

©2007 г. А.Р. Ахметжанов, А.А. Меликян, А.Л. Фрадков

ОПТИМАЛЬНОСТЬ МЕТОДА СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА
В ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ ВЫБРОСОМ
ИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

Рассматривается задача управления процессом выброса частицы из потенциальной ямы на примере нелинейной системы с трением. Доказывается оптимальность метода скоростного градиента [1], в том смысле, что если он не гарантирует выброс частицы из потенциальной ямы, то это невозможно и при использовании другого закона управления. Исследуются нелинейные осцилляторы Дуффинга и Гельмгольца с одной степенью свободы и отрицательной жесткостью. Для каждого из них строится кривая, разделяющая плоскость параметров задачи на две части: часть, где выброс осуществим, и часть, где он неосуществим. Получена оценка угла наклона касательной к разделяющей кривой в окрестности начала координат.

1. Введение. Наряду с задачами, связанными с проблемой подавления колебаний в системе [2], имеется большой класс задач, в которых как правило, возникают вопросы поддержания колебаний на заданном энергетическом уровне, вопросы раскачиваемости колебательной системы из начального состояния до требуемого или же вопросы выброса из потенциальной ямы (далее – выброс). Такие постановки часто встречаются при разработке вибрационных машин и механизмов, рабочий орган которых совершает возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение [3,4], генераторов электрических или акустических колебаний и т.д.

Задача раскачиваемости системы до заданного уровня обычно формулируется как задача перевода системы из начального устойчивого положения равновесия в новое состояние. В частности, в технике часто встречается задача перевода системы из одного положения равновесия в другое. Ниже рассматривается является задача о выбросе системы из потенциальной ямы (или о преодолении потенциального барьера). Она может служить как в качестве промежуточного этапа при решении задачи перевода системы из одного положения равновесия в другое, так и в качестве важной самостоятельной задачи, возникающей во многих областях техники (процелкивание

мембран и оболочек, опрокидывание судов и т.д.) [5,6]. Часто переход через потенциальный барьер соответствует фазовому переходу в физической системе.

В отличие от известного осциллятора Дуффинга с кубическим по координате членом для описания жесткости пружины, встречающегося во многих механических задачах, ниже рассматривается аналогичная система с отрицательной линейной жесткостью. Динамическое уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = u, \quad |u| \leq \gamma \quad (1.1)$$

где потенциалом служит потенциал Дуффинга

$$\Pi(\varphi) = -\varphi^2/2 + \varphi^4/4$$

а на управляющий параметр накладывается симметричное ограничение (см. фиг. 1). Диссипация и сопротивление окружающей среды учитывается линейным членом с коэффициентом трения ρ . При этом величина γ , характеризующая ограниченность возмущения, и коэффициент ρ считаются достаточно малыми, такими, что колебательный характер движения системы сохраняется.

Рассматриваемая система представляет собой простейшую возможную модель вынужденных колебаний консоли в неоднородном поле двух постоянных магнитов. На фиг. 2 изображена схема экспериментальной установки [7]: тонкая стальная балка зажата в жестком корпусе с закрепленными на нем магнитами M_l и M_r . Их притяжение преодолевают упругие силы, которые сами по себе удерживали бы балку в прямолинейном состоянии. Было показано [7], что уравнение (1.1) описывает динамику балки или пластины при учете лишь одной моды колебаний, что оправданно в случае достаточно тонкой и длинной балки, а также мощных магнитов (тогда наблюдаемые колебания в основном соответствуют первой моде). Роль управления в данном случае играет возбуждающая сила.

Было проведено [8] сравнение различных алгоритмов управления в задаче приведения рассматриваемой системы (1.1) из одного положения равновесия в другое. Ставился вопрос определения области значений параметров γ и ρ , при которых данный переход осуществим, или, иными словами, осуществим выброс из потенциальной ямы. С помощью численного исследования было показано, что использование градиентного метода управления $u = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}$ приводит к лучшим результатам, чем использование гармо-

нического закона воздействия: $u = \gamma \sin \omega t$. В частности, при $\rho = 0.25$ выброс неизбежен, если $\gamma > 0.212$, $\omega \approx 1.07$, тогда как при $\gamma < 0.212$ и любых значениях частоты внешнего воздействия выброса не происходит. В то же время воздействие с обратной связью приводит к выбросу из потенциальной ямы при меньших амплитудах. Например, при том же значении коэффициента трения $\rho = 0.25$ оценка критического значения дала величину $\gamma \approx 0.1767$. Численное же моделирование показало, что выброс из потенциальной возможен и при значительно меньших значениях амплитуды воздействия $\gamma \approx 0.1225$.

