

©2004 г. Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, канд. техн. наук,

А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук

(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ. II. ПРИЛОЖЕНИЯ *

Дается обзор задач и методов управления хаосом – области интенсивных исследований последнего десятилетия. Настоящая работа является продолжением обзора *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом. Методы и приложения. Часть 1. Методы // АиТ. 2003. 5. С. 3–45* и посвящена описанию наиболее интересных приложений. Рассматриваются как применения в различных научных областях: механика (управление маятниками, балками, пластинами, трением), физика (управление турбулентностью, лазерами, управление хаосом в плазме и распространением дипольных доменов), химия, биология, экология, экономика, медицина, так и применения в различных отраслях техники: механические системы (управление виброформирователями, микрокантилеверами, кранами, судами), космические аппараты, электрические и электронные системы, системы связи, информационные системы, химическая и обрабатывающая промышленность (перемешивание потоков жидкостей и обработка сыпучих материалов).

1 Введение

В первые годы после проникновения концепции детерминированного хаоса в научную литературу, хаотическое поведение систем считалось экзотическим явлением, интересным лишь математикам и никогда не возникающим в практических задачах. Однако в дальнейшем возможность хаотичности динамики была обнаружена в огромном числе различных систем в механике, системах связи, лазерной физике и радиофизике [10, 12, 16, 18, 19], химии и биохимии [46], биологии [55], в экономике [47, 124, 144], медицине.

Последующее развитие выявило целый ряд реальных практических задач, где хаотические режимы действительно могут возникнуть, оказываясь иногда вредными, а иногда — полезными. Более того, возникли практически важные классы задач, когда нелинейной системой необходимо управлять, уменьшая, или наоборот увеличивая степень ее хаотичности. Методы решения подобных задач также стали активно развиваться. Основные из них

*Работа частично финансирована Российским Фондом фундаментальных исследований (РФФИ), грант 02-01-00765, научной программой Президиума РАН №19 (проект 1.4) и федеральной программой «Интеграция». Авторы также выражают благодарность за поддержку проф. Р. Эвансу из Университета г. Мельбурна.

изложены в первой части обзора [6]. Настоящая, вторая часть обзора посвящена приложениям.

В период 1997–2002 гг. в рецензируемых журналах опубликовано более 300 статей, посвященных различным применениям методов управления хаотическими процессами. Вопросы управления хаосом активно обсуждаются в таких областях науки и техники, как физика турбулентных процессов, лазерная физика и оптика, физика плазмы, молекулярная и квантовая физика, механика, химия и электрохимия, биология и экология, экономика и финансы, медицина, машиностроение, электротехника и химическое производство, управление движением, системы связи и информационные системы. Прикладные работы по управлению хаосом уместно разбить на два класса: приложения научные и приложения технические (инженерные).

В работах по инженерным приложениям демонстрируется применение хаоса и методов управления хаотическими системами для решения конкретных практических задач, или хотя бы показывается возможность такого применения.

Напротив, приложения в научных областях (в физике, химии, биологии) направлены не на конкретные практические применения, а на использование теории и методов управления для обнаружения новых свойств и закономерностей поведения физических (химических, биологических и др.) систем. При этом часто используются упрощенные, модельные описания исследуемых систем. В то же время важную роль играет требование малости величины управляющих воздействий или иные ограничения на класс допустимых управляющих воздействий. Введение (явное или неявное) подобных ограничений направлено на выявление внутренних свойств, присущих самой системе, а не навязанных ей сильным управляющим воздействием.

Приложения в научных областях рассмотрены в разделе 2 настоящего обзора, а приложениям в технике посвящен раздел 3. Сведения о прочих применениях даны в разделе 4.

2 Научные приложения

2.1 Механика

Управление маятниками, балками, пластинами. Простейшим классом механических систем, обладающих сложной динамикой, являются маятники. Маятниковые системы способны демонстрировать существенно «нелинейные» явления (мультистабильность, бифуркации, хаос). Простота и наглядность физических экспериментов делает маятники привлекательными как для исследовательских, так и для учебных целей [33, 98, 118, 169].

