Необходимые и достаточные условия пассифицируемости линейных распределенных систем

В.А.БОНДАРКО, канд.физ.-мат.наук
(Санкт-Петербургский государственный университет),
А.Л.ФРАДКОВ, д-р техн.наук
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург))

13 октября 2002 г.

Для широкого класса систем установлено, что для строгой пассифицируемости системы необходима и достаточна ее гипер-минимально-фазовость. Рассматриваемый класс систем включает объекты как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, в том числе уравнения параболического типа, которые описывают процессы теплообмена, а также химические и ядерные реакции. Полученные результаты относятся к случаю конечномерных пространств входов и выходов, наиболее важному для приложений, и охватывают системы с различным числом входов и выходов, для которых свойство пассивности уступает место G-пассивности по отношению к некоторой прямоугольной матрице G. Приводится пример для одномерного уравнения в частных производных диффузионного типа с непосредственно входящим управлением. Доказательства основаны на бесконечномерном варианте леммы Якубовича-Калмана и на теореме Нефедова-Шолоховича об экспоненциальной стабилизации.

1. Введение

Методы анализа систем, основанные на понятии пассивности, были развиты в 1960-х годах в работах В.М.Попова [1], Дж.Зеймса [2] и др. Условия применимости метода для линейных систем даются классической леммой Якубовича-Калмана-Попова (частотной теоремой)[3, 4], трактуемой как условия существования у системы квадратичной функции запаса (аналога функции Ляпунова) в виде частотных неравенств (свойство строгой положительной вещественности или SPR-свойство). В работах [5, 6] была поставлена и решена задача о существовании обратной связи, превращающей линейную систему в строго положительно вещественную, т.е. на более современном языке - задача о пассификации. Оказалось, что для строгой пассифицируемости необходимо и достаточно усиленного свойства минимальной фазовости системы – так называемой *гипер-минимально-фазовости*.

Простота условий разрешимости задачи открывает дорогу эффективным процедурам синтеза систем. В дальнейшем методы синтеза линейных и нелинейных систем управления на основе пассивности и пассификации нашли многочисленные применения [7, 8, 9, 10, 11, 12], а условия пассифицируемости [5, 6] неоднократно переоткрывались, см. [13, 14] и список литературы в [15]. Достоинством метода пассификации является то, что он не требует явного вычисления функции Ляпунова для синтеза системы и ее исследования. Представляет интерес его распространение и обоснование для возможно более широкого класса систем управления.

В работе [16] были получены достаточные условия разрешимости операторных неравенств, соответствующих существованию квадратичного функционала Ляпунова у линейной распределенной системы. Система описывалась дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве с неограниченными операторами, порождающими непрерывную полугруппу. Условия разрешимости [16] аналогичны условиям гипер-минимально-фазовости, возникающим в конечномерном случае, однако, в отличие от конечномерного случая, вопрос об их необходимости до сих пор оставался открытым.

В настоящей работе для несколько более общего, чем в [16] случая установлено, что строгая минимально-фазовость необходима и достаточна для существования решений операторных неравенств, соответствующих существованию квадратичного функционала Ляпунова. Результаты сформулированы в терминах пассивности и пассификации, более удобных для применения в задачах синтеза распределенных систем управления. Приведенные результаты относятся к случаю конечномерных пространств входов и выходов, наиболее важному для приложений. Тем самым для рассмотренного класса систем получено окончательное решение задачи о строгой пассифицируемости.

Результаты иллюстрируются примером для одномерного уравнения в частных производных диффузионного типа с непосредственно входящим управлением.

Доказательства основаны на бесконечномерном варианте леммы Якубовича-Калмана и на теореме Нефедова-Шолоховича об экспоненциальной стабилизации и размещены в Приложении.

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс объектов управления, которые описываются дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}= Ax + Bu, \qquad y = Cx, \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве состояний $X = \{x\}$. Хотя основные результаты формулируются для случая гильбертова пространства состояний, ряд результатов справедлив и для объектов более общего вида, описываемых дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве. Поэтому мы будем давать формулировки для банаховых пространств там, где это возможно. Значения управления и выхода предполагаются конечномерными: $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$, где R^n — n-мерное евклидово пространство. Линейные операторы B, C предполагаются ограниченными: $B \in \mathcal{L}(R^m \to X)$, $C^* \in \mathcal{L}(X \to R^m)$; через $\mathcal{L}(X \to Y)$ обозначается множество линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово простанство Y. Линейный оператор A, вообще говоря, неограничен. Предполагается, что A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Это означает, что для всякого $t \in (0, \infty)$ определен оператор $U(t) \in \mathcal{L}(X \to X)$, такой, что

$$U(t+s) = U(t)U(s)\ \forall t \in (0,\infty)\ \forall s \in (0,\infty),$$
$$\lim_{t\to 0} U(t)x = x\ \forall x \in X$$

и $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(U(\varepsilon)x - x) = Ax$ при всех x, для которых предел существует (это множество обозначается $D(A)$, оно плотно в X).

Решения уравнения (1) понимаются в смысле полугруппы $U(t)$: функция $y(\cdot)$ считается решением, если для некоторой функции $x(\cdot)$ со значениями в банаховом пространстве

X при всех t справедливы равенства

$$x(t) = U(t)x(0) + \int_0^t U(t-s)Bu(s)ds,$$
$$y(t) = Cx(t).$$

Определение 1. Система (1) называется *G-пассивной*, если существует такой самосопряженный положительный оператор $H \in \mathcal{L}(X \to X)$, что для квадратичной формы $V(x) = x^*Hx$ на решениях уравнения (1) при $\rho = 0$ справедливо неравенство

$$V(x(t)) \le V(x(0)) + \int_0^t \left[u(s)^*Gy(s) - \rho|x(s)|^2\right] ds. \tag{2}$$

Если же (2) верно для положительного ρ, то система (1) называется *строго G-пассивной.*

Неравенство (2), в которое входит решение уравнения (1) с произвольной локально-суммируемой функцией $u(\cdot)$ в правой части, эквивалентно неравенству для квадратичных форм

$$2x^*H(Ax + Bu) \le u^*GCx - \varrho|x|^2 \ \forall x \in D(A), \forall u \in \mathbb{C}^m, \tag{3}$$

или, что то же самое, двум операторным соотношениям

$$HA + A^*H < 0, \qquad HB = (GC)^*. \tag{4}$$

(Операторные неравенства понимаются в смысле квадратичных форм). Дополним систему (1) обратной связью

$$u = Ky + v, \tag{5}$$

где $v \in \mathbb{C}^m$ — новый вход, K — некоторая $m \times l$-матрица.