В связи с изложенным возникают следующие вопросы: насколько градиентный метод управления (метод управления по скоростному градиенту) согласуется с оптимальным в целом, а именно, возможен ли выброс из потенциальной ямы при меньших амплитудах, когда используется иной метод управления? Возможно ли получить более точную оценку на параметры задачи, при которых выброс из потенциальной ямы происходит? Ответу на эти вопросы посвящена данная работа.

Система (1.1) была предметом исследований во многих работах. Например, она изучалась [9,10] с точки зрения теории динамических систем и теории бифуркаций в условиях гармонического или постоянного закона возбуждения, причем управление по обратной связи не рассматривалось. Проводилось [8] более подробное исследование на основе метода скоростного градиента (СГ-метода), указывалась его локальная оптимальность [11], а о глобальной оптимальности говорилось, как о нерешенной проблеме. В данной работе доказывается, что метод скоростного градиента действительно является глобально оптимальным, т.е. если он не гарантирует достижения цели управления, то это невозможно сделать и при любом другом алгоритме управления. Доказательство этого факта дается с помощью дополнительной задачи оптимального управления со свободным правым концом. В заключительной части работы проводится уточнение границ области в пространстве параметров, в которой выброс может быть осуществим.

Задача управления колебательными системами исследовалась также в других работах (см., например, [12]). Рассматривалась [13] задача возбуждения линейного осциллятора до энергии требуемого уровня, к которой может быть сведена задача о выбросе. Однако глобальная оптимальность СГ-метода доказывалась [13] путем явного решения вспомогательной задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина

[14]. Это невозможно сделать в общем случае нелинейных систем, таких как осциллятор Дуффинга или математический маятник.

2. Метод скоростного градиента. В основу подхода к решению задач положен метод управления по скоростному управлению [8], существенность которого состоит в следующем. Рассмотрим нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad u \in U$$

Пусть цель управления u – достижение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0$$

где $Q(x, t)$ – гладкая целевая функция. Тогда для построения алгоритма вычисляется скалярная функция $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$ – скорость изменения величины $\bar{Q}(t) = Q(x(t), t)$ в силу уравнения движения

$$\omega(x, u, t) = \partial Q(x, t) / \partial t + [\nabla_x Q(x, t)]^T F(x, u, t)$$

Затем находится градиент функции $\omega(x, u, t)$ по входным переменным – управлению u :

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = [\partial \omega / \partial u]^T = [\partial F / \partial u]^T \nabla_x Q(x, t)$$

и задается алгоритм изменения $u(t)$ либо согласно дифференциальному уравнению

$$du/dt = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – симметричная положительно определенная матрица, либо – конечным соотношением вида

$$u(t) = -\gamma \text{sign} \nabla_u \omega(x, u, t)$$

в случае релейных ограничений, налагаемых на управления. Данный алгоритм принято называть алгоритмом скоростного градиента, поскольку в нем изменение управления $u(t)$ происходит пропорционально скорости изменения $\bar{Q}(t)$.

В качестве примера рассмотрим задачу возбуждения маятника

$$\ddot{\varphi} + \sin \varphi = u, \quad |u| \leq \gamma$$

до заданного уровня энергии H_* , в которой целевую функцию удобно выбрать в виде

$$Q(x) = (H_0(\varphi, \psi) - H_*)^2/2$$

Здесь $H_0(\varphi, \psi)$ – гамильтониан невозмущенной задачи ($u = 0$), $\psi = \dot{\varphi}$. Тогда соотношение СГ-метода можно записать в более простом виде

$$u = -\gamma \operatorname{sign}((H_0 - H_*)\dot{\varphi})$$

Если заранее известно, что $H_0 < H_*$, то этот закон сводится к релейному методу управления по скорости

$$u = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi} \tag{2.1}$$

3. Исследование основной задачи. В данной работе исследуется система (1.1) с потенциальной функцией общего вида $\Pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. В начальный момент времени система находится в состоянии устойчивого равновесия: $(\varphi_0, 0)$, определяемом условием минимума потенциала: $\Pi'(\varphi_0) = 0$, $\Pi''(\varphi_0) > 0$. Каждому положению равновесия можно поставить в соответствие свою область притяжения, ее принято строить для случая недиссипативных неуправляемых систем ($\rho = 0, u = 0$); эта область ограничена участками сепаратрис. Будем говорить, что выброс возможен, если существует управление $u(t)$, такое, что соответствующая ему траектория $\phi(t)$ пересекает сепаратрису в некоторый момент времени и в дальнейшем находится вне области притяжения точки $(\varphi_0, 0)$. При этом предполагается, что область притяжения не содержит других положений равновесия или предельных циклов.