Как известно, движение простого маятника с трением (как и многих других моделей нелинейных осцилляторов с одной степенью свободы) может стать хаотическим при возбуждении гармонически изменяющейся силой достаточной амплитуды. В ряде работ исследовался вопрос, поставленный С. Шоу в 1989 году: насколько увеличивается амплитуда периодической возбуждающей силы, при которой хаос еще не наблюдается, если можно изменять форму возбуждающей силы? В работе [118] изучался обратный маятник с упорами, возбуждаемый горизонтальными колебаниями оси подвеса. Аналитически найден оптимальный профиль возбуждающей силы, гарантирующий отсутствие хаоса (по критерию Мельникова) при наибольшей амплитуде и показано, что наибольшая амплитуда превы-

шает соответствующую амплитуду для гармонического возбуждения в два раза. Введение обратной связи приводит к дальнейшему росту зоны нехаотических режимов [120]. Аналогичные результаты получены для осцилляторов Дуффинга и Гельмгольца [119].

В работе [50] исследуется динамика трехстепенного гироскопа с нелинейным (кубическим) демпфированием при внешнем гармоническом воздействии, вызванном вертикальной вибрацией основания. Используется следующая модель динамики нутационного движения гироскопа

$$(1) \quad I_1 \ddot{\theta} + \frac{\beta^2(1 - \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} + M_d(\dot{\theta}) - F_g l \sin \theta = F_g \bar{l} \sin \omega t \sin \theta,$$

где θ — угол нутации; $M_d(\dot{\theta}) = D_1 \dot{\theta} + D_2 \dot{\theta}^3$ — момент диссипативных сил, D_1, D_2 — параметры; F_g — сила тяжести; l — расстояние от опоры до центра масс гироскопа; \bar{l}, ω — амплитуда и частота внешнего воздействия; параметр $\beta = I_3 \Omega$, I_1, I_3 — полярный и экваториальный моменты инерции гироскопа; Ω — скорость вращения ротора относительно главной оси. Методом Ляпунова в работе получены достаточные условия устойчивости положения равновесия, а также проведены всесторонние численные исследования. На бифуркационных диаграммах показан переход к хаотическим нутациям с ростом амплитуды вибраций основания. Далее рассматривается задача управления — преобразование характера движения системы из хаотического в периодический. С этой целью исследуются возможности, предоставляемые программным управлением (воздействием постоянного или периодическим изменяющегося момента), управлением с запаздыванием в обратной связи (алгоритмом Пирагаса [6, п. 4.5]) и адаптивным управлением. В последнем случае предполагается настройка (изменение) параметра β в (1) по интегралу от рассогласования между текущими и желаемыми значениями угла нутации и его производной. Моделированием показана возможность подавления хаоса для рассмотренных способов управления. В [50] исследуется также задача *синхронизации* хаотических систем такого вида.

Условия возбуждения и подавления хаоса внешним воздействием изучены для других модельных механических систем: стержней и балок [43, 86], пластин [49], ударных систем [119, 173], цепочки осцилляторов, последовательно соединенных упругими связями [41]. В работах [172, 173] предложено намеренно создавать в системах управления хаотические режимы для ускорения переходных процессов. На примере задач управления движением скачущего мяча и двойного маятника показано, что хаотизация движения нелинейной системы дает возможность снизить время управляемого перехода к заданной периодической траектории.

Управление трением. Как известно, «ползучее» (низкоскоростное) движение механической системы может иметь скачкообразный колебательный (в частности, хаотический) характер, вызванный взаимодействием статической и кинетической сил трения (stick-slip motion). С практической точки зрения целесообразно управлять системой таким образом, чтобы вместо хаотического движения возникло плавное скольжение. Такое управление имеет большое значение для микромеханических устройств таких, как привод дисководов компьютера, в которых при пуске и остановке могут возникать скачкообразные перемещения. Оно важно и для мощных приводов артиллерийских установок и телескопов. Управление силами трения обычно выполняется химическими средствами, а именно — с использованием жидких смазок. Другой подход, предложенный в работах [65, 155] основан на управлении системой механическими средствами. Преследуется двоякая цель: а) достижение плавного хода на низких скоростях движения, для которых изначально характерны скачкообразные

перемещения; б) уменьшение сил трения. Авторы работы [155] использовали модель системы, в которой помимо макроскопической степени свободы (т.е. положения скользящего тела) имеется внутренняя степень свободы, описывающая состояние смазочного вещества. В предположении, что весь четырехмерный вектор состояния системы может быть измерен, а нормальная сила является управляющим воздействием, предложен алгоритм управления на основе линеаризации отображения Пуанкаре и метода модального управления. Недостатком подхода работы [155] является необходимость восстановления динамики системы, в частности, динамики внутренних степеней свободы в области трущегося контакта.

