^- & \Phi_{12|\tau(t)=0} & \Phi_{13|\tau(t)=0}^- & \Phi_{H2}^{-(1)} & \cdots & \Phi_{H2}^{-(N)} \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=0} & \Phi_{23|\tau(t)=0}^- & \Phi_{24}^{(1)} & \cdots & \Phi_{24}^{(N)} \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=0} & \Phi_{34}^{(1)} & \cdots & \Phi_{34}^{(N)} \\ * & * & * & \Phi_{H3}^{-(1)} & \cdots & 0 \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \cdots & \Phi_{H3}^{-(N)} \end{bmatrix}, \\
\Psi_{H0}^+ &= \begin{bmatrix} \Phi_{H1|\tau(t)=0}^+ & \Phi_{12|\tau(t)=0} & \Phi_{13|\tau(t)=0}^+ & \Phi_{H2}^{+(1)} & \cdots & \Phi_{H2}^{+(N)} \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=0} & \Phi_{23|\tau(t)=0}^+ & \Phi_{24}^{(1)} & \cdots & \Phi_{24}^{(N)} \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=0} & \Phi_{34}^{(1)} & \cdots & \Phi_{34}^{(N)} \\ * & * & * & \Phi_{H3}^{+(1)} & \cdots & 0 \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \cdots & \Phi_{H3}^{+(N)} \end{bmatrix}, \\
\Psi_{H1}^- &= \begin{bmatrix} \Phi_{H4|\tau(t)=h}^- & \Phi_{12|\tau(t)=h} & \Phi_{13|\tau(t)=h}^- & \Phi_{H5}^{-(1)} & \cdots & \Phi_{H5}^{-(N)} & hY_1^T \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=h} & \Phi_{23|\tau(t)=h}^- & \Phi_{24}^{(1)} & \cdots & \Phi_{24}^{(N)} & hY_2^T \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=h} & \Phi_{34}^{(1)} & \cdots & \Phi_{34}^{(N)} & hT^T \\ * & * & * & \Phi_{H6}^{-(1)} & \cdots & 0 & hq_1^T Y_3^{(1)T} \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \cdots & \Phi_{H6}^{-(N)} & hq_N^T Y_3^{(N)T} \\ * & * & * & * & * & * & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix}, \\
\Psi_{H1}^+ &= \begin{bmatrix} \Phi_{H4|\tau(t)=h}^+ & \Phi_{12|\tau(t)=h} & \Phi_{13|\tau(t)=h}^+ & \Phi_{H5}^{+(1)} & \cdots & \Phi_{H5}^{+(N)} & hY_1^T \\ * & \Phi_{22|\tau(t)=h} & \Phi_{23|\tau(t)=h}^+ & \Phi_{24}^{(1)} & \cdots & \Phi_{24}^{(N)} & hY_2^T \\ * & * & \Phi_{33|\tau(t)=h} & \Phi_{34}^{(1)} & \cdots & \Phi_{34}^{(N)} & hT^T \\ * & * & * & \Phi_{H6}^{+(1)} & \cdots & 0 & hq_1^T Y_3^{(1)T} \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \cdots & \Phi_{H6}^{+(N)} & hq_N^T Y_3^{(N)T} \\ * & * & * & * & * & * & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}(t) &= A^T P_2 + P_2^T A + 2\alpha P - Y_1 - Y_1^T - (1 - 2\alpha(h - \tau(t))) \frac{X + X^T}{2}, \\
\Phi_{12}(t) &= P - P_2^T + A^T P_3 - Y_2 + (h - \tau(t)) \frac{X + X^T}{2}, \\
\Phi_{13}(t) &= Y_1^T + P_2^T \mathcal{B}(t) K - T + (1 - 2\alpha(h - \tau(t)))(X - X_1), \\
\Phi_{22}(t) &= -P_3 - P_3^T + (h - \tau(t))Q, \\
\Phi_{23}(t) &= Y_2^T + P_3^T \mathcal{B}(t) K - (h - \tau(t))(X - X_1), \\
\Phi_{33}(t) &= T + T^T - (1 - 2\alpha(h - \tau(t))) \frac{X + X^T - 2X_1 - 2X_1^T}{2}, \\
\Phi_{14}^{(i)} &= P_2^T q_i - Y_3^{(i)} q_i, \quad \Phi_{24}^{(i)} = P_3^T q_i, \quad \Phi_{34}^{(i)} = Y_3^{(i)} q_i, \quad i = 1, \dots, N, \\
\Phi_{13}^-(t) &= Y_1^T + P_2^T \mathcal{B}^- K - T + (1 - 2\alpha(h - \tau(t)))(X - X_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{13}^+(t) &= Y_1^T + P_2^T \mathcal{B}^+ K - T + (1 - 2\alpha(h - \tau(t)))(X - X_1), \\
\Phi_{23}^-(t) &= Y_2^T + P_3^T \mathcal{B}^- K - (h - \tau(t))(X - X_1), \\
\Phi_{23}^+(t) &= Y_2^T + P_3^T \mathcal{B}^+ K - (h - \tau(t))(X - X_1), \\
\Phi_{H1}^-(t) &= \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^N \varkappa_{0i}^- \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T, \quad \Phi_{H1}^+(t) = \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^N \varkappa_{0i}^+ \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T, \\
\Phi_{H2}^{-(i)} &= \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2} \varkappa_{0i}^- (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \quad \Phi_{H2}^{+(i)} = \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2} \varkappa_{0i}^+ (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \\
\Phi_{H3}^{-(i)} &= -\varkappa_{0i}^-, \quad \Phi_{H3}^{+(i)} = -\varkappa_{0i}^+, \\
\Phi_{H4}^-(t) &= \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^N \varkappa_{0i}^- \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T, \quad \Phi_{H4}^+(t) = \Phi_{11}(t) - \sum_{i=1}^N \varkappa_{0i}^+ \mu_{1i} \mu_{2i} r_i r_i^T, \\
\Phi_{H5}^{-(i)} &= \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2} \varkappa_{1i}^- (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \quad \Phi_{H5}^{+(i)} = \Phi_{14}^{(i)} + \frac{1}{2} \varkappa_{1i}^+ (\mu_{1i} + \mu_{2i}) r_i, \\
\Phi_{H6}^{-(i)} &= -\varkappa_{1i}^-, \quad \Phi_{H6}^{+(i)} = -\varkappa_{1i}^+, \quad i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть для заданного $\alpha > 0$ существуют матрицы $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($P > 0$), $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($Q > 0$), $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_3^{(i)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i=1, \dots, N$), а также положительные вещественные числа $\{\varkappa_{0i}^-\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{0i}^+\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{1i}^-\}_{i=1}^N$ и $\{\varkappa_{1i}^+\}_{i=1}^N$, такие, что следующая система линейных матричных неравенств