Для консервативных систем выброс можно осуществить при любых ненулевых ограничениях управления. В случае диссипации это возможно не всегда, например, при сколь угодно больших значениях ρ и сколь угодно малых γ выброс невозможен. Следовательно, для каждого значения $\rho \neq 0$ существует такое критическое значение γ^* , что при $\gamma > \gamma^*$ выброс возможен, а при $\gamma < \gamma^*$ точка будет оставаться в пределах рассматриваемой области притяжения сколь угодно долго, какой бы алгоритм управления ни применялся.

Рассматриваемая задача о выбросе является по сути своей игрой качества с одним игроком. Согласно известной методике [15] для ее решения необходимо сформулировать дополнительную задачу степени. В качестве подобной вспомогательной задачи здесь рассматривается задача

оптимального управления со свободным правым концом, а именно, задача приведения системы (1.1) на границу (терминального) множества $\Omega = \{(\varphi, \psi) : \varphi - \varphi_1 = 0\}$ с некоторым терминальным функционалом, конкретный вид которого несуществен. Здесь φ_1 – точка пересечения ветвей сепаратрисы. Приведение фазовой точки на границу области Ω возможно тогда и только тогда, когда возможен выброс.

Гамильтониан вспомогательной задачи записывается в виде

$$\mathcal{H}(\varphi, \psi, p, q, u) = p\psi + q(-\Pi'(\varphi) - \rho\psi + u)$$

где $\psi = \dot{\varphi}$, а p и q – пара сопряженных переменных. Система уравнений принципа максимума выглядит следующим образом

$$\dot{\varphi} = \psi, \quad \dot{\psi} = -\Pi'(\varphi) - \rho\psi + u, \quad \dot{p} = q\Pi''(\varphi), \quad \dot{q} = -p + \rho q \quad (3.1)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление определяется из условия максимума гамильтониана

$$u = \arg \max_{|u| \leq \gamma} \mathcal{H}(\varphi, \psi, p, q, u) = \gamma \operatorname{sign} q \quad (3.2)$$

Остается определить начальные условия для системы (3.1). Они записываются как $\varphi(0) = \varphi_0$, $\psi(0) = 0$, а два оставшихся условия определяются из условий трансверсальности на границе множества Ω .

Сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть задана система общего вида (1.1) с начальным положением в точке устойчивого равновесия $(\varphi_0, 0)$: $\Pi'(\varphi_0) = 0$, $\Pi''(\varphi_0) > 0$. Пусть область притяжения точки $(\varphi_0, 0)$ не содержит других положений равновесия или предельных циклов. Тогда при достаточно малых ρ и γ управляемый выброс возможен, если и только если он возможен при использовании релейного метода управления вида (2.1).

Доказательство. Предположим, что выброс из потенциальной ямы возможен, т.е. вспомогательная задача имеет решение. Покажем, что алгоритм (3.2) совпадает с методом управления в (2.1), т.е. $\operatorname{sign} q = \operatorname{sign} \psi$. Так как система автономна, то верно условие тождественного обращения в нуль гамильтониана задачи вдоль оптимальной траектории

$$\mathcal{H}(\varphi(t), \psi(t), p(t), q(t), u(t)) \equiv 0$$

или, опуская аргумент t в данном выражении и используя уравнения (3.1), его можно переписать в виде

$$\mathcal{H}(\varphi, \psi, p, q) = p\dot{\varphi} + q\dot{\psi} = (\rho q - \dot{q})\psi + q\dot{\psi} = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим интервалы времени, когда управление постоянно и принимает одно из крайних значений $+\gamma$ или $-\gamma$. Тогда все входящие в выражение функции времени гладкие. Поделив выражение (3.3) на произведение $q\psi$, получим

$$\frac{\dot{q}}{q} - \frac{\dot{\psi}}{\psi} = \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \ln \frac{q}{\psi} = \rho$$

Отсюда следует, что $q(t) = C\psi(t)e^{\rho t}$, где C принимает определенное фиксированное значение только на промежутке времени между моментами переключения управления u . Из данного выражения следует, что нули обеих функций $q(t)$ и $\psi(t)$ совпадают.

Заметим, что в момент переключения производная функции $\psi(t)$ претерпевает разрыв, однако функция $q(t)$, как и ее производная, остаются непрерывными на всем интервале движения системы. Тогда, записывая выражение для производной q

$$\dot{q} = \rho q + C\dot{\psi}e^{\rho t}$$

получаем, что в момент переключения $t = \tau$ должно выполняться равенство

$$C^+\dot{\psi}^+ - C^-\dot{\psi}^- = 0; \quad \dot{\psi}^\pm = -\Pi'(\varphi(\tau)) \pm \gamma$$

где C^+ , C^- – значения постоянной C на соседних интервалах времени с управлением $u = \gamma$, $u = -\gamma$. Тогда

$$C^+ = C^- [\Pi'(\varphi(\tau)) + \gamma] / [\Pi'(\varphi(\tau)) - \gamma] \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что на отдельно взятом интервале постоянства управления $\text{sign } \dot{\varphi} = \pm \text{sign } q$.

