

**Блехман И.И., Индейцев Д.А., Фрадков А.Л.**

**Медленные движения в системах с инерционным возбуждением  
колебаний**

Институт проблем машиноведения РАН и НПК «Механобр-техника»,  
Санкт-Петербург

Проблема прохождения через резонанс в устройствах с вращающимися неуравновешенными роторами, работающих в закритической области частот, представляет значительный интерес для ряда областей техники. Одной из важных закономерностей при этом является эффект «застревания» частоты вращения ротора вблизи частоты собственных колебаний, впервые описанный выдающимся немецким механиком Зоммерфельдом и названный одним из авторов статьи его именем [1].

Эффекту Зоммерфельда посвящен ряд работ, обзор и развитие которых можно найти в книгах [2 – 4]. В работах [5, 6] (см. также книгу [4]) посредством использования классических асимптотических методов нелинейной механики и их модификаций обнаружена примечательная закономерность движения системы вблизи области эффекта Зоммерфельда – наличие так называемого внутреннего маятника, частота свободных колебаний которого ниже резонансной частоты системы. В более общих системах задача о прохождении через резонанс рассмотрена в работе [7]. Характерным для этих работ является представление решения в виде разложений по квадратному корню из малого параметра, «иерархичность системы», т.е. наличие как «быстрых» и «медленных», так и «полумедленных» движений.

Наличие внутреннего маятника и его полумедленных движений является

физической основой эффективности некоторых методов управления пуском устройств с инерционным возбуждением колебаний. Оно позволяет использовать для преодоления резонансной частоты ту же идею «раскачивания», которая эффективна при приведении во вращение обычного маятника (дебалансного вибровозбудителя) [8,9]. Практической целью управления в этом случае является снижение мощности двигателя, необходимой для преодоления резонансной зоны, т.е. соответствующего энергетического барьера.

Впервые задача управления прохождением зоны резонанса при пуске и разгоне вибровозбудителей была поставлена в работах В.В. Гортинского и его коллег [10, 11], где был предложен так называемый «метод двойного пуска», состоящий в выключении и повторном включении электродвигателя в околорезонансной зоне. Моменты включения и выключения предлагалось рассчитывать заранее. Естественно, что эти моменты чувствительны к изменению параметров установки. В работах [12, 13] был предложен алгоритм управления с обратной связью, основанный на методе оптимального управления. Различные методы использования медленных движений при построении регуляторов с обратной связью для прохождения зоны резонанса предлагались также в работах [14-16] и некоторых других.

В настоящей работе задача о движении неуравновешенного ротора при прохождении зоны резонанса решается методом последовательных приближений в сочетании с методом прямого разделения движений. При таком «более грубом», чем в работах [4-7], подходе сравнительно просто получают уравнения, описывающие поведение системы как в дорезонансной, так и в послерезонансной области частот вращения ротора. В частности, находится выражение для частоты свободных «полумедленных» колебаний в дорезонансной области (т.е. для частоты колебаний «внутреннего маятника»). Эта частота существенно зависит от частоты вращения ротора и уменьшается до нуля при приближении к резонансной частоте. Обнаружено примечательное свойство внутреннего маятника: при

переходе через резонанс он как бы опрокидывается – если до резонанса устойчиво его положение, близкое к «нижнему», то в послерезонансной области устойчивым является положение, близкое к «верхнему».

Полученные уравнения «полумедленных» колебаний могут быть использованы для дальнейшего совершенствования систем управления процессом прохождения через резонанс при пуске вибрационной машины.

### Схема и уравнения движения системы

Схема рассматриваемой системы представлена на рис.1. На жесткой платформе 1 установлен неуравновешенный ротор 2, приводимый во вращение от электродвигателя. Платформа может перемещаться вдоль фиксированного направления  $x$ . С неподвижным основанием 3 она связана упругими элементами жесткостью  $c$  и демпфирующим элементом с коэффициентом вязкого трения  $\beta$ .

Уравнения движения системы имеют вид (см., например, [3], стр. 143)

$$I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - R(\dot{\varphi}) + m\varepsilon\ddot{x}\sin\varphi, \quad (1)$$

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = m\varepsilon(\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi). \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  – угол поворота ротора;  $x$  – смещение платформы;  $M$  – масса платформы;  $m$  – масса ротора;  $I$  – момент инерции ротора;  $M = M + m$  – масса системы;  $L(\dot{\varphi})$  – вращающий момент двигателя (статическая характеристика\*);  $R(\dot{\varphi})$  – момент сил сопротивления. Считаем, что действие силы тяжести на ротор и собственную динамику электродвигателя в данном случае можно не учитывать.

### Первое приближение, эффект Зоммерфельда

В качестве исходного приближения примем

$$\varphi = \varphi_1 = \omega t, \quad x = x_1 = P\sin\omega t + Q\cos\omega t, \quad (3)$$

---

\* Зависимость статической характеристики только от  $\dot{\varphi}$  характерна, например, для асинхронных двигателей и двигателей постоянного тока

где  $\omega = \omega(t)$ ,  $P$  и  $Q$  – медленно, а  $x_1$  – быстро изменяющаяся функция времени.