В работе [65] предложено два алгоритма стабилизации неустойчивых непрерывно скользящих состояний осциллятора с сухим трением. Оба алгоритма опираются на макроскопические уравнения движения системы и запаздывающую обратную связь (метод Пирагаса). В качестве измеряемой переменной используется упругая деформация, а управляющим воздействием является либо скорость скольжения, либо нормальная сила. В работе показано, что оба метода могут перевести движение из скачкообразного в непрерывное скольжение, и что управление скоростью является менее грубым, чем управление нагрузкой. Экспериментальное подтверждение возможности подавления или создания хаотического режима при управлении нормальной силой по алгоритму эпизодической (импульсной) пропорциональной обратной связи (ОРФ-алгоритм [6, п. 4.4]) приведено в работе [131].

2.2 Физика

Управление турбулентностью. Задача описания турбулентности и управления ею остается одной из наиболее важных физических проблем уже в течение целого столетия [75]. Известно, что бесконечномерное описание турбулентного потока как решения уравнения в частных производных Навье–Стокса часто редуцируется до конечномерного. Если же размерность аттрактора течения в фазовом пространстве относительно невелика, то турбулентное течение можно интерпретировать как хаотическое и применять к нему методы управления хаосом. К числу таких примеров относится течение Тейлора–Куэтта — поток жидкости между двумя концентрическими вращающимися цилиндрами.

Экспериментальное управление динамикой хаотических структур, возникающих в тейлоровском вихревом потоке с глобоидальной (hourglass)¹ геометрией представлено в [174]. Такой поток является вариантом системы Тейлора–Куэтта. В эксперименте внутренний цилиндр приводился во вращение шаговым двигателем с компьютерным управлением. Использована смесь воды и глицерина, в которую для визуализации добавлено 1.5 объемных процента специальной суспензии (Kalliroscope suspension). Увеличение скорости вращения приводит к возрастанию числа Рейнольдса $R = 2\pi f a d / \nu$, в котором f — частота вращения, a — радиус глобоида в центральной части, d — ширина зазора в центре, ν — кинематическая вязкость. При $R > R_{ps}$ (где R_{ps} — критическое число Рейнольдса, при котором возникает проскальзывание фазы), возникают пары вихрей, сначала — периодические, а затем — хаотические. Интервалы времени I_n между фазовыми сдвигами (phase slips) измерялись телекамерой. Управление осуществлялось путем изменения приведенного числа Рейнольдса $\varepsilon = (R/R_{ps}) - 1 = (f/f_{ps}) - 1$ с помощью алгоритма

$$(2) \quad \delta\varepsilon_{n+1} = K(I_n - I_F) + R\delta\varepsilon_n,$$

¹ В форме песочных часов.

где $\delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \bar{\varepsilon}$, а $\bar{\varepsilon}$ соответствует периодическому неустойчивому движению с интервалом I_F между фазовыми полосками. Управляющий сигнал подавался только при выполнении условия $|\delta\varepsilon_{n+1}| < 0.01$, что соответствует обобщенному ОРФ-алгоритму (либо частному случаю рекуррентного алгоритма, описанного в [70], см. также [6, п. 4.4]). Параметры закона управления I_F, K, R , подбирались экспериментально. Получено что при $\bar{\varepsilon} = 0.417$ (соответствующем хаотическому процессу) для подавления хаоса достаточно изменять ε не более чем на 2 %.