$$\Theta > 0, \quad \Psi_{H0}^- < 0, \quad \Psi_{H0}^+ < 0, \quad \Psi_{H1}^- < 0, \quad \Psi_{H1}^+ < 0$$

разрешима. Тогда система (3) экспоненциально устойчива в целом со скоростью затухания α .

5. Примеры

5.1. Синхронизация связанных маятников

Рассмотрим задачу синхронизации колебаний двух связанных математических маятников. В предположении отсутствия трения система из двух связанных маятников описывается уравнениями

$$(9) \quad \begin{cases} \ddot{\vartheta}_1(t) = -\frac{g}{l} \sin \vartheta_1(t) + \frac{k}{ml^2} (\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t), \\ \ddot{\vartheta}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin \vartheta_2(t) + \frac{k}{ml^2} (\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)), \end{cases}$$

где $\vartheta_i(t)$ ($i = 1, 2$) – угол отклонения i -го маятника от оси вращения, $u(t)$ – управляющее воздействие (вращающий момент, приложенный к первому маятнику), k – коэффициент связи (например, коэффициент жесткости пружины), m и l – масса и длина маятника (предполагается, оба маятника имеют одинаковые массы и длины).

Пусть коэффициент связи k является неизвестным, и выполнено неравенство

$$0 < k^- \leq k \leq k^+.$$

Систему (9) можно переписать в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + q_1 \xi_1(t) + q_2 \xi_2(t) + Bu(t), \\ \sigma_1(t) &= r_1^T x(t), \quad \xi_1(t) = \sin \sigma_1(t) \cos \frac{\vartheta_1(t) + \vartheta_2(t)}{2}, \\ \sigma_2(t) &= r_2^T x(t), \quad \xi_2(t) = k \sigma_2(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \vartheta_1(t) - \vartheta_2(t) \\ \dot{\vartheta}_1(t) - \dot{\vartheta}_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}, \\ q_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{l} \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad r_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Неопределенности ξ_1 и ξ_2 удовлетворяют для всех $t \geq 0$ условиям

$$-0.2173 \cdot \sigma_1^2 \leq \sigma_1 \xi_1 \leq \sigma_1^2, \quad k_1 \sigma_2^2 \leq \sigma_2 \xi_2 \leq k_2 \sigma_2^2.$$

Закон управления задан в виде

$$(11) \quad u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},$$

где $t_{k+1} - t_k \leq h, \quad \forall k \geq 0$.