Это приближение рассмотрено в книге [3] методом прямого разделения движений, причем было получено следующее уравнение для частоты вращения

$$I\dot{\omega} = L(\omega) - R(\omega) + V(\omega). \quad (4)$$

Здесь

$$V(\omega) = m\varepsilon \langle \ddot{x}_1 \sin \omega t \rangle = -\frac{(m\varepsilon\omega)^2}{M} \frac{n\omega^3}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4n^2\omega^2} = -n\omega MA^2 \quad (5)$$

– так называемый вибрационный момент, представляющий дополнительную нагрузку на ротор, обусловленную колебаниями платформы, на которой он установлен. Наличием этого момента объясняется, в частности, эффект Зоммерфельда (см. ниже).

В формуле (5) угловые скобки указывают на осреднение за период  $T = 2\pi$  по «быстрому» времени  $\tau = \omega t$  и приняты обозначения

$$p^2 = c/M, \quad 2n = \beta/M, \quad A = \frac{m\varepsilon\omega^2}{M\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (6)$$

причем величина  $A$  представляет собой амплитуду установившихся вынужденных колебаний платформы, определяемых выражением (3) и описываемых уравнением

$$M\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + cx_1 = m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t, \quad (7)$$

получаемыми из (2) при  $\varphi = \varphi_1 = \omega t$ .

Амплитуда  $A$  связана с величинами  $P$  и  $Q$ , фигурирующими в выражении (3), соотношением

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (8)$$

причем

$$P = \frac{m\varepsilon\omega^2}{M} \frac{2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \quad Q = \frac{m\varepsilon\omega^2}{M} \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \quad (9)$$

Рассматриваемое решение справедливо при условии достаточно медленного относительного изменения частоты вращения  $\omega$ , т.е. при выполнении неравенства

$$\dot{\omega}/\omega \ll \omega, \quad (10)$$

а также, конечно, для стационарных значений  $\omega = \text{const}$ .

Уравнение (4) имеет либо три таких стационарных решения  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , либо одно  $\omega_3$  (см. рис.2), где кривые  $L$  соответствуют статическим характеристикам электродвигателей). Решение  $\omega_1 < p$  является дорезонансным,  $\omega_2 > p$  – послерезонансным, а решение  $\omega_3$  – «далеко послерезонансным». При этом решения  $\omega_1$  и  $\omega_3$  являются устойчивыми, а решение  $\omega_2$  – неустойчивым. Решению  $\omega_3$  соответствует нормальный установившийся режим работы послерезонансных вибрационных машин. Характеристике  $L_1$  отвечает «застревание» системы вблизи резонанса на частоте  $\omega_1$  (эффект Зоммерфельда), а характеристике  $L_3$  более мощного двигателя – выход на нормальный рабочий режим. Характеристике  $L_2$  соответствует скачкообразный переход от резонансного  $\omega_1$  в далеко зарезонансный режим  $\omega_3$ .

Таким образом, уже первое приближение позволяет объяснить и описать эффект Зоммерфельда (подробнее см. в книге [3]). Целью второго приближения в данном исследовании является изучение колебаний частоты вращения ротора  $\dot{\phi}$ . Как отмечалось, наличие таких колебаний вблизи дорезонансного движения  $\omega_1 < p$  позволяет путем надлежащего управления двигателем существенно снизить момент двигателя  $L_*$ , необходимый для преодоления зоны резонанса.

### **Второе приближение. Полумедленные колебания ротора**

В качестве следующего приближения положим в исходных уравнениях

(1) и (2)

$$\varphi = \varphi_2 = \omega t + \psi, \quad x = x_2 = x_1 + y, \quad (11)$$

и учтем, что  $\omega$  и  $x_1$  удовлетворяют уравнениям (4) и (7). Тогда придем к следующим уравнениям для  $\psi$  и  $y$ :

$$I\ddot{\psi} + k\dot{\psi} = m\varepsilon [\ddot{x}_1 \sin(\omega t + \psi) - \langle \ddot{x}_1 \sin \omega t \rangle] + m\varepsilon \ddot{y} \sin(\omega t + \psi), \quad (12)$$

$$M\ddot{y} + \beta\dot{y} + cy = m\varepsilon [(\dot{\omega} + \dot{\psi}) \sin(\omega t + \psi) + (\omega + \dot{\psi})^2 \cos \omega t - \omega^2 \cos \omega t]. \quad (13)$$

При этом мы предположили, что выражения для  $L$  и  $R$  могут быть линеаризованы вблизи значения  $\dot{\varphi} = \omega$ :

$$L(\omega + \dot{\psi}) = L(\omega) - k_L \dot{\psi}, \quad R(\omega + \dot{\psi}) = R(\omega) + k_R \dot{\psi}, \quad (14)$$

и обозначили через  $k = k_L + k_R$  ( $k_L > 0, k_R > 0$ ) «суммарный коэффициент демпфирования».