Отметим, что точка A^+ с координатами $(\varphi_0^+, 0)$: $-\Pi'(\varphi_0^+) + \gamma = 0$ (точка A^- с координатами $(\varphi_0^-, 0)$: $-\Pi'(\varphi_0^-) - \gamma = 0$) является особой точкой типа фокус для возмущенной системы при фиксированном $u = \gamma$ ($u = -\gamma$).

Рассмотрим теперь оптимальную траекторию, приводящую движение из точки $(\varphi_0, 0)$ на границу терминального множества Ω . Пусть на первом интервале постоянства управления имеем $u = -\gamma$. Тогда траектория движения с началом в точке $(\varphi_0, 0)$ пойдет в нижнюю полуплоскость: $\psi(t) < 0$

при малых t . Следовательно, управление на первом интервале соответствует закону (2.1). Аналогично можно показать, что выбор $u(0) = \gamma$ на первом интервале приводит к такому же закону управления, причем в обоих случаях траектории с осью абсцисс пересекаются вне отрезка $[A^-, A^+]$, благодаря отмеченному выше свойству фазового портрета. Это обеспечивает положительность числителя и знаменателя в формуле (3.4), а следовательно, и положительность постоянной C на всем интервале движения.

Заметим, что в доказательстве теоремы рассмотрены две оптимальные траектории, стартующие со значением $u = \pm\gamma$. Эти траектории соответствуют разным экстремумам терминального функционала, причем любая из них приводит к выбросу.

Таким образом, при исследовании задачи выброса достаточно рассматривать лишь метод управления по скоростному градиенту вида (2.1). Следовательно, для установления возможности выброса достаточно проверить осуществимость выброса с помощью СГ-метода.

Для этого рассмотрим отображение Пуанкаре на потоке $\phi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + \Pi'(\varphi) = \gamma \operatorname{sign} \dot{\varphi}$$

Базой (сечением) отображения будем считать отрезок

$$\Sigma = \{(\varphi, \psi): \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \psi = 0\}$$

где φ_0 – точка устойчивого равновесия невозмущенной системы (дно потенциальной ямы), а φ_1 – точка пересечения сепаратрис, см. фиг. 3. Тогда само отображение $P: \Sigma \rightarrow \Sigma$ записывается в виде

$$P(\bar{\varphi}) = \pi \phi_T(\bar{\varphi}, 0), \quad \bar{\varphi} \in \Sigma \tag{1}$$

где π – проекция на первый аргумент, а T – время возврата системы на базу Σ .

Покажем, что если на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ не содержится неподвижных точек отображения Пуанкаре (3.5), то приведение системы из начальной точки $(\varphi_0, 0)$ в конечную с $\varphi = \varphi_1$ ($\dot{\varphi} > 0$) возможно.

Для доказательства предположим обратное, а именно: на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ имеется по крайней мере одна неподвижная точка: $P(\varphi^*) = \varphi^*$. Фиг. 4 иллюстрирует данную ситуацию. Движение точки, соответствующее (дискретному) отображению Пуанкаре с начальным положением $\varphi(0) = \varphi_0$,

показано штриховой линией. Видно, что в этом случае перевод системы из начальной точки в конечную с $\varphi = \varphi_1$ невозможен и движение заканчивается при $\varphi = \varphi^*$.

Таким образом, доказано следующее утверждение относительно управляемого выброса.

Теорема 2. Пусть траектория системы (1.1), соответствующая управлению по скоростному градиенту (2.1), приводит ее из начального состояния $(\varphi_0, 0)$ в конечное состояние с $\varphi = \varphi_1$, $\dot{\varphi} > 0$, и осуществляет выброс из потенциальной ямы в смысле теоремы 1, т.е. пересекает сепаратрису. Тогда на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ не содержится неподвижных точек отображения Пуанкаре, сечением которого будет отрезок Σ .

Таким образом, выше показано, что если использование метода управления (2.1) не гарантирует выброс, то выброс не произойдет и при использовании любого другого алгоритма управления. Теорема 2 дает необходимые условия, при выполнении которых выброс осуществим.