Определение 2. Система (1) называется *G-пассифицируемой (строго G-пассифицируемой)*, если существует такая $m \times l$-матрица K, что система (1),(5) G-пассивна (строго G-пассивна).

Настоящая работа в первую очередь посвящена выяснению необходимых и достаточных условий строгой G-пассифицируемости для некоторого класса систем (1). Основное условие принадлежности к этому классу — стабилизируемость, — необходимо для пассифицируемости системы, и в этом смысле рассматриваемый класс бесконечномерных систем почти нерасширяем. Почти, поскольку дополнительно мы накладываем условия на скорость убывания частотной характеристики системы при стремленни частоты к бесконечности. Если пространство состояний системы конечномерно, то эти условия выполнены автоматически. В случае бесконечномерного пространства X наложенным условиям удовлетворяют, например, уравнения параболического типа, которые описывают процессы теплообмена, а также химические и ядерные реакции.

Решение задачи о пассифицируемости достигается с помощью так называемой вырожденной частотной теоремы, которая дает условия разрешимости операторных соотношений (4) в терминах частотной характеристики системы (1). Для бесконечномерных систем эта теорема ранее была доказана только как достаточный признак, в этой работе показана необходимость частотных условий для разрешимости (4). Поскольку вырожденная частотная теорема справедлива только для устойчивых систем (1), приходится также рассматривать задачу о стабилизируемости системы (1) посредством динамической обратной связи от выхода к управлению. Решение этой задачи получено здесь также в форме необходимых и достаточных условий.

Перейдем к строгому описанию класса рассматриваемых систем (1). Пусть система (1),(5) строго G-пассивна, тогда соотношения (4) принимают вид

$$H(A + KC) + (A + KC)^* H < 0, \qquad HB = (GC)^*, \tag{6}$$

где $H = H^* > 0$. Первое из этих соотношений влечет экспоненциальную устойчивость системы (1),(5) при $v(t) \equiv 0$. Следовательно, строго $G-$пассифицируемая система (1) обязательно является экспоненциально стабилизируемой посредством обратной связи $u = KCx$ от состояния x к конечномерному входу u. Таким образом, без уменьшения общности можно требовать, чтобы рассматриваемая система была экспоненциально стабилизируемой обратной связью

$$u = Dx, \tag{7}$$

где $D \in \mathcal{L}(X \to R^m)$.

Эффективный критерий экспоненциальной стабилизируемости системы (1) посредством обратной связи (7) от состояния x к конечномерному управлению u приведен в работе [17]. Чтобы сформулировать его, введем следующие обозначения: $\sigma(A)$ — спектр оператора A, $\mathrm{sp}(Q)$ — линейная оболочка множества Q, $\mathbb{C}_\gamma = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \gamma\}$ — расширенная правая полуплоскость (при $\gamma < 0$).

Теорема (Нефедов, Шолохович [17]). *Пусть оператор A порождает полугруппу класса C^0 в банаховом пространстве $\mathbb{X}$, и $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m \to \mathbb{X})$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

I. Существует такой оператор $D \in \mathcal{L}(\mathbb{X} \to \mathbb{C}^m)$, что $\sigma(A + BD) \subset \mathbb{C}_\gamma$, $\gamma < 0$.

II. Спектр оператора A в замкнутой правой полуплоскости C_0 состоит из конечного числа собственных чисел с суммарной кратностью $n < \infty$. Спектральный проектор $\mathcal{P}$, определяемый как интеграл от резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$ по контуру, охватывающему весь спектр A в замкнутой правой полуплоскости, осуществляет декомпозицию системы (1) на экспоненциально устойчивую и конечномерную (не экспоненциально устойчивую) вполне управляемую подсистемы:

$$\frac{dx'}{dt} = A'x' + B'u, \; x' = \mathcal{P}x \in X', \; y' = C'x', \tag{8}$$

$$\frac{dx''}{dt} = A''x'' + B''u, \tag{9}$$

$$x'' = (I - \mathcal{P})x \in X'', \; y'' = C''x'',$$

$$y = y' + y'',$$

где $\mathbb{X}$ — прямая сумма подпространств $X' = \mathcal{P}\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$ и $X'' = (I - \mathcal{P})\mathbb{X}$, $A' = A\mathcal{P}$, $A'' = A(I - \mathcal{P})$, $B' = \mathcal{P}B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n)$, $B'' = (I - \mathcal{P})B$, $C' = C\mathcal{P}$, $C'' = C(I - \mathcal{P})$,

$$\sigma(A) = \sigma(A') \cup \sigma(A''), \; \sigma(A') \subset C_0, \; \sigma(A'') \cap C_\gamma = \emptyset, \tag{10}$$

$$\mathrm{sp}\{B'\mathbb{C}^m, A'B'\mathbb{C}^m, \ldots, (A')^{n-1}B'\mathbb{C}^m\} = X'. \tag{11}$$

Итак, по теореме Нефедова-Шолоховича любая стабилизируемая система (1) имеет конечномерную подсистему (8), которая при условии ее "антиустойчивости"(10) определена однозначно. Соответственно, можно считать, что оператор $A' \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ задан своей матрицей в каком-либо базисе $n-$мерного пространства X'. Таким образом, также однозначно определен многочлен

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A'), \tag{12}$$

который мы будем называть характеристическим многочленом системы (1).

Мы будем рассматривать класс Ξ таких систем (1), которые удовлетворят следующим условиям:

1. Система (1) экспоненциально стабилизируема некоторой обратной связью $u = Dx$.
2. Резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}_\gamma$ при некотором $\gamma < 0$.
3. Операторы $CA:\ \mathbb{X} \to \mathbb{C}^l$ и $AB:\ \mathbb{C}^m \to \mathbb{X}$ ограничены.

Первое из этих условий, как уже было сказано, необходимо для того, чтобы система (1) была строго пассифицируемой. Два других условия приходится накладывать по техническим причинам, поскольку без них приведенный в следующем разделе критерий строгой $G-$пассифицируемости доказать пока не удается. Если фазовое пространство системы конечномерно, то эти условия выполнены автоматически. В бесконечномерном случае условие 2 выполнено, например, для систем параболического типа; условие 3 в этом случае означает, очевидно, достаточную гладкость весовых функций, соответствующих операторам B и C. Именно к этому классу относится приведенный ниже в разделе 4 пример.