Далее снова воспользуемся для решения системы (12), (13) методом прямого разделения движений, положив

$$\psi = \Psi + \gamma, \quad y = Y + \delta, \quad (15)$$

где  $\Psi$  и  $Y$  – медленные, а  $\gamma$  и  $\delta$  – быстрые  $2\pi$ -периодические по  $\tau = \omega t$  составляющие с нулевыми средними по быстрому времени  $\tau = \omega t$  значениями

$$\langle \gamma \rangle = 0, \quad \langle \delta \rangle = 0. \quad (16)$$

Подставив выражения (15) в уравнения (12) и (13), можно перейти к уравнениям медленных и быстрых движений, причем, как известно, последние уравнения можно решать приближенно, не допустив серьезной погрешности в уравнениях медленных движений. Для интересующих нас целей достаточно упростить задачу, получив уравнение медленных движений для переменной  $\Psi$  в предположении, что быстрая переменная  $\gamma$  мала по сравнению с  $\Psi$ , а величина  $y$  мала по сравнению с  $x_1$ . Заметим, что в справедливости этих предположений для обычно встречающихся в

приложениях случаев легко убедиться. Тогда, подставив первое выражение (15) в уравнение (12), приходим к следующему уравнению для  $\Psi$ :

$$I\ddot{\Psi} + k\dot{\Psi} = m\varepsilon \langle \ddot{x}_1 (\sin \omega t \cos \Psi + \cos \omega t \sin \Psi) - \langle \ddot{x}_1 \sin \omega t \rangle \rangle.$$

Выполнив осреднение при учете выражений (3) и (9), представим это уравнение в форме

$$\ddot{\Psi} + 2n_1\dot{\Psi} + b \sin \Psi - \rho^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2} = 0, \quad (17)$$

где обозначено

$$2n_1 = k/I;$$

$$b = \frac{(m\varepsilon\omega^2)^2}{2MI} \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = \frac{1}{2} \frac{M}{I} (p^2 - \omega^2) A^2;$$

$$\rho^2 = \frac{(m\varepsilon\omega^2)^2}{MI} \frac{2n\omega}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = \frac{M}{I} 2n\omega A^2. \quad (18)$$

Здесь через  $A$ , как и выше, обозначено исходное приближение к амплитуде колебаний платформы, определяемое формулой (6).

При выполнении условия (10) частота вращения ротора  $\omega$  изменяется медленно, и в дорезонансной области  $\omega < p$  величина

$$q = \sqrt{b} = \sqrt{M(p^2 - \omega^2)/2IA} \quad (19)$$

является частотой малых свободных колебаний «внутреннего маятника» (без учета силы сопротивления). Как видно, эта частота обращается в нуль при  $p = \omega$ .

Для справедливости уравнения (17) необходимо, чтобы частота  $q$  была существенно меньше  $\omega$ , т.е. чтобы было справедливо предположение об относительных темпах изменения величин  $\Psi$  и  $x_1$ . Обычно достаточно, чтобы было

$$q/\omega < \frac{1}{3}. \quad (20)$$

График функции

$$z(\lambda) = \frac{q}{\omega\eta} = \lambda \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2 + 4\nu^2\lambda^2}}, \quad (21)$$

где

$$\lambda = \frac{\omega}{p}, \quad \nu = \frac{n}{p}, \quad \eta = \frac{m\varepsilon}{\sqrt{2MI}}, \quad (22)$$

представлен на рис.3; область, удовлетворяющая неравенству (20) при  $\eta = 1/3$  на этом рисунке заштрихована. Эта функция имеет в точке  $\lambda = 1/\sqrt{1+2\nu}$  максимум, равный  $0,5/\sqrt{\nu(1+\nu)}$ . Отсюда следует, что условие (20) выполняется при любых  $\lambda = \omega/p$ , если справедливо неравенство

$$\frac{4}{9}\nu(1+\nu) > \eta^2 \quad (23)$$

Если в этом неравенстве пренебречь величиной  $\nu$  по сравнению с единицей и перейти к размерным величинам по формулам (6) и (22), то это неравенство переписется в виде

$$\frac{m^2\varepsilon^2}{MI} < \frac{4}{9} \frac{\beta}{Mp}. \quad (24)$$

Это соотношение выражает требование, чтобы квадрат относительного статического момента ротора  $m\varepsilon/\sqrt{MI}$  не превышал относительного коэффициента демпфирования  $4\beta/9Mp$ . Область, соответствующая неравенству (23), представлена на рис. 4 (заштрихована).