3. Анализ задачи на примере осциллятора Дуффинга. Пусть потенциальная функция задана в виде

$$П(\varphi) = -\varphi^2/2 + \varphi^4/4$$

Рассмотрим для определенности левое положение равновесия системы $\varphi_0 = -1$. В качестве множества Ω рассмотрим правую полуплоскость $\varphi \geq 0$. Очевидно, что приведение точки на ее границу гарантирует выброс из потенциальной ямы.

Численной проверкой можно убедиться, что при $\rho = 0.25$ и $\gamma = 0.125$ выброс возможен. Траектория такого выброса показана на фиг. 5а. Зафиксируем теперь значение ρ и будем уменьшать величину γ . Тогда при некотором (критическом) значении γ^* возникает предельный цикл и множество Ω становится недостижимым, см. фиг. 5б. Это соответствует появлению неподвижной точки отображения Пуанкаре на отрезке $[-1, 0]$.

Таким образом можно определить критическую кривую $\rho = f(\gamma)$ в пространстве параметров задачи (ρ, γ) . При заданном значении коэффициента трения ρ выброс возможен при любых $\gamma > \gamma^*$ и невозможен при $\gamma \leq \gamma^*$, $\gamma^* = f^{-1}(\rho)$. Здесь $f^{-1}(\rho)$ – функция, обратная к $f(\gamma)$. Для рассматриваемого случая потенциала Дуффинга критическая кривая может быть построена только численными методами, см. фиг. 6. Однако можно аналитически построить асимптотику этой кривой в окрестности начала координат,

для него запишем уравнение энергетического баланса для системы (1.1) в случае управления СГ-методом. Если это уравнение сначала умножить на $\dot{\varphi}$, а затем проинтегрировать, то получим

$$V(t) = V(0) + \int_0^t (\rho \dot{\varphi}^2 - \gamma |\dot{\varphi}|) dt \quad (4.1)$$

где $V(t) = \dot{\varphi}^2/2 + \Pi(\varphi)$ – энергия системы.

Критической ситуации соответствует существование предельного цикла с периодом обращения T . Таким образом, $V(T) = V(0)$, и равенство (4.1) переписывается в виде

$$\int_0^T (\rho \dot{\varphi}^2 - \gamma |\dot{\varphi}|) dt = 0 \quad (4.2)$$

В случае достаточно малых возмущений ρ, γ движение системы (1.1) можно представить в виде

$$\varphi(t) = \varphi_h(t) + \rho \varphi_1(t) + \gamma \varphi_2(t) + o(\rho^2 + \gamma^2)$$

где $(\varphi_h(t), \dot{\varphi}_h(t))$ – траектория движения консервативной системы ($\rho = \gamma = 0$) с энергией h . Учитывая в равенстве (4.2) лишь члены первого порядка малости по ρ и γ , получим

$$\int_0^T (\rho \dot{\varphi}_h^2 - \gamma |\dot{\varphi}_h|) dt = 0$$

Отсюда определим следующую функцию:

$$\alpha(h) = \frac{\gamma}{\rho} = \left(\int_0^T |\dot{\varphi}_h| dt \right)^{-1} \int_0^T \dot{\varphi}_h^2 dt \quad (4.3)$$

показывающую при каком отношении параметров задачи ρ и γ возможно удержание системы на заданном энергетическом уровне h с использованием сколь угодно малых возмущений, вносимых в систему.

Как отмечалось [16], данный подход был развит Кирхгофом в 1850 г. и применен к задачам упругой устойчивости Брайаном (1891 г.) и С.П. Тимошенко (1906 г.). Он был использован [17] в форме "энергетического гармонического баланса" при условии, что периодический режим системы – приближенно гармонический.

Применим к полученному соотношению (4.3) точные уравнения периодического движения системы Дуффинга. Известно (см., например, [9]), что они имеют вид

$$\varphi_k(t) = \frac{\sqrt{2} \operatorname{dn}(t_k, k)}{\sqrt{2 - k^2}}, \quad \dot{\varphi}_k(t) = -\frac{\sqrt{2}k^2 \operatorname{sn}(t_k, k) \operatorname{cn}(t_k, k)}{\sqrt{2 - k^2}}; \quad t_k = \frac{t}{\sqrt{2 - k^2}} \quad (4.4)$$

и содержат эллиптические функции Якоби (см. например, [18, 19]), амплитуда которых $k \in (0, 1)$, связана с энергией системы соотношением

$$h(k) = -\frac{1 - k^2}{(2 - k^2)^2}$$

Случай $k = 0$ соответствует положению равновесия системы – дну потенциальной ямы, $k = 1$ – случаю движения по гомоклинической орбите, являющейся границей области притяжения точки равновесия $(-1, 0)$.