Разрешимость линейных матричных неравенств проверялась в среде Matlab [14] с использованием пакета Yalmip [15] (решатель Sedumi). Для системы с параметрами $g = 9.8 \frac{\text{M}}{\text{с}^2}$, $l = 1 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$, $k_1 = 50 \frac{\text{H}}{\text{M}}$, $k_2 = 60 \frac{\text{H}}{\text{M}}$, $K = [17.6, -3]$ значения максимального шага дискретизации h , при которых система (10) устойчива, приведены в Таблице 1.

Теорема 1	Теорема 2	Моделирование
$h \leq 0.04 \text{ с.}$	$h \leq 0.135 \text{ с.}$	$h \leq h_*, 0.193 \text{ с.} < h_* < 0.195 \text{ с.}$

Таблица 1. Значения максимального шага дискретизации ($\alpha = 0$)

5.2. Маятник на тележке

Пусть маятник с массой m , длиной l и углом отклонения ϑ ($\vartheta = 0$ в нижнем положении) может вращаться на оси, закрепленной на тележке. Тележка массы M движется в горизонтальном направлении по нормали к оси вращения маятника под действием внешней силы u . Целью является стабилизация маятника в вертикальном положении и стабилизация тележки (т.е. достижение состояния $s = 0, \dot{s} = 0$, где s – перемещение тележки).

Математическая модель системы выглядит следующим образом (пренебрегаем трением и силой реакции маятника на тележку):

$$(12) \quad \begin{cases} \ddot{\vartheta}(t) = \frac{g}{l} \sin \vartheta(t) + \frac{\cos \vartheta(t)}{Ml} u(t), \\ \ddot{s}(t) = \frac{1}{M} u(t). \end{cases}$$

В работе [12] предложен алгоритм раскачки маятника, основанный на *методе скоростного градиента* [10, 11]. Когда маятник достигает верхнего положения происходит переключение на алгоритм стабилизации, который выглядит следующим образом:

$$(13) \quad u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1},$$

где $x = \text{col}(\vartheta, \dot{\vartheta}, s, \dot{s})$, $t_{k+1} - t_k \leq h$, $\forall k \geq 0$.

Для системы со следующими параметрами

$$l = 1 \text{ м}, \quad m = 0.1 \text{ кг}, \quad M = 2 \text{ кг}, \quad g = 9.8 \text{ м/с}^2, \quad K = [-21, -4.04, 0.001, 0.02],$$

по Теореме 1 из [5] максимальный шаг дискретизации равен 0.16.

Как уже было сказано ранее, результаты Э.М. Фридман [5] распространяются только на линейные системы, следовательно, для применения метода Фридман система (12) должна быть линеаризована вблизи верхнего положения. Результаты раздела 4 позволяют получить более точные оценки шага дискретизации без использования линеаризации, что отражено в Таблице 2.

Теорема 1 из [5] (для линеаризованной системы)	Теорема 1	Теорема 2	Моделирование
$h \leq 0.160$	$h \leq 0.182$	$h \leq 0.331$	$h \leq h_*$, $0.401 < h_* < 0.403$

Таблица 2. Значения максимального шага дискретизации ($\alpha = 0$)

6. Заключение

Работа посвящена развитию метода оценки шага дискретизации на основе перехода к системе с пилообразным запаздыванием и применению нестационарных функционалов Ляпунова-Красовского и дескрипторных переменных, развитый Э.М.Фридман для линейных систем. Получены оценки шага дискретизации для нелинейных многосвязных систем Лурье, обобщающие результаты [12, 13]. Применение к задачам синхронизации простых маятников и стабилизации маятника на тележке показывает существенное улучшение оценок шага дискретизации по сравнению с получаемыми другими методами.

В дальнейшем планируется распространить полученные результаты на задачу синтеза регуляторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R} \times W \times L_2[-h, 0]$ следующий функционал:

$$(П.1) \quad V_0(t, x_t, \dot{x}_t) = x_t(0)^T P x_t(0) + (h - \tau(t)) \int_{-\tau(t)}^0 e^{2\alpha s} \dot{x}_t^T(s) Q \dot{x}_t(s) ds.$$

Для доказательства теоремы будем проверять условия Леммы 1.