Вернемся к рассмотрению уравнения (17). Стационарные решения этого уравнения  $\Psi = \text{const}$  определяются из равенства

$$b \sin \Psi - \rho^2 \sin^2 \Psi / 2 = 0. \quad (25)$$

Одно из таких стационарных решений есть

$$\Psi = \Psi_1 = 0, \quad (26)$$

а другое удовлетворяет соотношению

$$2b \cos \Psi_2 / 2 - \rho^2 \sin \Psi_2 / 2 = 0. \quad (27)$$

Условием устойчивости этих решений является неравенство

$$R = b \cos \Psi - \frac{1}{2} \rho^2 \sin^2 \Psi > 0,$$

легко получающееся из рассмотрения соответствующего уравнения в вариациях. Для решения  $\Psi_1$  это условие приводит к неравенству  $b > 0$ , а для решения  $\Psi_2$  - к противоположному неравенству  $b < 0$  (последнее становится очевидным, если использовать равенство (27), предварительно умноженное на  $\cos \Psi_2 / 2$ ). Таким образом, решение  $\Psi_1 = 0$  устойчиво в дорезонансной области ( $\omega < p$ ) и неустойчиво в послерезонансной области ( $\omega > p$ ), а решение  $\Psi_2$  – наоборот.

Отметим, что устойчивыми стационарными решениями уравнения (17) при отсутствии затухания ( $\rho = 0$ ) являются соответственно  $\Psi = \Psi_1 = 0$  до резонанса и  $\Psi = \Psi_1 = \pi$  после резонанса. Эти значения, как и должно быть, совпадают со значениями сдвига фаз между вынуждающей силой и перемещением платформы при вынужденных колебаниях, получаемый при рассмотрении линейной системы, когда вынуждающая сила  $F = m \varepsilon \omega^2 \sin \omega t$  считается заданной («система с источником энергии неограниченной мощности»). Уравнение (17) описывает колебания относительно указанных стационарных значений. Можно сказать также, что при переходе через резонанс внутренний маятник как бы опрокидывается.

### Обсуждение результатов

В соответствии с полученными результатами, стационарная или медленно изменяющаяся угловая скорость вращения ротора  $\omega$  определяется из уравнения (4), а «полумедленные» (или «полубыстрые») колебания относительно вращения с этой скоростью – из уравнения (18). Оба указанные уравнения справедливы при условии достаточно медленного изменения определяемых ими величин  $\omega$  и  $\Psi$  по сравнению с колебаниями частоты  $\omega$ . Если выполнено условие (10), то частота  $q$  в уравнении (18) изменяется со временем  $t$  также сравнительно медленно, и потому она может

рассматриваться при решении этого уравнения как квазипостоянный параметр – частота интересующих нас «полумедленных» (или «полубыстрых») колебаний. На рис.5 схематически показано относительное расположение на оси  $\omega$  всех рассмотренных выше характерных частот.

Заметим, что уравнение (17) можно свести к уравнению

$$\ddot{\chi} + 2n_1\dot{\chi} + W \sin \chi = \rho^2/2, \quad (28)$$

где  $\chi = \Psi + \Psi_0$ , а  $\Psi_0$  и  $W$  определяются из соотношений

$$b = W \cos \Psi_0, \quad \rho^2/2 = W \sin \Psi_0.$$

Уравнение (28) хорошо известно как уравнение «смещенного» маятника, играющего значительную роль в теории синхронных электрических машин. «Глобальному» исследованию поведения его решений на фазовой плоскости  $\dot{\chi}, \chi$  посвящено большое число работ. Изложение их результатов и обстоятельный обзор можно найти в книге [17]. Следует, однако, иметь в виду, что этими результатами можно непосредственно пользоваться лишь для стационарных значений  $\omega \equiv \text{const}$ . В общем же случае, когда  $\omega$  является медленно изменяющейся функцией времени, определяемой из уравнения (4), мы должны рассматривать «множество фазовых портретов», отвечающих различным значениям коэффициентов  $W$  и  $\rho$ , а также скачкообразному изменению угла  $\Psi_0$  при переходе  $\omega$  через резонансное значение  $p$  (поскольку при этом, согласно (18), изменяется знак коэффициента  $b$ ).

Отметим также, что в настоящей работе мы не рассматривали «быстрые» колебания угловой скорости вращения ротора  $\dot{\gamma}$ . Нетрудно установить, что эти колебания происходят с частотой  $2\omega$ . Последнее легко понять также из физических соображений: поскольку скорость платформы дважды за период ее колебаний  $2\pi/\omega$  обращается в нуль, то также дважды за период ее максимальная кинетическая энергия  $\frac{1}{2}M(A\omega)^2$  добавляется к кинетической энергии ротора  $\frac{1}{2}I\omega^2$ . Отсюда для изменения амплитуды колебаний частоты

вращения  $\dot{\phi}$  получается выражение  $\Delta\omega \approx MA^2\omega/2I$ . Эти колебания отчетливо заметны на рис. 6, полученном путем компьютерного моделирования (см. ниже).