3. Формулировка результатов

Фиксируем $m \times l$-матрицу G и определим функции

$$\chi'(\lambda) = C'(\lambda I - A')^{-1}B', \quad \chi''(\lambda) = C''(\lambda I - A'')^{-1}B'',$$
$$\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) + \chi''(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B, \quad \varphi(\lambda) = \delta(\lambda)\det[G\chi(\lambda)].$$

Определение 3. Система из класса Ξ называется *минимально фазовой*, если функция $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей в $\mathbb{C}_\gamma$ для некоторого $\gamma < 0$. Минимально фазовая система называется *гиперминимально фазовой*, если $GCB = (GCB)^* > 0$.

По аналогии с конечномерным случаем будем говорить, что оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m \to \mathbb{X})$ имеет *полный ранг*, если равенство $Bu = 0$ возможно только для нулевого вектора u.

Теорема 1. *Система из класса Ξ сильно $G-$пассифицируема тогда и только тогда, когда она гиперминимально фазовая.*

Для доказательства этой теоремы потребуются два утверждения, которые имеют самостоятельное значение и в конечномерном случае хорошо известны. Первое из них — это вырожденная частотная теорема (лемма Якубовича-Калмана).

Теорема 2. *Пусть A экспоненциально устойчивый оператор, порождающий полугруппу в гильбертовом пространстве $\mathbb{X}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m \to \mathbb{X})$, $C \in \mathcal{L}(\mathbb{X} \to \mathbb{C}^m)$. Тогда для существования самосопряженного положительного оператора $H : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ и положительного числа δ, для которых справедливы соотношения*

$$\operatorname{Re} x^*HAx \le -\delta|x|^2\ \forall x \in \mathcal{D}(A),\ HB = C^*, \tag{13}$$

достаточно выполнения двух неравенств

$$\operatorname{Re}\chi(\lambda) > 0,\ \forall\lambda = i\omega,\ \omega \in (-\infty, \infty), \tag{14}$$

$$\varliminf_{\omega\to\infty} g(\omega)^{-2}\operatorname{Re}\chi(i\omega) > 0, \tag{15}$$

где

$$g(\omega) = \max\{\|(i\omega I - A)^{-1}B\|, \|C(i\omega I - A)^{-1}\|\}.$$

Если же система (1) с операторными коэффициентами A, B, C принадлежит классу Ξ и оператор B имеет полный ранг, то выполнение неравенств (14),(15) также и необходимо для того, чтобы выполнялись соотношения (13). При этом из (13) вытекает справедливость неравенства (14) не только на мнимой оси, но и для всех $\lambda \in \mathbb{C}_\Gamma$, где $\Gamma < 0$.

В части достаточности эта теорема доказана в [16], обоснование необходимости приведено ниже, в приложении к настоящей работе.

Для обоснования теоремы 1 потребуется еще один вспомогательный результат — о стабилизируемости системы (1) посредством обратной связи от выхода к управлению. Мы будем рассматривать динамические обратные связи, задаваемые дифференциальными уравнениями в банаховом (в нашем случае — гильбертовом) пространстве $\mathbb{Z} = \{z\}$:

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}y,\ u = \mathcal{C}z + \mathcal{D}y, \tag{16}$$

где $\mathcal{A}$ — порождающий оператор полугруппы класса C^0, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^l \to \mathbb{Z})$, $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^m)$, $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^l \to \mathbb{C}^m)$.

Определение 4. Система (1) (из класса Ξ) *динамически стабилизируема по выходу,* если существуют такие операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, что система (1),(16) экспоненциально устойчива.

Определение 5. Система (1) (из класса Ξ) *невырождена в замкнутой правой полуплоскости,* если для каждого корня $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$ многочлена (12) найдется такой минор $\mu(\lambda)$ передаточной функции $\chi(\lambda)$, что

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta(\lambda)\mu(\lambda) \neq 0. \tag{17}$$

Теорема 3. *Система (1) (из класса Ξ) динамически стабилизируема по выходу в том и только в том случае, если она невырождена в замкнутой правой полуплоскости.*

Следствие. *Если передаточная функция динамически стабилизируемой по выходу системы не имеет полюсов в расширенной правой полуплоскости, то эта система экспоненциально устойчива.*

Частный случай теоремы 3 для систем со скалярными входом и выходом приведен в [18]. Если $l = m = 1$, то (17) преобразуется к виду

$$\delta(\lambda) = 0\ \Rightarrow \beta(\lambda) \neq 0. \tag{18}$$

где $\chi(\lambda) = \beta(\lambda)/\delta(\lambda)$. Если рассматриваемая система конечномерна, то можно положить $\delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Если при этом условие (18) справедливо для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, то многочлены $\delta(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — взаимно простые. Если (18) справедливо для $\mathbb{C}_0$, наибольший общий делитель $\delta(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — гурвицев многочлен. В обоих случаях конечномерная система (1) стабилизируема по выходу. Таким образом, теорема 3 переносит хорошо известный в конечномерном случае результат на случай бесконечномерных систем.

4. Пример

Рассмотрим задачу управления температурой однородного стержня единичной длины, описываемую параболическим дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \beta T + b(s)u(t), \qquad y(t) = \int\limits_0^1 c(s)T(s,t)\,ds, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}T(0,t) = \frac{\partial}{\partial s}T(1,t) = 0, \tag{20}$$

где $\alpha > 0$, состояние $T(s,t)$ при каждом $t \geq 0$ – функция пространства $X = L_2(0,1)$, распределенные параметры объекта $b(\cdot), c(\cdot)$ — также функции из пространства X. Найдем условия пассифицируемости системы. Чтобы воспользоваться теоремой 1 для установления пассифицируемости, нужно проверить принадлежность системы (19),(20) к классу Ξ. Оператор A в рассматриваемом случае — это дифференциальный оператор второго порядка $\alpha\partial^2/\partial s^2 + \beta I$ с областью определения, задаваемой краевыми условиями (20). Чтобы определить резольвенту $(\lambda I - A)^{-1}$, нужно для произвольной функции $w(\cdot) \in L_2(0,1)$ решить уравнение $\lambda z = Az + w$ относительно функции $z(\cdot)$. Для рассматриваемого оператора A уравнение для определения резольвенты — это обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\lambda z(s) = \alpha d^2 z(s)/ds^2 + \beta z(s) + w(s),\ dz(0)/ds = dz(1)/ds = 0$$