Покажем, что условие (6) выполнено. Так как второе слагаемое в (П.1) неотрицательно, для проверки первого неравенства в (6) найдем положительный параметр β_1 такой, что

$$(П.2) \quad \beta_1 |x_t(0)|^2 \leq x_t(0)^T P x_t(0).$$

Поскольку $P > 0$, все собственные значения P положительны, и, следовательно, для выполнения (П.2) достаточно выбрать β_1 равным минимальному собственному значению P .

Аналогично (П.2), верно

$$x_t(0)^T P x_t(0) \leq \gamma_1 |x_t(0)|^2 \leq \gamma_1 \left(\max_{\theta \in [-h, 0]} |x_t(\theta)| \right)^2,$$

где γ_1 – максимальное собственное значение P .

Принимая во внимание $\max_{s \in [-h, 0]} e^{2\alpha s} = 1$, оценим второе слагаемое в (П.1):

$$\begin{aligned} (h - \tau(t)) \int_{-\tau(t)}^0 e^{2\alpha s} \dot{x}_t^T(s) Q \dot{x}_t(s) ds &\leq h \int_{-\tau(t)}^0 e^{2\alpha s} \dot{x}_t^T(s) Q \dot{x}_t(s) ds \leq \\ &\leq h \int_{-\tau(t)}^0 \dot{x}_t^T(s) Q \dot{x}_t(s) ds \leq \gamma_2 h \int_{-\tau(t)}^0 |\dot{x}_t(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

где γ_2 – максимальное собственное значение Q . Так как матрица Q – положительно определенная, то $\gamma_2 > 0$.

Таким образом,

$$V_0(t, x_t, \dot{x}_t) \leq \gamma_1 \left(\max_{\theta \in [-h, 0]} |x_t(\theta)| \right)^2 + \gamma_2 h \int_{-\tau(t)}^0 |\dot{x}_t(s)|^2 ds \leq \beta_2 \|x_t\|_W^2,$$

где $\beta_2 = \max(\gamma_1, \gamma_2 h)$. Следовательно, условие (6) выполнено.

Рассмотрим функцию $\bar{V}_0(t)$, значениями которой в каждый момент времени t будут значения функционала $V_0(t, x_t, \dot{x}_t)$, т.е.

$$\bar{V}_0(t) = x(t)^T P x(t) + V_Q(t, \dot{x}(t)),$$

где

$$V_Q(t, \dot{x}(t)) = (h - \tau(t)) \int_{-\tau(t)}^0 e^{2\alpha s} \dot{x}^T(t+s) Q \dot{x}(t+s) ds.$$

Заметим, $V_Q \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow t_k^+} V_Q(t, \dot{x}(t)) = V_Q(t_k, \dot{x}(t_k)) = 0$, так как $\tau(t)|_{t=t_k} = 0$.

Поэтому $\bar{V}_0(t)$ непрерывна справа, и условие (7) выполнено.

Принимая во внимание $\frac{d}{dt}x(t - \tau(t)) = (1 - \dot{\tau}(t))\dot{x}(t - \tau(t)) = 0$, оценим

$$(П.3) \quad \dot{V}_0(t) + 2\alpha\bar{V}_0(t) \leq 2x^T(t)P\dot{x}(t) + 2\alpha x^T(t)Px(t) + \\ + (h - \tau(t))\dot{x}^T(t)Q\dot{x}(t) - e^{-2\alpha h} \int_{-\tau(t)}^0 \dot{x}^T(t+s)Q\dot{x}(t+s)ds.$$

Обозначим

$$v_1 = \frac{1}{\tau(t)} \int_{-\tau(t)}^0 \dot{x}(t+s)ds,$$

где под $v_1|_{\tau(t)=0}$ будем понимать следующее: $\lim_{\tau(t) \rightarrow 0} v_1 = \dot{x}(t)$.

Из неравенства Йенсена [7] получаем следующую оценку

$$(П.4) \quad \int_{-\tau(t)}^0 \dot{x}^T(t+s)Q\dot{x}(t+s)ds \geq \tau(t)v_1^TQv_1.$$

Если $x(t)$ – решение (5), то верно следующее равенство

$$(П.5) \quad 0 = 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] \times \\ \times \left[(A + \mathcal{B}(t)K)x(t) - \tau(t)\mathcal{B}(t)Kv_1 + \sum_{i=1}^N q_i\xi_i(t) - \dot{x}(t) \right].$$

Определим векторы $\eta_1 = \text{col}\{x, \dot{x}, \xi_1, \dots, \xi_N, v_1\}$, $\eta_1 \in \mathbb{R}^{3n+N}$ и $\eta_1(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t), \xi_1(t), \dots, \xi_N(t), v_1(t)\}$.