Наконец, заметим, что приведенные результаты допускают простое толкование в терминах вибрационной механики [3]. Так, уравнение (17) может быть представлено в форме

$$L\ddot{\Psi} + k\dot{\Psi} = V(\Psi),$$

где

$$V(\Psi) = -d\Pi_V/d\Psi = -b\sin\Psi + \rho^2 \sin^2\Psi,$$

- вибрационный момент, а

$$\Pi_V = b\cos\Psi - \rho(\Psi - \sin\Psi)/2$$

- «потенциальная энергия вибрационных сил». Точкам минимума этой энергии соответствуют устойчивые стационарные движения. Таким образом рассматриваемая система относится (по отношению к переменной  $\Psi$ ) к классу так называемых потенциальных в среднем динамических систем: вибрационный момент является потенциальным, несмотря на существенную неконсервативность исходной системы (1), (2).

### **Сравнение с результатами компьютерного моделирования**

Эффект возникновения медленных колебаний угловой скорости вблизи резонанса хорошо заметен на рис. 6, полученном путем компьютерного моделирования системы (1), (2). На рисунке изображены графики угловой скорости  $\dot{\phi}(t)$  при моменте  $L(\omega) - R(\omega) = 0.51$  кг·м/с<sup>2</sup> (преодоление зоны резонанса) и 0.50 (застревание). Параметры в уравнениях (1), (2) и (14) выбраны соответствующими параметрам вибрационного стенда СВ-2 [9]:  $m = 1.5$  кг,  $M = 12$  кг,  $I = 0.014$  кг·м<sup>2</sup>,  $\varepsilon = 0.04$  м,  $c = 5300$  кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $\beta = 0.005$ ,  $k = 5$ .

Для указанных значений параметров формула (19) дает  $q = 5.7$  с<sup>-1</sup>, что с хорошей точностью согласуется с результатом вычислительного эксперимента. На рис. 6 также хорошо видны «быстрые» колебания угловой

скорости вращения ротора с частотой  $2\omega$ , о которых говорилось выше.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-08-01500) и программы №22 Президиума РАН (проект 1.8).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блехман И.И.* Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // Инженерный сборник. – 1953. – Т.16. С.49 – 72.
2. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. 896 с.
3. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. 400 с. (Англ. перевод: *Vibrational Mechanics*. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific. 2000. 509 p.
4. *Fidlin A.* *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*. Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2006. 358 p.
5. *Нейштадт А.И.* Прохождение через резонанс в двухчастотной задаче // ДАН СССР. – 1975. – Т.221. С. 301 – 304.
6. *Печенев А.В.* О движении колебательной системы с ограниченным возбуждением вблизи резонанса // ДАН СССР. – 1986. – Т.290. – №1, С. 12 – 15.
7. *Neishtadt A.* Scattering by resonances // *Solar System Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1997. – V.65. P. 1 – 20.
8. *Андреевский Б.Р., Гузенко П.Ю., Фрадков А.Л.* Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // *Автоматика и телемеханика*, 1996, №4, С. 4 – 17.
9. *Блехман И.И., Васильков В.Б., Лавров Б.П., Нагибина О.Л., Томчина О.П., Фрадков А.Л., Шестаков В.М., Якимова К.С.* Способ пуска электродвигателя, приводящего во вращение неуравновешенный ротор. Патент РФ на изобретение №216076, 27.12.200, Бюл. №36.

10. *Гортинский В.В., Савин А.Д., Демский А.Б., Борискин М.А., Алабин Е.А.* Способ уменьшения резонансных амплитуд при пуске вибромашин. А/с СССР №255760 от 28.X.1969, БИ №33.
11. *Гортинский В.В., Хвалов Б.Г.* Об одном способе управления запуском колебательной системы с инерционным возбудителем. *Механика машин.* Вып. 58. – М.: Наука, 1981. С. 42 – 46.
12. *Малинин Л.М., Первозванский А.А.* Оптимизация перехода несбалансированного ротора через критическую скорость // *Машиноведение*, 1983, №4, С. 36 – 41.
13. *Кельзон А.С., Малинин Л.М.* Управление колебаниями роторов. СПб.: Политехника, 1992.
14. *Rand R.H., Kinsey R.J., Mingori D.L.* Dynamics of spinup through resonance // *Intern. J. of Nonlinear Mechanics*, vol. 27, Ni. 3, 1992, pp. 489–502.
15. *Tomchina O.P.* Passing through resonances in vibratory actuators by speed-gradient control and averaging // *Proc. Int. Conf. “Control of Oscillations and Chaos”*, IEEE, St. Petersburg, 1997, v. 1, pp. 138 – 141.
16. *Томчин Д.А., Фрадков А.Л.* Управление прохождением ротора через зону резонанса на основе метода скоростного градиента // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, №5, 2005, С. 66 – 71.
17. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. – СПб.: Наука, 2000, 400 с.
18. *Blekhman I.I., Bortsov Yu.A., Burmistrov A.A., Fradkov A.L., Gavrilov S.V., Kononov O.A., Lavrov B.P., Shestakov V.M., Sokolov P.V., Tomchina O.P.* Computer-controlled vibrational set-up for education and research. In: *Proc. of 14th IFAC World Congress*, 1999, Vol.M, pp.193-197.