Как известно из теории эллиптических функций период обращения задается выражением

$$T(k) = 2K(k)\sqrt{2 - k^2}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Подставляя выражения (4.4) в равенство (4.3), получаем

$$\alpha(k) = \frac{k^4}{\sqrt{2}(2 - k^2)^{3/2}(1 - \sqrt{1 - k^2})} \int_0^{T(k)} \operatorname{sn}^2(t_k, k) \operatorname{cn}^2(t_k, k) dt$$

График функции $\alpha(h)$ (фиг. 7) показывает, при каком наименьшем отношении запаса по управлению γ_h к коэффициенту трения ρ возможно поддержание энергии системы на одном и том же уровне h . Следовательно, в случае $\gamma > \gamma_h$ возможен переход на более высокий уровень энергии. Отсюда вытекает, что критической ситуации (ρ, γ^*) , обсуждавшейся выше, соответствует точка максимума на построенном графике: $\alpha^* = \gamma^*/\rho = \max_h \alpha(h)$, см. фиг. 8. Приближенное значение α^* оказалось равным 0.494 при $h^* = -0.0119$ (или $k^* = 0.988$). Таким образом, касательная к критической кривой в окрестности нуля задается уравнением $\gamma^* = \alpha^* \rho$, она показана на фиг. 7 штриховой линией. Результат точного численного расчета, проведенного в системе MatLab, показан сплошной кривой.

Подобные рассуждения можно провести и для случая потенциала Гельмгольца

$$\Pi(\varphi) = -\varphi^2/2 + \varphi^3/3$$

Здесь под выбросом понимается выведение точки из области притяжения устойчивого положения равновесия $\varphi(0) = 1$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Критическая кривая в этом случае похожа на кривую в случае потенциала Дуффинга, однако наклон касательной, выходящей из нуля, меньше и задается величиной $\alpha^* = 0.413$, найденной численно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00610, 05-08-50226, 05-01-00869).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.* Пассивность и пассивация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. N 3. С. 3-37.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти томах /Ред. совет под пред. *В.Н. Челомея.* М: Машиностроение. Т. 1. 1978. 352 с.; Т. 2. 1979. 351 с.; Т. 3. 1980. 544 с.; Т. 4. 1981. 509 с.; Т. 5. 1981. 496 с.; Т. 6. 1981. 456 с.
3. *Луковников В.И.* Электропривод колебательного движения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
4. *Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М.* О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. N 5. С. 14-24.
5. *Virgin L.N., Cartee L.A.* A note on the escape from a potential well // Intern. J. Nonlinear Mech. 1991. V. 26. N 3-4. P. 449-458.
6. *Stewart H.B., Thompson J.M.T., Ueda Y., Lansbury A.N.* Optimal escape from potential wells — patterns of regular and chaotic bifurcations // Physica D. 1995. V. 85. N 1-2. P. 259-295.
7. *Moon F.C., Holmes P.J.* A magnetoelastic strange attractor. // J. Sound Vibrat. 1979. V. 65. N 2. P. 275-296.
8. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
9. *Guckenheimer J., Holmes P.,* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Berlin: Springer, 1996 = *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
10. *Wiggins S.* Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. N.Y.etc.: Springer, 1996. 672 p.
11. *Черноусько Ф.Л.* Некоторые задачи управления с малым параметром // ПММ, 1968. Т. 32. Вып. 1. С. 15-26

12. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
13. *Andrievsky V.R.* Computation of the excitability index for nonlinear oscillators // Proc. 44th IEEE CDC–ECC (Control Decision Conf.–Europ.Control Conf.), Seville, 2005. P. 3537-3540
14. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
15. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y. etc.: Willey, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
16. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 420 с.
17. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление в сложных динамических системах. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
18. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
19. Прасолов В.В., Соловьёв Ю.П. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997. 290 с.