Добавим (П.5) в правую часть (П.3) и воспользуемся оценкой (П.4). В итоге получим

$$(П.6) \quad \dot{V}_0(t) + 2\alpha\bar{V}_0(t) \leq \eta_1^T(t)\Psi_F(t)\eta_1(t),$$

где

$$\Psi_F(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{F11}(t) & \Phi_{F12}(t) & \Phi_{F13}^{(1)} & \dots & \Phi_{F13}^{(N)} & -\tau(t)P_2^T\mathcal{B}(t)K \\ * & \Phi_{F22}(t) & \Phi_{F23}^{(1)} & \dots & \Phi_{F23}^{(N)} & -\tau(t)P_3^T\mathcal{B}(t)K \\ * & * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 & -\tau(t)Qe^{-2\alpha h} \end{bmatrix},$$

Таким образом, для выполнения условия (8) достаточно потребовать, чтобы матрица $\Psi_F(t)$ была отрицательно определенной для всех $t \geq 0$. Рассмотрим следующие линейные матричные неравенства:

$$(П.7) \quad \Psi_{F0}^- = \begin{bmatrix} \Phi_{F11}^- & \Phi_{F12}^- & \Phi_{F13}^{(1)} & \dots & \Phi_{F13}^{(N)} \\ * & \Phi_{F22}|_{\tau(t)=0} & \Phi_{F23}^{(1)} & \dots & \Phi_{F23}^{(N)} \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} < 0,$$

$$(P.8) \quad \Psi_{F_0}^+ = \begin{bmatrix} \Phi_{F11}^+ & \Phi_{F12}^+ & \Phi_{F13}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F13}^{(N)} \\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=0} & \Phi_{F23}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F23}^{(N)} \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} < 0,$$

$$(P.9) \quad \Psi_{F_1}^- = \begin{bmatrix} \Phi_{F11}^- & \Phi_{F12}^- & \Phi_{F13}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F13}^{(N)} & -hP_2^T \mathcal{B}^- K \\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=h} & \Phi_{F23}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F23}^{(N)} & -hP_3^T \mathcal{B}^- K \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix} < 0,$$

$$(P.10) \quad \Psi_{F_1}^+ = \begin{bmatrix} \Phi_{F11}^+ & \Phi_{F12}^+ & \Phi_{F13}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F13}^{(N)} & -hP_2^T \mathcal{B}^+ K \\ * & \Phi_{F22|\tau(t)=h} & \Phi_{F23}^{(1)} & \cdots & \Phi_{F23}^{(N)} & -hP_3^T \mathcal{B}^+ K \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & -hQe^{-2\alpha h} \end{bmatrix} < 0.$$

Определим вектор $\eta_0 = \text{col}\{x, \dot{x}, \xi_1, \dots, \xi_N\}$. Тогда из (P.7), (P.8), (P.9) и (P.10) следует $\Psi_F(t) < 0$ для всех $t > 0$, так как

$$\begin{aligned} & \frac{h - \tau(t)}{h} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0(t)}{\varphi_0^+ - \varphi_0^-} \eta_0^T \Psi_{F_0}^- \eta_0 + \frac{h - \tau(t)}{h} \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0^-}{\varphi_0^+ - \varphi_0^-} \eta_0^T \Psi_{F_0}^+ \eta_0 + \\ & + \frac{\tau(t)}{h} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0(t)}{\varphi_0^+ - \varphi_0^-} \eta_1^T \Psi_{F_1}^- \eta_1 + \frac{\tau(t)}{h} \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0^-}{\varphi_0^+ - \varphi_0^-} \eta_1^T \Psi_{F_1}^+ \eta_1 = \eta_1^T \Psi_F(t) \eta_1 < 0, \quad \forall \eta_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Определим

$$(P.11) \quad \begin{aligned} F_0^-(\eta_0) &= \eta_0^T \Psi_{F_0}^- \eta_0, & F_0^+(\eta_0) &= \eta_0^T \Psi_{F_0}^+ \eta_0, \\ F_1^-(\eta_1) &= \eta_1^T \Psi_{F_1}^- \eta_1, & F_1^+(\eta_1) &= \eta_1^T \Psi_{F_1}^+ \eta_1. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнены следующие неравенства:

$$(P.12) \quad \begin{aligned} F_0^-(\eta_0) &< 0, \quad \forall \eta_0 \neq 0, \\ F_0^+(\eta_0) &< 0, \quad \forall \eta_0 \neq 0, \\ F_1^-(\eta_1) &< 0, \quad \forall \eta_1 \neq 0, \\ F_1^+(\eta_1) &< 0, \quad \forall \eta_1 \neq 0, \end{aligned}$$

то условие (8) Леммы 1 выполнено.