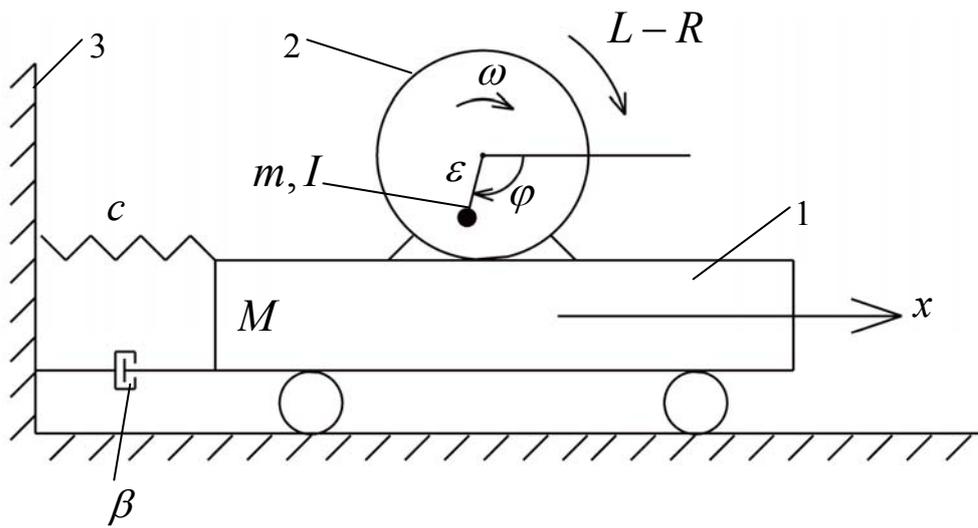


рис.1, Блехман и др.

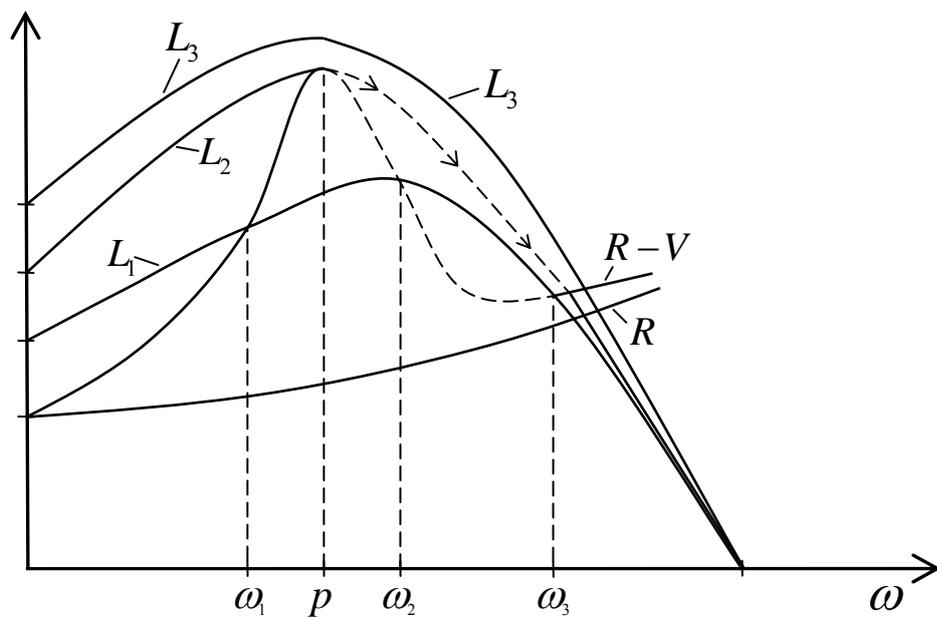


рис.2, Блехман и др.