Решая его, получаем, что соотношение $z(\cdot) = (\lambda I - A)^{-1} w(\cdot)$ эквивалентно равенствам

$$z(s) = \frac{[e^{-s\mu} + e^{s\mu}]}{2\alpha[\mu^2][(e^{\mu} - e^{-\mu})/\mu]} \int_0^1 [e^{-p\mu} + e^{p\mu}] w(1-p)\,dp + \\ + \int_0^s \left[\frac{e^{-p\mu} - e^{p\mu}}{2\alpha\mu}\right] w(s-p)\,dp, \qquad \mu^2 = \frac{\lambda - \beta}{\alpha}.$$

Во всех квадратных скобках здесь стоят аналитические функции от μ, у которых в разложении в ряд участвуют только четные степени. Таким образом, вырождение резольвенты происходит только в нулях функции

$$\alpha[\mu^2][(e^{\mu} - e^{-\mu})/\mu] = 2(\lambda - \beta)\frac{\sin(i\sqrt{(\lambda-\beta)/\alpha})}{i\sqrt{(\lambda-\beta)/\alpha}},$$

то есть в точках $\lambda_k = \beta - \alpha(\pi k)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, которые и служат спектром оператора A.

Посмотрим, при каких условиях система (19),(20) принадлежит классу Ξ. Для этого нужно проверить следующие три условия. Во-первых, операторы CA и AB должны быть ограниченными. Для рассматриваемого примера это означает, что функции $b(\cdot), c(\cdot)$ дважды дифференцируемы, а их первая производная в граничных точках $s = 0$ и $s = 1$ равна нулю. Во-вторых, резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ должна стремиться к нулю при стремлении λ к бесконечности внутри правой полуплоскости. Для параболических уравнений это всегда так, да и из полученного выражения для резольвенты это тоже следует. Осталось проверить последнее условие — стабилизируемость системы конечномерной обратной связью. Воспользуемся для этого теоремой Нефедова-Шолоховича.

Пусть сначала $\beta < 0$. Тогда спектральное разложение (8),(9) для рассматриваемой системы тривиально: $\mathcal{P} = 0,\ A = A'',\ \delta(\lambda) = 1$, и вместо стабилизируемости мы сразу получаем устойчивость, что и требовалось.

Пусть теперь $0 \le \beta < \alpha\pi^2$. Тогда у оператора A будет единственная точка спектра λ_0 в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$. Оператор $\mathcal{P}$ — это вычет резольвенты в точке λ_0. Из полученного для резольвенты представления следует, что $\mathcal{P}$ — это просто оператор усреднения по длине стержня. Антиустойчивая конечномерная подсистема (8) описывается уравнением

$$\dot{x}_0 = \lambda_0 x_0 + \bar{b}u,$$

где $\bar{b} = \int_0^1 b(s)\,ds$. Ее управляемость эквивалентна неравенству $\bar{b} \ne 0$, и при этом условии система (19),(20) по теореме Нефедова-Шолоховича будет конечномерно стабилизируемой. Аналогично можно определить антиустойчивую подсистему и при больших значениях β, но мы пока что ограничимся рассмотренным случаем $\beta < \alpha\pi^2$. Соответственно, $\delta(\lambda) = 1$ при $\beta < 0$ и $\delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)$ при $0 \le \beta < \alpha\pi^2$.

Вычислим теперь передаточную функцию $\chi(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$. В рассматриваемом случае

$$w = Bu \;\Leftrightarrow w(s) = b(s)u, \qquad y = Cx \;\Leftrightarrow y = \int_0^1 c(s)x(s)\,ds.$$

Пусть, например, $c(s) = b(s) \equiv c$. Тогда из полученного для резольвенты представления следует, что

$$CB = \int_0^1 c(s)b(s)\,ds = c^2,\ \chi(\lambda) = c^2/(\lambda - \lambda_0).$$

Таким образом, при $\beta < \alpha\pi^2,\ b(s) = c(s) \equiv c \ne 0$ система (19),(20) не только принадлежит классу Ξ, но и является гипер-минимальнофазовой. По теореме 1 это необходимо и достаточно для ее пассифицируемости.

Выполнении установленных условий пассифицируемости рассматриваемой системы позволяет осуществить построение регуляторов методом пассификации. Например, из теоремы 1 следует, что линейный регулятор $u = Ky$ будет стабилизировать систему при достаточно больших отрицательных значениях K. Если же дополнительно использовать результаты [16], то можно заключить, что адаптивный регулятор

$$u = Ky,\ dK/dt = -y^2$$

гарантирует, что $\|T(s,\cdot)\| \in L_2[0,\infty)$ по времени при любых начальных условиях, где

$$\|T(s,t)\|^2 = \int_0^1 |T(s,t)|^2 ds.$$

Заключение

В работе для широкого класса систем установлено, что для строгой пассифицируемости системы необходима и достаточна ее гипер-минимальнофазовость. Рассматриваемый класс систем включает объекты как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами, в том числе уравнения параболического типа, которые описывают процессы теплообмена, а также химические и ядерные реакции. Полученные результаты относятся к случаю конечномерных пространств входов и выходов, наиболее важному для приложений и охватывают системы с различным числом входов и выходов, для которых свойство пассивности уступает место G-пассивности по отношению к некоторой прямоугольной матрице G.

Приведенный пример демонстрирует проверку условия гипер-минимально-фазовости для одномерного уравнения в частных производных диффузионного типа с непосредственно входящим управлением.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1 использует теоремы 2 и 3. В свою очередь, для их доказательства потребуются несколько вспомогательных утверждений. Отметим прежде всего очевидное равенство

$$\lambda(\lambda I-A)^{-1}-I=A(\lambda I-A)^{-1}=(\lambda I-A)^{-1}A, \tag{П1}$$

откуда

$$\lambda\chi(\lambda)-CB=C(\lambda I-A)^{-1}AB=CA(\lambda I-A)^{-1}B, \tag{П2}$$
$$\lambda C(\lambda I-A)^{-1}AB-CAB=CA(\lambda I-A)^{-1}AB, \tag{П3}$$
$$\lambda^2\chi(\lambda)-\lambda CB-CAB=CA(\lambda I-A)^{-1}AB. \tag{П4}$$

если $\lambda\notin\sigma(A)$ и CA, AB — ограниченные операторы.