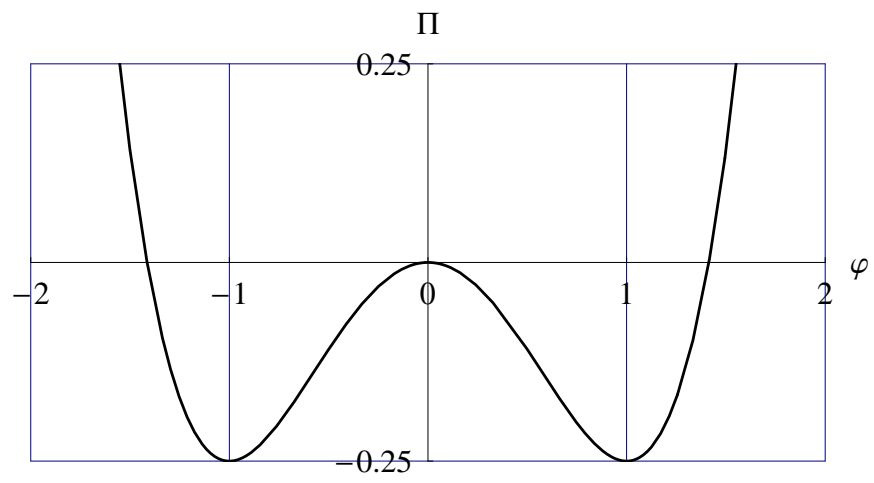
Москва, Санкт-Петербург

20.VII.2006

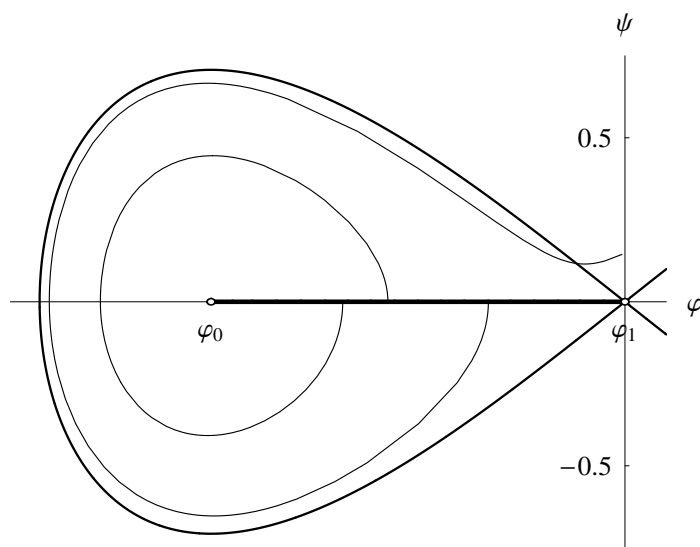
e-mail: ahm@inbox.ru, melik@ipmnet.ru, fradkov@mail.ru

A.R. Akhmetzhanov, A.A. Melikyan, A.L. Fradkov

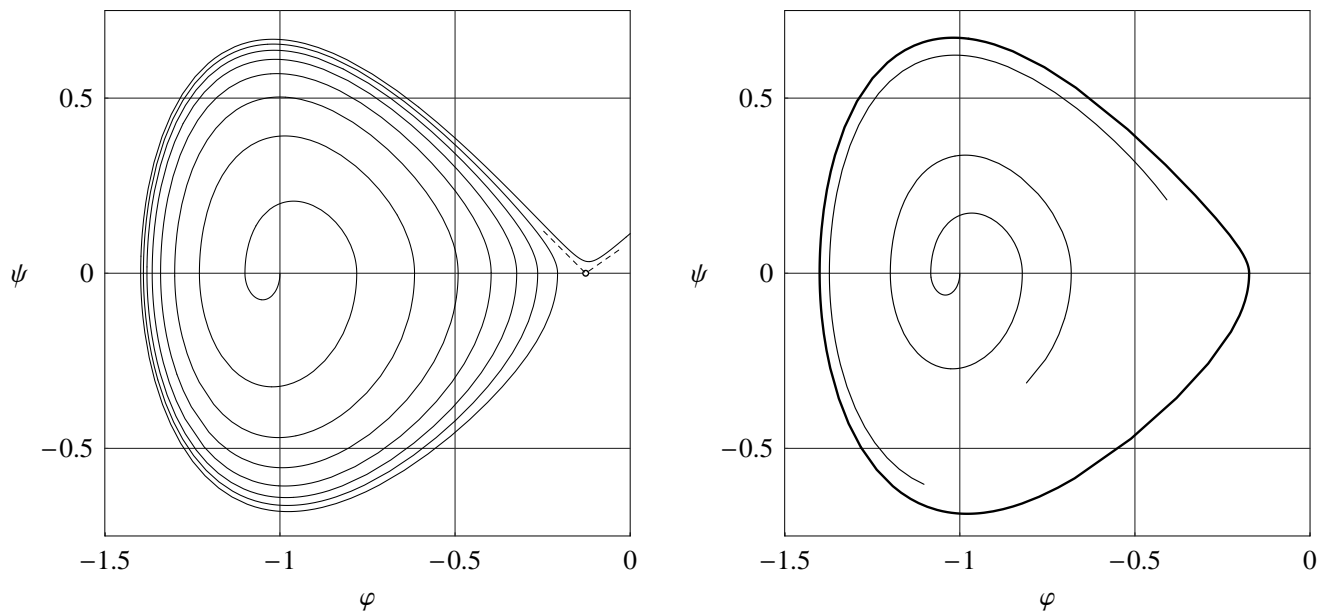
Optimality of the speed-gradient method for control of escape from a potential well