Управление лазерами. Подавлению хаотического (так называемого *многомодового*) поведения лазеров посвящена одна из первых публикаций по применению управления хаотическими системами [153]. В этой работе даны экспериментальные свидетельства подавления хаоса с помощью обратной связи (feedback leading), что позволило существенно (на порядок) повысить мощность излучения за счет увеличения мощности накачки. В 1997—2002 гг. опубликовано несколько десятков журнальных статей, относящихся к управлению хаосом в лазерах и в оптических устройствах. Исследования последнего времени посвящены, в основном, методу разомкнутого управления (управления без обратной связи [6, п.4.1]) и методу запаздывающей обратной связи (метод Пирагаса [6, п. 4.5]). Исследование влияния запаздывающей обратной связи на динамику лазера с модуляцией потерь проведено в [14]. Экспериментальное подавление неустойчивости лоренцевского типа (Lorenz-like) обратной связью с запаздыванием в аммонийных лазерах описано в работе [64]. Сравнение методов разомкнутого управления и управления с запаздывающей обратной связью для CO_2 лазеров с модуляцией потерь, а также Nd -легированного волоконного лазера выполнено в работе [81]. В ней количественно предсказано расширение области устойчивости (сдвиг бифуркации удвоения периода) при управлении на основе моделей с двумя степенями свободы для лазеров класса В. Аналитические результаты подтверждены моделированием и экспериментом.

Управление хаосом в плазме. В статьях [23, 74, 148] приводятся данные об успешном управлении хаосом в так называемом «диоде Пирса» (Pierce diode). Диод Пирса является одной из наиболее простых моделей для исследования устойчивости плазмы. Колебания в ней могут возникать как в виртуальном кинетическом катоде, так и в гидродинамической плазме. В [148] метод OGY применен для стабилизации циклов периода 1 и 2. В [23] для подавления хаоса используется сигнал запаздывающей обратной связи по измерениям плотности пространственного заряда в фиксированной точке пространства, модулирующий разность потенциалов между входной и выходной сетками диода. Результаты [23, 148] можно использовать, чтобы привести прибор в режим устойчивых микроволновых колебаний.

В работе [158] обобщаются результаты по многомодовому управлению с обратной связью для магнитогидродинамических мод и по различным применениям обратной связи в диагностике плазмы. Целью исследований являлась разработка методов для экспериментального получения моделей динамики турбулентности в плазме, предназначенных как для лучшего понимания процессов переноса, так и для более уверенного (надежного) синтеза регуляторов. Описан новый метод экспериментального построения нелинейных динамических моделей турбулентности в плазме с использованием обратной связи. Результаты работы нашли экспериментальное подтверждение для Колумбийского линейного ускорителя (Columbia Linear Machine) и могут быть распространены на установки для термоядерного синтеза (fusion machines).

В работе [154] изучается взаимодействие лазерного излучения с плазмой, играющее

важную роль в задачах управляемого термоядерного синтеза. Отмечается, что в целом процесс такого взаимодействия очень сложен и его математическая модель пока не получена, однако известно, что при взаимодействии наблюдается два типа явлений. Одно из них состоит в возникновении устойчивых солитонно-подобных структур, а другое заключается в появлении крайне неустойчивых, хаотических процессов. Считается возможным исследовать эти явления по отдельности. В [154] исследуются способы приведения хаотического процесса к периодическим колебаниям, либо к установившемуся состоянию с помощью, соответственно, двух типов управления: программного периодического изменения некоторого параметра системы, либо с помощью так называемого «пропорционального импульсного управления». Более детально, в работе рассматривается модель вида

$$\begin{cases} \dot{x} &= -gx - b_1(x+z)y^2, \\ \dot{y} &= -g_0y + b_2(x^2 - z^2)y, \\ \dot{z} &= -g_0z + b_3(x+z)y^2, \end{cases}$$

где x, y, z — безразмерные амплитуды отраженной волны, волны накачки и прямой волны (field amplitudes for anti-Stockes, pump and Stockes modes), g, g_0, b_1, b_2, b_3 — параметры. Дифференцирование производится по пространственной координате вдоль направления распространения волн. Программное управление состоит в изменении параметра g_0 по формуле $g_0(t) = \bar{g}_0 - a \cos \omega_0 t$. При $\bar{g}_0 = 1$ и $a = 0$ (отсутствии управления) наблюдается хаотическое поведение. Надлежащим выбором амплитуды a и частоты ω_0 модуляции параметра g_0 процесс в системе можно преобразовать в периодический. Пропорциональное импульсное управление состоит в скачкообразном изменении переменных состояния в определенные моменты времени.