Доказательство теоремы 2. Достаточность частотных неравенств (14),(15) для существования положительного самосопряженного оператора H, удовлетворяющего соотношениям (13), доказана в работе [16]. Покажем, что для систем (1) из класса Ξ верно и обратное: из (13) следуют неравенства (14),(15).

Определим непрерывный оператор S как квадратный корень из H^{-1}, тогда $H^{-1}=SS$, $S=S^*>0$. Обозначим $z=Sx$, $\mathbf{A}=S^{-1}AS$, $\mathbf{B}=S^{-1}B$, $\mathbf{C}=CS$. Если тройка функций $\{u(\cdot),x(\cdot),y(\cdot)\}$ составляют процесс системы (1), то тройка $\{u(\cdot),z(\cdot),y(\cdot)\}$ составит процесс эквивалентной системы

$$\dot{z}=\mathbf{A}z+\mathbf{B}u, \qquad y=\mathbf{C}z, \tag{П5}$$

которая обладает той же самой передаточной функцией

$$\begin{aligned}\chi(\lambda)&=C(\lambda I-A)^{-1}B=CSS^{-1}(\lambda I-SS^{-1}ASS^{-1})^{-1}SS^{-1}B=\\&=\mathbf{C}(\lambda I-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Переписывая соотношения (13) в терминах системы (П5), получаем

$$\mathbf{A}+\mathbf{A}^*\le-\varepsilon I,\ \mathbf{B}=\mathbf{C}^*, \tag{П6}$$

где $\varepsilon=\delta/\|H\|>0$. Пусть u — произвольный ненулевой $m-$мерный вектор, $\lambda=\nu+i\omega$, $\nu>-\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[u^*\chi(\lambda)u]&=\mathrm{Re}[u^*\mathbf{B}^*(\lambda I-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u]=\\&=\frac{1}{2}[u^*\mathbf{B}^*(i\omega I+\nu I-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u+u^*\mathbf{B}^*(-i\omega I+\nu I-\mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}u]=\\&=\frac{1}{2}u^*\mathbf{B}^*[(i\omega I+\nu I-\mathbf{A})^{-1}-(i\omega I-\nu I+\mathbf{A}^*)^{-1}]\mathbf{B}u=\\&=\frac{1}{2}u^*\mathbf{B}^*[(i\omega I-\nu I+\mathbf{A}^*)^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*-2\nu I)(i\omega I+\nu I-\mathbf{A})^{-1}]\mathbf{B}u=\\&=-w^*(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*-2\nu I)w\ge(\nu+\varepsilon)|w|^2\ge0,\end{aligned}$$

где $w=(\lambda I-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u$, причем равенство возможно только при нулевом $|w|$. Если, однако, $w=0$, то и $\mathbf{B}u=(\lambda I-\mathbf{A})w=0$, откуда $u=0$, что противоречит принятому допущению. Таким образом, неравенство (14) доказано для всех λ, у которых вещественная часть больше $-\varepsilon$.

Переходя к неравенству (15), заметим, что входящую в него функцию $g(\omega)$ можно заменить на $|\omega|^{-1}$. Действительно, $(i\omega - A)^{-1} \to 0$ при $\omega \to \infty$ для систем из Ξ. Поэтому из (П1) следует, что

$$\frac{\|B\|}{2|\omega|} < \|(i\omega I - A)^{-1}B\| < \frac{2\|B\|}{|\omega|}, \; \frac{\|C\|}{2|\omega|} < C(i\omega I - A)^{-1}\| < \frac{2\|C\|}{|\omega|}$$

при всех достаточно больших $|\omega|$. Таким образом, неравенство (15) эквивалентно неравенству

$$\underline{\lim}_{\omega\to\infty} \omega^2 \operatorname{Re}\chi(i\omega) > 0, \tag{П7}$$

которое мы и будем проверять. Воспользуемся для этого равенством (П4). Применив его к тройке операторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} = \mathbf{B}^*$ при $\lambda = i\omega$, для произвольного ненулевого $m-$мерного вектора u получаем

$$\begin{aligned}\omega^2 \operatorname{Re}[u^*\chi(i\omega)u] = -\operatorname{Re}[(i\omega^2)u^*\chi(i\omega)u] =\\ = -\operatorname{Re}[i\omega u^*\mathbf{B}^*\mathbf{B}u + u^*\mathbf{B}^*\mathbf{A}\mathbf{B}u^* - u^*\mathbf{B}^*\mathbf{A}(i\omega I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}u] =\\ = -\frac{1}{2}u^*\mathbf{B}^*(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)\mathbf{B}u + \operatorname{Re}[u^*\mathbf{B}^*\mathbf{A}(i\omega I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}u].\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этой цепочки равенств не зависит от ω и положительно в силу полного ранга $\mathbf{B}$ и неравенства (П6). Второе слагаемое стремиться к нулю, так как

$$\|\mathbf{B}^*\mathbf{A}(i\omega I - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{B}^*\mathbf{A}\|\|(i\omega I - \mathbf{A})^{-1}\|\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \xrightarrow[|\omega|\to\infty]{} 0$$

в силу принадлежности системы (П5) к классу Ξ. В результате мы получаем неравенство (П7) (и даже с полным пределом вместо частичного). Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть Ω — окрестность точки $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\delta(\lambda)$ — скалярная аналитическая на Ω функция, $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^N$ — матричная аналитическая на Ω функция, $b(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$ — дробно-рациональная $N \times N$-матрица, $\mu(\lambda)$ — минор $B(\lambda)$. Если*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta(\lambda)\mu(\lambda) = 0, \tag{П8}$$

для всех миноров $B(\lambda)$, то (П8) справедливо также и для всех миноров матрицы $B(\lambda) + A(\lambda)$.

Доказательство. Не умаляя общности, рассмотрим матрицу $A(\lambda)$ с единственным ненулевым элементом $a_{i_0j_0}(\lambda)$. Пусть $\mu_B(\lambda)$ — минор $B(\lambda)$, а $\mu_{A+B}(\lambda)$ — минор $B(\lambda) + A(\lambda)$, определяемый тем же набором столбцов и строк. Если $\mu_{A+B}(\lambda)$ не зависит от $a_{i_0j_0}(\lambda)$, то $\mu_{A+B}(\lambda) = \mu_B(\lambda)$, и равенство (П8) тривиально. В противоположном случае, разложив $\mu_{A+B}(\lambda)$ по элементам i_0-той строки, получаем

$$\mu_{A+B}(\lambda) = \mu_B(\lambda) \pm a_{i_0j_0}\mu'_B,$$

где μ'_B — другой минор $B(\lambda)$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta(\lambda)\mu_{A+B}(\lambda) = \lim \delta(\lambda)\mu_B(\lambda) \pm \lim a_{i_0j_0} \lim \delta(\lambda)\mu'_B = 0,$$

и лемма доказана.