Введем квадратичные формы

$$\begin{aligned} G_0^{(i)}(\eta_0) &= (\xi_i - \mu_{1i} r_i^T x)(\mu_{2i} r_i^T x - \xi_i), \quad i = 1, \dots, N, \\ G_1^{(i)}(\eta_1) &= (\xi_i - \mu_{1i} r_i^T x)(\mu_{2i} r_i^T x - \xi_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Из (2) следует, что следующие неравенства выполнены вдоль траекторий системы (5):

$$G_0^{(i)}(\eta_0) \geq 0, \quad G_1^{(i)}(\eta_1) \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Поэтому мы можем потребовать выполнения первого неравенства (П.12) на множестве $G_0^{(i)}(\eta_0) \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, N$, т.е.

$$(П.13) \quad F_0^-(\eta_0) < 0 \text{ при } G_0^{(i)}(\eta_0) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \eta_0 \neq 0.$$

Аналогичным образом:

$$(П.14) \quad F_0^+(\eta_0) < 0 \text{ при } G_0^{(i)}(\eta_0) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \eta_0 \neq 0,$$

$$(П.15) \quad F_1^-(\eta_1) < 0 \text{ при } G_1^{(i)}(\eta_1) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \eta_1 \neq 0,$$

$$(П.16) \quad F_1^+(\eta_1) < 0 \text{ при } G_1^{(i)}(\eta_1) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \eta_1 \neq 0.$$

Преобразуем (П.13), (П.14), (П.15) и (П.16) с помощью S-процедуры [6]. Рассмотрим следующие формы:

$$S_0^-(\eta_0) = F_0^-(\eta_0) + \sum_{i=1}^N \varkappa_{0-}^- G_0^{(i)}(\eta_0), \quad S_0^+(\eta_0) = F_0^+(\eta_0) + \sum_{i=1}^N \varkappa_{0+}^+ G_0^{(i)}(\eta_0),$$

$$S_1^-(\eta_1) = F_1^-(\eta_1) + \sum_{i=1}^N \varkappa_{1-}^- G_1^{(i)}(\eta_1), \quad S_1^+(\eta_1) = F_1^+(\eta_1) + \sum_{i=1}^N \varkappa_{1+}^+ G_1^{(i)}(\eta_1),$$

и потребуем, чтобы они были отрицательно определенными для некоторых неотрицательных наборов $\{\varkappa_{0-}^-\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{0+}^+\}_{i=1}^N$, $\{\varkappa_{1-}^-\}_{i=1}^N$ и $\{\varkappa_{1+}^+\}_{i=1}^N$ соответственно:

$$(П.17) \quad \exists \{\varkappa_{0-}^- \geq 0\}_{i=1}^N : S_0^-(\eta_0) < 0, \quad \forall \eta_0 \neq 0,$$

$$(П.18) \quad \exists \{\varkappa_{0+}^+ \geq 0\}_{i=1}^N : S_0^+(\eta_0) < 0, \quad \forall \eta_0 \neq 0,$$

$$(П.19) \quad \exists \{\varkappa_{1-}^- \geq 0\}_{i=1}^N : S_1^-(\eta_1) < 0, \quad \forall \eta_1 \neq 0,$$

$$(П.20) \quad \exists \{\varkappa_{1+}^+ \geq 0\}_{i=1}^N : S_1^+(\eta_1) < 0, \quad \forall \eta_1 \neq 0.$$

Таким образом, условие (П.17) достаточно для выполнения (П.13) (В случае $N = 1$ по теореме о неущербности S-процедуры [6] эти условия эквивалентны). Аналогично, (П.18) достаточно для выполнения (П.14), (П.19) достаточно для выполнения (П.15) и (П.20) достаточно для выполнения (П.16). Следовательно, если условия (П.17) - (П.20) выполнены, то и условие (8) выполнено. Принимая во внимание (П.6), (П.11), получаем следующие неравенства:

$$S_0^-(\eta_0) \leq \eta_0^T \Psi_{S_0^-}^- \eta_0, \quad S_0^+(\eta_0) \leq \eta_0^T \Psi_{S_0^+}^+ \eta_0,$$

$$S_1^-(\eta_1) \leq \eta_1^T \Psi_{S_1^-}^- \eta_1, \quad S_1^+(\eta_1) \leq \eta_1^T \Psi_{S_1^+}^+ \eta_1.$$