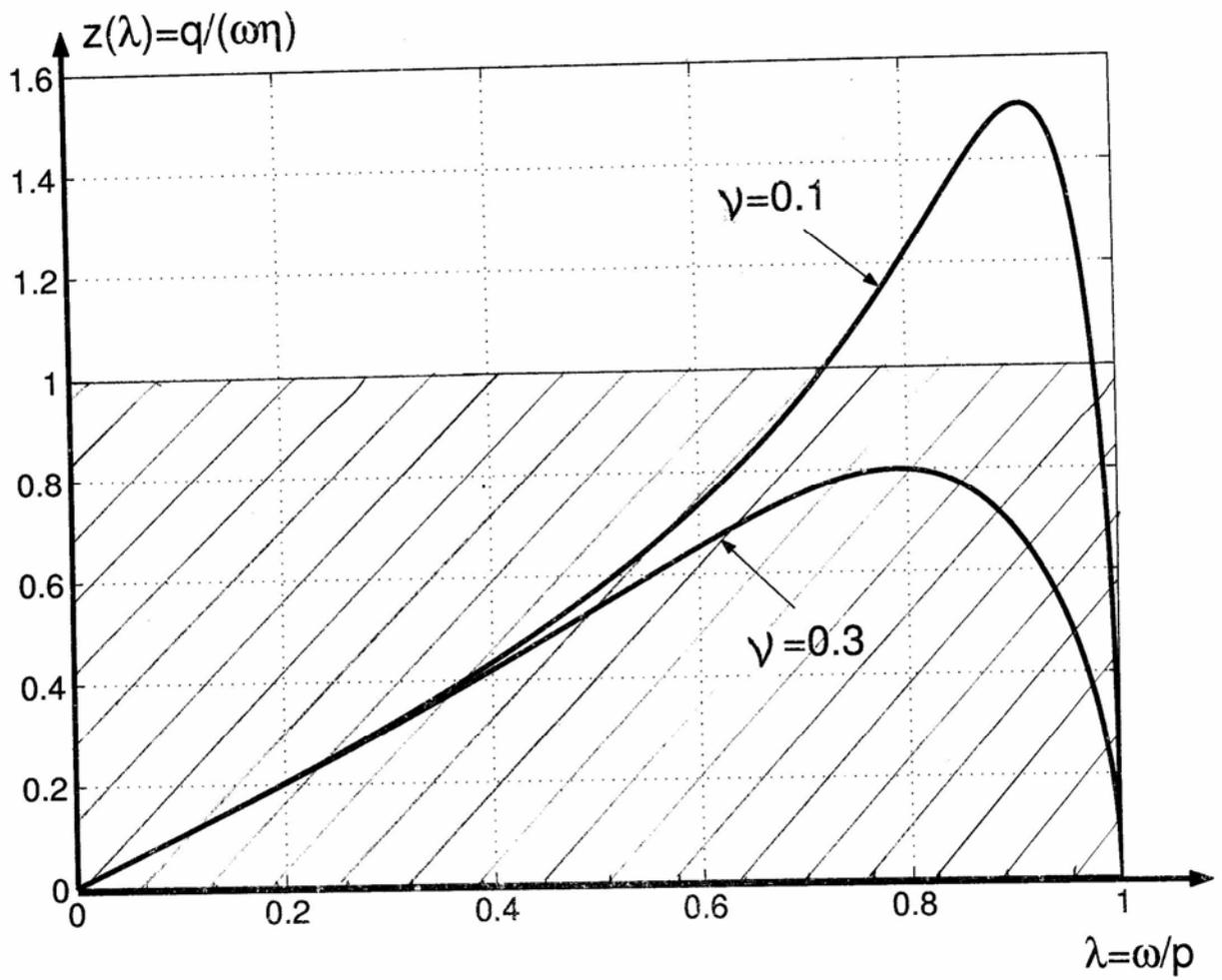


рис.3, Блехман и др.

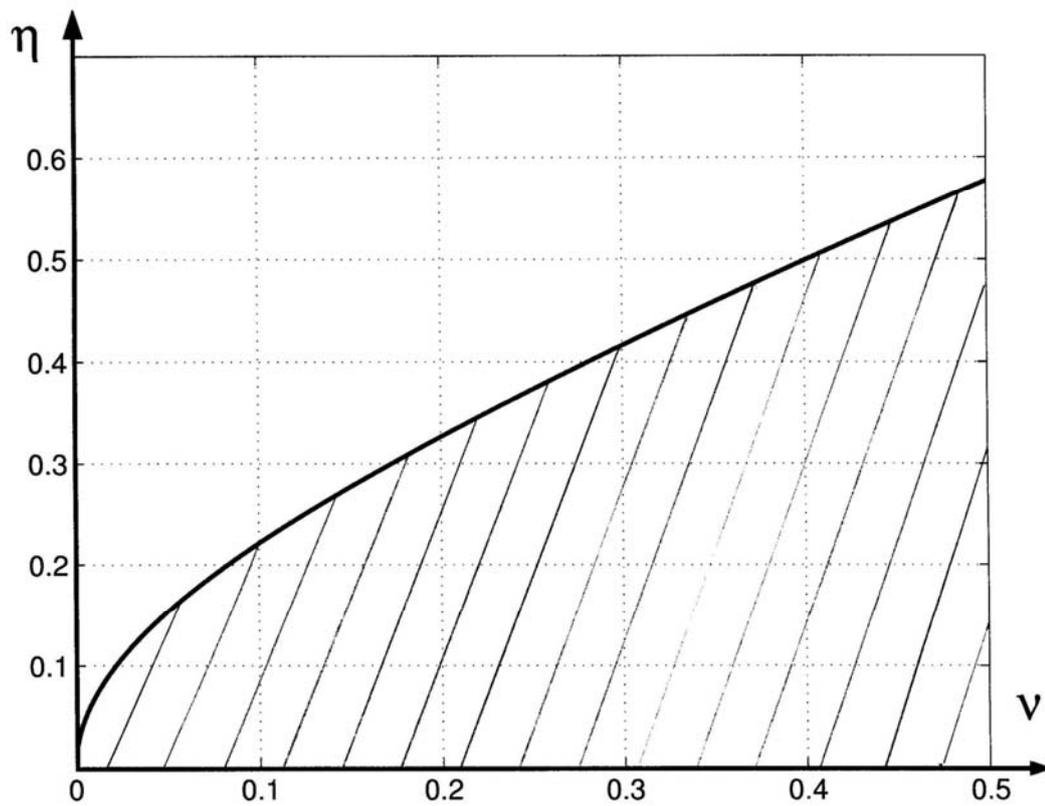


рис.4, Блехман и др.