Лемма 2. *Система (1) (из класса Ξ) может быть невырожденной в замкнутой правой полуплоскости в том и только в том случае, если ее конечномерная подсистема (8) также невырождена в замкнутой правой полуплоскости.*

Доказательство. Пусть система (1) вырожденная, то есть в некоторой точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$

$$\delta(\lambda_0) = 0,\ \lim_{\lambda \to \lambda_0} \delta(\lambda)\mu(\lambda) = 0$$

для каждого минора $\mu(\lambda)$ передаточной функции $\chi(\lambda)$. Тогда система (8) по лемме 1 также будет вырожденной, поскольку разность между $\chi(\lambda)$ и $\chi'(\lambda)$ — это аналитическая в $\mathbb{C}_0$ матричная функция $\chi''(\lambda)$. По этой же причине вырожденность системы (8) влечет вырожденность (1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Докажем сперва необходимость невырожденности для того, чтобы система (1) была стабилизируемой по выходу. Если система (1) вырождается в некоторой точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$, то по лемме 2 в этой же точке вырождается ее конечномерная подсистема (8). Невырожденность (8) по известной конечномерной теореме (см., например, [19], теорема 1.2.4) эквивалентна ее одновременной управляемости и наблюдаемости. Следовательно, система (8) ненаблюдаема, поскольку ее управляемость имеет место по ее определению в силу теоремы Нефедова-Шолоховича. Таким образом, имеются собственное число λ_0 и собственный вектор x_0 такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda_0 \geq 0,\ x_0 \in X', Ax_0 = A'x_0 = \lambda_0 x_0,\ Cx_0 = 0.$$

Функции $z(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $x(t) = e^{t\lambda_0}x_0$ составляют процесс замкнутой системы (1),(16) для любой обратной связи (16). Таким образом, система (1) не стабилизируемая, и необходимость невырожденности доказана.

Чтобы доказать достаточность, нужно представить такую обратную связь (16), что замкнутая система экспоненциально устойчива. Пусть система (1) невырождена в правой полуплоскости. Тогда по лемме 2 конечномерная подсистема (8) тоже невырожденная, и теорема 1.2.4 [19] гарантирует, что система (8) управляема и наблюдаема. Следовательно, существуют такие матрицы Φ и Ψ, что операторы (матрицы) $A' + \Phi C'$ и $A' + B\Psi$ гурвицевы.

Рассмотрим следующую обратную связь:

$$\dot{z}'' = A''z'' + B''u, \tag{П9}$$

$$\dot{z}' = A'z' + B'u + \Phi(y - C''z'' - C'z'), \tag{П10}$$

$$u = \Psi z'. \tag{П11}$$

Вычитая уравнение (П9) из (9), получаем $\dot{\varepsilon}'' = A''\varepsilon''$, где $\varepsilon''(t) = x''(t) - z''(t)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$, поскольку A'' — экспоненциально устойчивый оператор. Вычитая (8) из (П10), получаем, что

$$\varepsilon'(t) = x'(t) - z'(t) \tag{П12}$$

экспоненциально стремится к нулю, поскольку

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}' &= A'x' - A'z' + \Phi(C'x' + C''x'' - C''z' - C'z'') = \\ &= (A' + \Phi C'^{*})\varepsilon' + \Phi C''\varepsilon''.\end{aligned}$$

Подставим (П11) и (П12) в (8):

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dt} &= A'x' + B'u = A'x' + B'\Psi(x' - \varepsilon') = \\ &= (A' + B'\Psi)x' - B'\Psi\varepsilon'.\end{aligned} \tag{П13}$$

Следовательно, $dx'(t)/dt$ и $x'(t)$ экспоненциально стремятся к нулю, и потому $u(t) \to \infty$ также экспоненциально в силу (8). Наконец, (9) обеспечивает экспоненциальное убывание $|x''|$, поскольку оператор A'' в уравнении (9) экспоненциально устойчив.

Таким образом, обратная связь (П9),(П10),(П11) обеспечивает экспоненциальную устойчивость замкнутой системы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Не уменьшая общности, будем считать, что $m = l$, $G = I$. Если это не так, то все дальнейшие рассуждения следует проводить, взяв оператор GC вместо C.

Покажем, что гиперминимально фазовая система (1) сильно $G-$пассифицируема, то есть существует такая матрица K, что строго $G-$пассивна система

(П14) $$\dot{x} = A_K x + Bu, \qquad y = Cx,$$

где $A_K = A + BKC$. Матрицу K будем искать в виде $K = -kI$, где k — вещественное число. Обозначим $\chi_K(\lambda) = C(\lambda I - A_K)^{-1}B$. Домножив очевидное тождество $(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A_K)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}(A - A_K)(\lambda I - A_K)^{-1}$, на C слева и на B справа, получаем равенство $\chi(\lambda) - \chi_K(\lambda) = -\chi(\lambda)K\chi_K(\lambda)$, откуда

(П15) $$\chi_K^{-1}(\lambda) - \chi^{-1}(\lambda) = -K = kI.$$

Попробуем с помощью этого равенства показать, что при любом достаточно большом k для тройки операторов A_K, B, C выполнены все условия теоремы 2.

Начнем с экспоненциальной устойчивости A_K. Поскольку система (1) гиперминимально фазовая, справедливы неравенства $\det \chi(\lambda) \neq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}_\gamma$ и $CB > \delta I_m > 0$ для некоторого $\delta > 0$. Далее, функции $Q(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}AB$ и $q(\lambda) = CA(\lambda I - A)^{-1}AB$ стремятся к нулю при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}_\gamma$. Действительно, $\|q(\lambda)\| \leq \|CA\| \cdot \|(\lambda I - A)^{-1}\| \cdot \|AB\|$. Поскольку наша система принадлежит классу Ξ, первый и последний множители ограничены, а средний стремиться к нулю, и аналогично для $Q(\lambda)$.