Следовательно, если

$$\Psi_{S_0^-}^- < 0, \quad \Psi_{S_0^+}^+ < 0, \quad \Psi_{S_1^-}^- < 0, \quad \Psi_{S_1^+}^+ < 0,$$

то (8) выполнено.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим дискретизацию с постоянным шагом $t_{k+1} - t_k = h$, $k = 0, 1, \dots$. Введем расширенный функционал

$$(П.1) \quad V(t, x_t, \dot{x}_t) = V_0(t, x_t, \dot{x}_t) + V_1(t, x_t),$$

где

$$V_1(t, x_t) = (h - \tau(t)) \zeta^T \begin{bmatrix} \frac{X+X^T}{2} & -X + X_1 \\ * & -X_1 - X_1^T + \frac{X+X^T}{2} \end{bmatrix} \zeta,$$

и $\zeta = \text{col} \{x_t(0), x_{t-\tau(t)}(0)\}$.

Для выполнения (6) потребуем

$$(П.2) \quad \Theta > 0.$$

Действительно,

$$(П.3) \quad x_t(0)^T P x_t(0) + V_1(t, x_t) = \frac{h - \tau(t)}{h} \zeta^T \Theta(h) \zeta + \frac{\tau(t)}{h} \zeta^T \Theta(0) \zeta \geq \beta_1 |x_t(0)|^2,$$

где $\beta_1 = \min(\nu_1, \nu_2)$, а ν_1 и ν_2 – минимальные собственные значения P и $\Theta(h)$ соответственно.

Как и выше, рассмотрим функцию

$$(П.4) \quad \bar{V}(t) = V(t, x_t, \dot{x}_t).$$

$\bar{V}(t)$ непрерывна справа по t , и условие (7) выполнено, так как $\bar{V}_0(t)$ непрерывна справа, и $\lim_{t \rightarrow t_k^-} V_1(t, x_t) = V_1(t_k, x_{t_k}) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} V_1(t, x_t) = 0$ (поскольку $\tau(t) = h$ при $t \rightarrow t_k^-$, а $\tau(t) = 0$ при $t \rightarrow t_k^+$, а следовательно, $x(t) = x(t - \tau(t))$).

Если $x(t)$ – решение (5), то верны равенства

$$0 = 2[-x(t) + x(t - \tau(t)) + \tau(t)v_1] \times \\ \times \left[x^T(t)Y_1^T + \dot{x}^T(t)Y_2^T + x^T(t - \tau(t))T^T + \sum_{i=1}^N \xi_i q_i^T Y_3^{(i)T} \right], \\ 0 = 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] \left[Ax(t) + \mathcal{B}(t)Kx(t - \tau(t)) + \sum_{i=1}^N q_i \xi_i(t) - \dot{x}(t) \right],$$

правые части которых добавим к $\dot{\bar{V}}(t)$ и, используя неравенство Йенсена, получим

$$(П.5) \quad \dot{\bar{V}}(t) + 2\alpha \bar{V}(t) \leq \eta^T(t) \Psi(t) \eta(t),$$

где $\eta(t) = \text{col} \{x(t), \dot{x}(t), x(t - \tau(t)), \xi_1(t), \dots, \xi_N(t), v_1(t)\}$, $\eta \in \mathbb{R}^{4n+N}$,

$$(П.6) \quad \Psi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \Phi_{13}(t) & \Phi_{14}^{(1)} & \dots & \Phi_{14}^{(N)} & \tau(t)Y_1^T \\ * & \Phi_{22}(t) & \Phi_{23}(t) & \Phi_{24}^{(1)} & \dots & \Phi_{24}^{(N)} & \tau(t)Y_2^T \\ * & * & \Phi_{33}(t) & \Phi_{34}^{(1)} & \dots & \Phi_{34}^{(N)} & \tau(t)T^T \\ * & * & * & 0 & \dots & 0 & \tau(t)q_1^T Y_3^{(1)T} \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & 0 & \dots & 0 & \tau(t)q_N^T Y_3^{(N)T} \\ * & * & * & * & * & * & -\tau(t)Qe^{-2\alpha h} \end{bmatrix}.$$