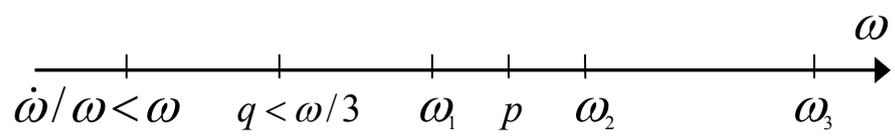


рис.5, Блехман и др.

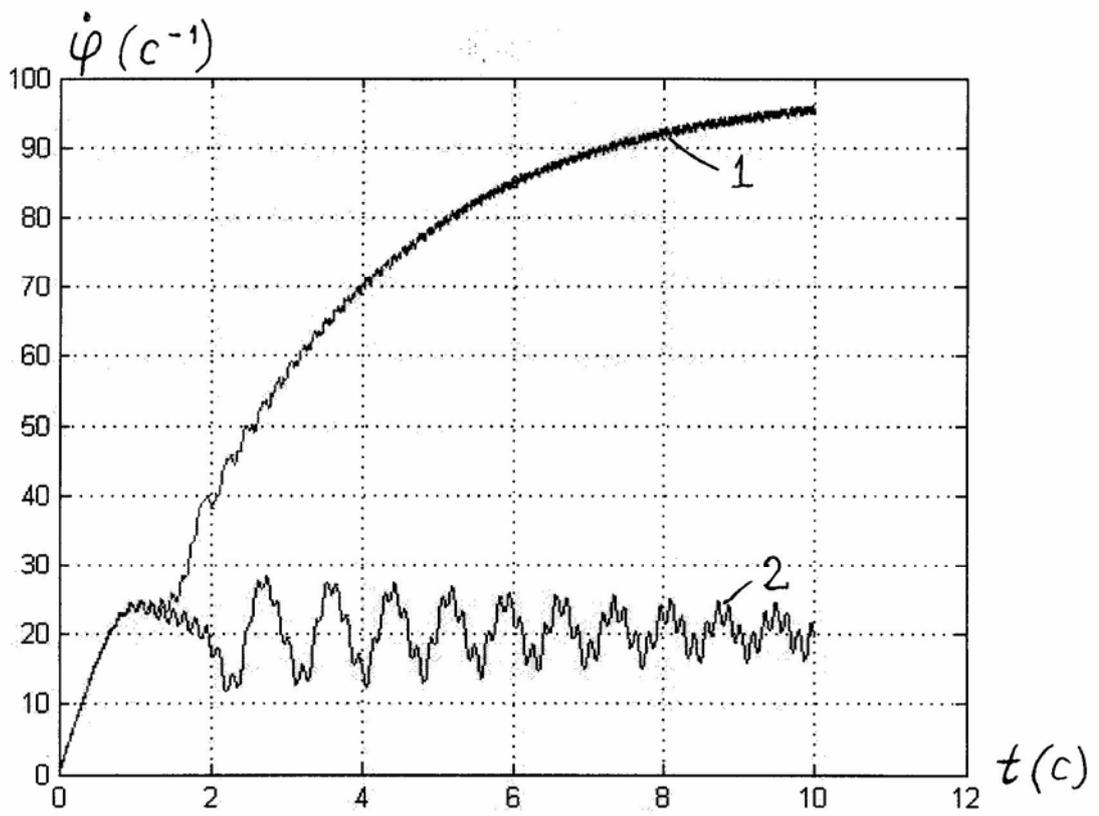


рис.6, Блехман и др.

## Подрисовочные подписи

к статье И.И. Блехмана, Д.А. Индейцева, А.Л. Фрадкова

### **«Медленные движения в системах с инерционным возбуждением колебаний»**

Рис.1. Схема системы

Рис.2. Стационарные значения средней частоты вращения ротора (к объяснению эффекта Зоммерфельда)

Рис.3. Зависимость относительной частоты «медленных» колебаний ротора от относительной частоты его вращения

Рис.4. Примерная область справедливости второго приближения (заштрихована)

Рис.5. Относительное расположение характерных частот движений системы

Рис.6. Изменение частоты вращения ротора в пусковом режиме (компьютерное моделирование): 1 – преодоление резонанса; 2 – застревание (эффект Зоммерфельда).