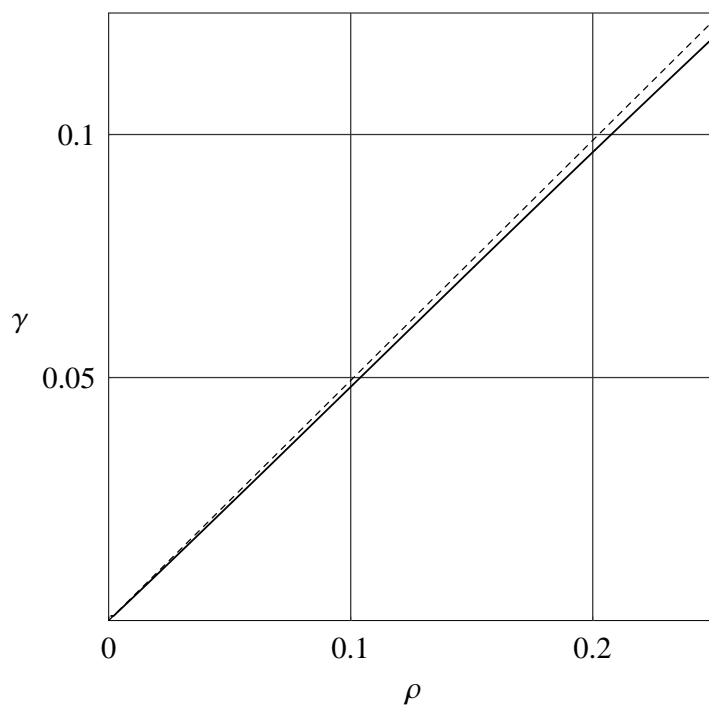
Фиг. 1



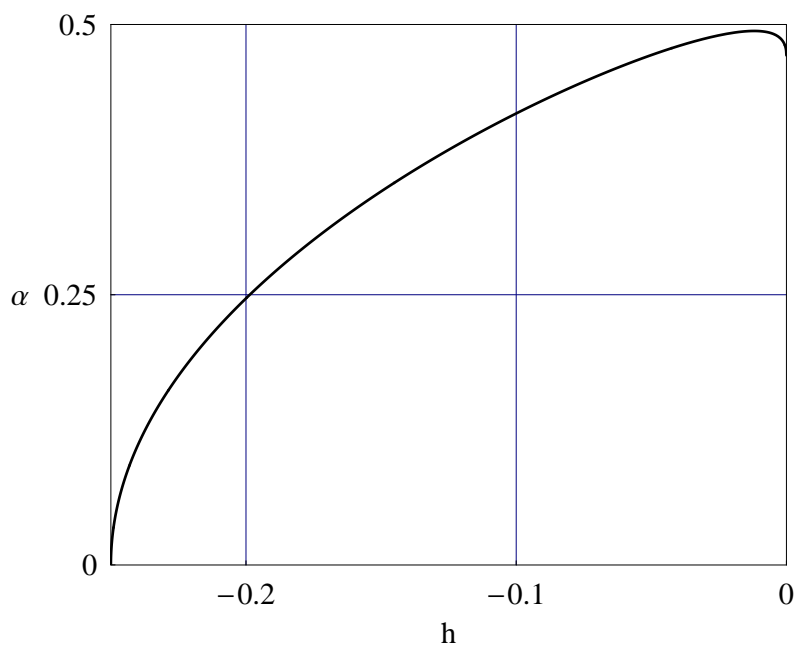
Фиг. 4



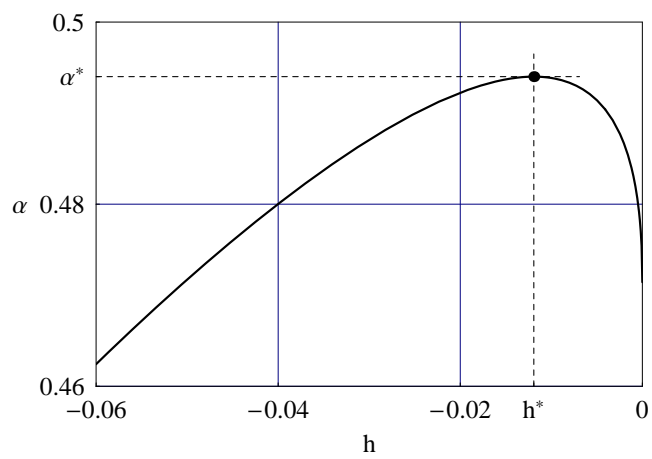
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8