Аналогично предыдущему случаю воспользуемся S-процедурой (с параметрами $\{\mathcal{K}_{0i}^-\}_{i=1}^N$, $\{\mathcal{K}_{0i}^+\}_{i=1}^N$, $\{\mathcal{K}_{1i}^-\}_{i=1}^N$ и $\{\mathcal{K}_{1i}^+\}_{i=1}^N$) и, рассматривая четыре предельных случая, вместо (П.6) перейдем к следующим линейным матричным неравенствам:

$$(П.7) \quad \Psi_{H0}^- < 0,$$

$$(П.8) \quad \Psi_{H0}^+ < 0,$$

$$(П.9) \quad \Psi_{H1}^- < 0,$$

$$(П.10) \quad \Psi_{H1}^+ < 0.$$

Далее воспользуемся вспомогательной леммой, доказательство которой приведено в [5].

Лемма 2. *Линейные матричные неравенства (П.2), (П.7) - (П.10) выпуклы по h : если они разрешимы для h , то они разрешимы для всех $\bar{h} \in (0, h]$.*

Таким образом, теорема доказана в случае постоянного шага дискретизации: $t_{k+1} - t_k \leq h$. Обобщим полученный результат на случай переменного шага дискретизации: $t_{k+1} - t_k = \bar{h}_k \leq h$, $k = 0, 1, \dots$

Рассмотрим функционал Ляпунова-Красовского

$$(П.11) \quad V_{var}(t, x_t, \dot{x}_t) = \bar{V}_{var}(t) = x^T(t)Px(t) + (t_{k+1} - t) \int_{t_k}^t e^{2\alpha(s-t)} \dot{x}^T(s) Q \dot{x}(s) ds + \\ + (t_{k+1} - t) \zeta^T(t) \begin{bmatrix} \frac{X+X^T}{2} & -X + X_1 \\ * & -X_1 - X_1^T + \frac{X+X^T}{2} \end{bmatrix} \zeta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

где $\zeta(t) = col\{x(t), x(t_k)\}$. Заметим, что в (П.11) второе и третье слагаемые равны 0 при $t \rightarrow t_k^-$ and $t \rightarrow t_k^+$. Следовательно, \bar{V}_{var} непрерывен, так как $\lim_{t \rightarrow t_k} \bar{V}_{var}(t) = \bar{V}_{var}(t_k)$.

Применяя к $\bar{V}_{var}(t)$ рассуждения, аналогичные предыдущим, получаем заключение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухеев Ю.В., Соболев В.А., Фридман Э.М.* Асимптотический анализ цифровых систем управления // Автоматика и телемеханика. 1988. № 9. С. 83–88.
2. *Э. М. Фридман.* Использование моделей с последействием в задаче синтеза оптимальных цифровых систем управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 10. С. 55–60.
3. *Fridman E.* New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. // Systems & Control Letters. 2001. 43 (4) 309-319.

4. *Fridman E, Seuret A, Richard JP.* Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. // *Automatica.* 2004. 40 (8) 1441-1446.
5. *Fridman, E.* A refined input delay approach to sampled-data control. // *Automatica.* 2010. 46, 421-427.
6. *А. Х. Гелуг, Г. А. Леонов, В. А. Якубович.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
7. *Gu, K., Kharitonov, V., and Chen, J.* Stability of time-delay systems. Birkhauser, Boston, 2003.
8. *V.L. Kharitonov, A.P. Zhabko.* Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. // *Automatica.* 2003. 39 15-20.
9. *А.Х. Гелуг, И.Е. Зубер.* Инвариантная стабилизация некоторых классов неопределенных систем с запаздывающим аргументом. // *Автоматика и Телемеханика.* 2011. №. 9. С. 161–172.
10. *А. Л. Фрадков.* Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // *Автоматика и Телемеханика.* 2001. №. 9. С. 90–101.
11. *А. Л. Фрадков.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. С. 208.
12. *Seifullaev, R.E.* Speed gradient energy and sampled-data control of cart-pendulum system. // In 9th IFAC Symposium Advances in Control Education, 478–483. Nizhny Novgorod, Russia. 2012.
13. *Ruslan E. Seifullaev, Alexander L. Fradkov.* Sampled-Data Control of Nonlinear Oscillations Based on LMIs and Fridman’s Method. // In 5th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems, 95–100. Caen, France. 2013.
14. MathWorks – MATLAB and Simulink for Technical Computing. <http://www.mathworks.com/>
15. YALMIP Wiki Main/Home Page. <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>

Сейфуллаев Р.Э., *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, ruslanspb-zenit@yandex.ru*

Фрадков А.Л., д-р техн. наук, *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, fradkov@mail.ru*