Матричная функция $\chi(\lambda)^{-1}$ непрерывна внутри $\mathbb{C}_\gamma$, так как в этой области $\det \chi(\lambda)$ отличен от нуля. Возьмем $R > 0$ и разделим $\mathbb{C}_\gamma$ на подмножества $\overline{\mathbb{C}} = \{\lambda \in \mathbb{C}_\gamma : \|Q(\lambda)\| < \delta/2,\ |\lambda| > R\}$ и $\underline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\gamma \backslash \overline{\mathbb{C}}$. Выберем R достаточно большим для того, чтобы в $\overline{\mathbb{C}}$ не было спектра A, тогда функции $q(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ будут непрерывны на $\overline{\mathbb{C}}$. Множество $\underline{\mathbb{C}}$ компактно, поскольку $Q(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}_\gamma$. Следовательно, $\operatorname{Re} u^* \chi(\lambda)^{-1} u \geq -\underline{k}|u|^2$ $\forall u \in \mathbb{C}^m$, $\forall \lambda \in \underline{\mathbb{C}}$, где $\underline{k} = \max \|\chi(\lambda)^{-1}\|$ по $\lambda \in \underline{\mathbb{C}}$.

Если $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, то $\|\mu(\lambda)\| < 1/2$, где $\mu(\lambda) = -(CB)^{-1}Q(\lambda)$. Так как $(I_m - \mu(\lambda))^{-1} = I_m + \mu(\lambda)\left(I_m - \mu(\lambda)\right)^{-1}$, то $\|\left(I_m - \mu(\lambda)\right)^{-1}\| \leq 2$. Поэтому

$$\begin{aligned}\chi^{-1}(\lambda) &= \left[\lambda^{-1}\left(CB + Q(\lambda)\right)\right]^{-1} = \lambda(CB)^{-1}\left[I_m - \mu(\lambda)\right]^{-1} = \\ &= \lambda(CB)^{-1}\left[I_m + \mu(\lambda)[I_m - \mu(\lambda)]^{-1}\right] = \lambda(CB)^{-1} - (CB)^{-2}[\lambda Q(\lambda)][I_m - \mu(\lambda)]^{-1} = \\ &= \lambda(CB)^{-1} - (CB)^{-2}[CAB + q(\lambda)][I_m - \mu(\lambda)]^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} u^* \chi^{-1}(\lambda) u &= \operatorname{Re} u^* \lambda (CB)^{-1} u - \operatorname{Re} u^* (CB)^{-2}[CAB + q(\lambda)][I_m - \mu(\lambda)]^{-1} u \geq \\ &\geq \frac{\gamma}{\delta}|u|^2 - \frac{2}{\delta^2}(\|CAB\| + \|q(\lambda)\|)|u|^2.\end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{Re} u^* \chi(\lambda)^{-1} u \geq -\overline{k}|u|^2$ $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}}$, где $\overline{k} = -\gamma/\delta - 2(\|CAB\| + k_q)/\delta^2$, $k_q = \sup \|q(\lambda)\|$ по $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $k \geq 1 + \max\{\underline{k}, \overline{k}\}$, тогда из (П15) следует, что $\operatorname{Re} u^* \chi_K^{-1}(\lambda) u > |u|^2$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}_\gamma$, $\forall u$. Это неравенство было бы нарушено, если бы нашелся такой ненулевой $m-$вектор v, что $\chi_K^{-1}(\lambda)v = 0$. Таким образом, $\det \chi_K^{-1}(\lambda) \neq 0 \; \forall \lambda \in C_\gamma$, то есть матричная функция $[\chi_K^{-1}(\lambda)]^{-1} = \chi_K(\lambda)$ непрерывна на C_γ. Отсюда следует экспоненциальная устойчивость A_K. Действительно, гиперминимально фазовая система (1) невырождена в замкнутой правой полуплоскости: в качестве минора $\mu(\lambda)$ можно взять $\det \chi(\lambda)$, и тогда отсутствие у функции $\varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det \chi(\lambda)$ нулей в $\mathbb{C}_\gamma$ будет гарантировать неравенство (17). По теореме 3 из невырожденности системы (1) следует, что ее стабилизирует некоторая обратная связь (16). Значит, аналогичная обратная связь

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}y, \; u = \mathcal{C}z + (\mathcal{D} - K)y$$

стабилизирует систему (П14), поскольку матрицы $A = A_0$ и A_K отличаются именно на BKC. Использовав теорему 3 еще раз, получаем невырожденность системы (П14), а по следствию к той же теореме это означает экспоненциальную устойчивость оператора A_K.

Обозначим $w = \chi_K(i\omega)u$, тогда $u = \chi_K^{-1}(i\omega)w$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u^* \chi_K(i\omega)u &= \operatorname{Re} w^* \left(\chi_K^{-1}(i\omega)\right)^* \chi_K(i\omega)\chi_K^{-1}(i\omega)w = \\ &= \operatorname{Re} w^* \left(\chi_K^{-1}(i\omega)\right)^* w = \operatorname{Re} w^* \chi_K^{-1}(i\omega)w > 0, \end{aligned}$$

то есть для передаточной функции $\chi_K(\lambda)$ выполнено частотное неравенство (14).

Наконец, из (П4) следует, что

$$\begin{aligned} \omega^2 \operatorname{Re} u^* \chi_K(i\omega)u = -\operatorname{Re} u^*[CA_K B + CA_K(i\omega I - A_K)^{-1} A_K B]u \xrightarrow[\omega \to \infty]{} \\ \to -\operatorname{Re} u^* C(A - kBC)Bu = -\operatorname{Re} u^* CABu + ku(CB)^2 u. \end{aligned}$$

Поскольку $CB > 0$, для достаточно больших k получаем аналогичное (П7) неравенство $\lim_\omega \omega^2 \operatorname{Re} \chi_K(i\omega) > 0$, которое для систем из класса Ξ эквивалентно предельному частотному неравенству (15).

Итак, при любом достаточно большом k для тройки операторов A_K, B, C выполнены все условия теоремы 2: оператор A_K экспоненциально устойчив, а для передаточной функции справедливы частотные неравенства (14),(15). Применив теорему 2, получаем строгую пассивность системы (П14), то есть строгую пассифицируемость системы (1).

Покажем теперь, что верно и обратное утверждение: если система (1) строго пассифицируема, то она гиперминимально фазовая. Строгая пассифицируемость (1) по определению означает, что строго пассивна система (П14) с некоторой матрицей K, которая теперь необязательно имеет вид kI. Таким образом, для тройки операторов $A_K = A + BKC, B, C$ справедливы соотношения $HB = C^*$ и $\operatorname{Re} HA_K < 0$ с некоторым ограниченнным оператором $H = H^* > 0$, откуда сразу же следует экспоненциальная устойчивость A_K и положительность оператора $CB = B^*HB$. Осталось проверить, что функция $\varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det \chi(\lambda)$ не имеет нулей в замкнутой правой полуплоскости $\mathbb{C}_0$.

Воспользуемся теоремой 2. Для строго пассивной системы (П14) она гарантирует неравенство $\operatorname{Re} u^* \chi_K(\lambda)u > 0$ для любого ненулевого $m-$вектора u и любого λ из расширенной правой полуплоскости $\mathbb{C}_\Gamma$, $\Gamma < 0$. Следовательно, $\det \chi_K(\lambda) \neq 0 \forall \lambda \in \mathbb{C}_\Gamma$, и $\chi_K^{-1}(\lambda)$ — непрерывная внутри $\mathbb{C}_\Gamma$ матричная функция. Пользуясь леммой Шура и первым равенством (П15), получаем

$$\text{(П16)} \qquad \begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \lambda I - A' & -B'K \\ -C' & I - \chi''(\lambda)K \end{pmatrix} = \\ &= \det(\lambda I - A') \det \left[I - \chi''(\lambda)K - C'(\lambda I - A')^{-1} B'K\right] = \\ &= \det(\lambda I - A') \det \left[I - \chi(\lambda)K\right] = \det(\lambda I - A') \det \chi(\lambda) \det \left[\chi^{-1}(\lambda) - K\right] = \\ &= \varphi(\lambda) \det \chi_K^{-1}(\lambda). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(\lambda_0) = 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_0 \geq 0$. Тогда в силу непрерывности $\chi_K^{-1}(\lambda)$ из (П16) следует, что

$$(\text{П17}) \qquad (\lambda_0 I - A')x_0' - B'Ky_0 = 0,\ -C'x_0' + [I - \chi''(\lambda)K]y_0 = 0.$$

для некоторых векторов x' и y_0, неравных нулю одновременно. Конечномерная подсистема (8) невырождена в силу леммы 2. Невырожденность по теореме 1.2.4 ([19]) эквивалентна одновременной управляемости и наблюдаемости. Следовательно, вектор y_0 нулевым быть не может, поскольку в этом случае равенства (П17) принимают вид $\lambda_0 x_0' = A'x_0',\ C'x_0' = 0$, что противоречит наблюдаемости.

Обозначим $v(t) = C''G''(t)(\lambda_0 I - A'')^{-1}BKy_0$, где $G''(t)$ — экспоненциально убывающая по норме полугруппа, порождаемая экспоненциально устойчивым оператором A'' из уравнения (9). Рассмотрим систему уравнений

$$(\text{П18}) \qquad \begin{aligned} &\dot{x}'\ (t) = A'x'(t) + B'Ky(t),\ x'(0) = x_0', \\ &\dot{x}''\ (t) = A''x''(t) + B''K[y(t) + v(t)],\ x''(0) = 0,\ y(t) = C'x'(t) + C''x''(t). \end{aligned}$$

В силу (П17) ее решениями служат функции

$$x'(t) = e^{t\lambda_0}x_0',\ x''(t) = (\lambda_0 I - A'')^{-1}B''Ke^{t\lambda_0}y_0, y = e^{t\lambda_0}y_0.$$

Это противоречит устойчивости оператора $A_K = A + BKC$, вытекающей из пассивности системы (П14).

Итак, предположение $\varphi(\lambda_0) = 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda_0 \geq 0$ приводит к противоречию. Таким образом, строго пассифицируемая система всегда является гиперминимально фазовой. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Попов В.М.* Об одной задаче теории абсолютной устойчивости регулируемых систем. // Автоматика и телемеханика. 1964. N 9.

[2] *Zames G.* On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems. Parts 1 and 2 // IEEE Trans. Automatic Control. 1966. V.11. No. 2. P. 228–238. No. 3. P. 465–477.

[3] *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т.143, N 6. С.1304–1307.

[4] *Барабанов Н.Е., Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Лихтарников А.Л., Матвеев А.С., Смирнова В.Б., Фрадков А.Л.* Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления. // Автоматика и телемеханика. 1996. N 10. С.3–40.

[5] *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // Автоматика и телемеханика. 1974. N 12. С.96–103.

[6] *Фрадков А.Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. мат. журн. 1976. N 2. С.436–446.

[7] *Byrnes C.I.*, *Isidori A.*, *Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Aut.Contr. 1991. V. AC–36. No. 11. P. 1228–1240.

[8] *Van der Schaft A.J.* L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control. Lecture Notes on Control and Information Sciences. London: Springer, 1996.

[9] *Ortega R., Loria A., Nicklasson P., Sira-Ramires H.* Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems. London: Springer, 1998.

[10] *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.* Пассивность и пассификация нелинейных систем (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 3 – 37.

[11] *Lozano R., Brogliato B., Egeland O., Maschke B.* Dissipative Systems Analysis and Control. London: Springer-Verlag, 2000.

[12] *Kokotovic P.V., Arcak M.* Constructive nonlinear control: A historical perspective. Automatica, V.37, 2001, pp.637–662.

[13] *Abdallah C, Dorato P, Karni S.* SPR design using feedback. Amer.Contr.Conf., 1990, pp.1742–1743.

[14] *Huang CH, Ioannou PI, Maroulas J, Safonov MG.* Design of strictly positive real systems using constant output feedback. IEEE Trans. Autom. Control, 1999; V.44(3) pp. 569–573.

[15] *Fradkov AL.* Passification of nonsquare linear systems. Proc. 5th Europ. Contr.Conf., Porto, 2001, pp. 3338–3343.

[16] *Бондарко В.А., Лихтарников А.Л., Фрадков А.Л.*. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного распределенного объекта. // Автоматика и телемеханика. 1979. N 12. С.95–103.

[17] *Нефедов С.А., Шолохович Ф.А.* Критерий стабилизируемости динамических систем с конечномерным входом // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 2. С. 223-228.

[18] *Бондарко В.А.* V.A.Bondarko. "Sample-data transformation of infinite-dimensional systems," *Differential Equations* 1996, no. 10, pp. 1314-1322, in Russian.

[19] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.