Результаты экспериментального изучения хаотических процессов в германиевых осцилляторах с n -проводимостью приведены в работе [92]. Исследовано поведение неустойчивости Кадомцева–Недопасава в электронно-дырочной плазме при температурах 77 и 300° K при действии внешних электрического и магнитного полей. По измерениям в различных точках образцов получены картины пространственно-временного развития хаотических процессов. Получены бифуркационные диаграммы, показывающие границы областей с удвоением периода, квазипериодичности, хаотичности и перемежаемости (intermittency). Показано, что при некоторых условиях в образцах могут одновременно существовать несколько аттракторов, имеющих каждый свою размерность и энергетические характеристики. Изучение полупроводниковой плазмы при влиянии внешнего гармонического воздействия продолжено в работе [27]. В работе приводится ряд экспериментально полученных зависимостей, например — зависимость фрактальной размерности d_f и размерности Каплана–Йорке d_{K-Y} от амплитуды напряженности электрического поля. В работе также исследован эффект усиления входного сигнала в определенном амплитудно-частотном диапазоне вследствие синхронизации.

Синхронизация хаотических пространственно-временных структур (паттернов) в пространственно-распределенных моделях полупроводниковых гетероструктур при помощи обратной связи с запаздыванием изучается в работе [156]. В ней сравниваются различные способы управления: управление с диагональной матрицей обратных связей, глобальное управление, а также их комбинация. Исследуются две модели полупроводниковых наноструктур, представляющие интерес в настоящее время: сверхрешетка и двухбарьерный диод с резонансным туннелированием. В работе [29] получено, что качество управления

в таких системах повышается на несколько порядков с помощью подходящих фильтров и связей, которые основываются на собственных модах Флоке неустойчивых орбит. Предложено объяснение механизма, приводящего к улучшению качества управления на основе фазовой синхронизации между желаемым процессом и процессом в контуре управления.

Управление дипольными доменами. В работе [157] установлено, что воздействием внешнего высокочастотного поля можно управлять распространением дипольных доменов в GaAs/AlAs сверхрешетке. Легированная GaAs/AlAs сверхрешетка демонстрирует отрицательную дифференциальную проводимость, что приводит к распространению дипольных доменов. В зависимости от частоты внешнего воздействия, обнаруживаются различные, в том числе — и хаотические режимы распространения доменов. Показано, что частотной синхронизации (явления захвата частоты, frequency locking) можно добиться, поддерживая частоту внешнего поля в определенном диапазоне, причем с ростом амплитуды высокочастотного напряжения диапазон частот синхронизации расширяется. Вне этого диапазона получаются квазипериодические и хаотические колебания.

2.3 Химия

Хаотические колебания в химических реакциях были открыты в 1970-х гг. сначала путем моделирования, а позднее экспериментально для моделей брюсселятора при внешнем воздействии, связанных брюсселяторов и реакции Белоусова–Жаботинского. Методы управления хаосом в химических реакциях предложены в работах [80, 145, 146]. Так, в [146] изложены результаты применения пропорционального (a map based, OPF) алгоритма управления для стабилизации периодического режима реакции Белоусова–Жаботинского. Цель управления ставится либо как достижение установившегося режима реакции, т.е. как подавление хаотических колебаний, либо как возбуждение колебательного, или даже хаотического режима. Например, для процессов горения хаотическое поведение желательно, так как оно приводит к усилению перемешивания воздуха и топлива и, следовательно, к ускорению протекания процесса [57]. Во многих случаях, так как хаос приводит к лучшему перемешиванию, реакция проходит более равномерно и, следовательно, выходной продукт оказывается менее загрязненным. В работе [147] обобщаются полученные ранее результаты по предсказанию и управлению для установившихся режимов химических реакций, основанные на линеаризации простой «автокаталической» (autocatalator) модели с тремя переменными:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = \mu(\kappa + \gamma) - \alpha\beta^2 - \alpha, \\ \sigma\dot{\beta} = \alpha\beta^2 + \alpha - \beta, \\ \delta\dot{\gamma} = \beta - \gamma, \end{cases}$$

где α, β, γ — безразмерные концентрации, а $\sigma, \delta, \mu, \kappa$ — безразмерные параметры модели (при $\sigma = 0.015, \delta = 1, \mu = 0.301, \kappa = 2.5$ поведение системы хаотическое).

Следует отметить, что высказываемое в [147] мнение что предлагаемые алгоритмы (так называемые «методы управления, основанные на временных рядах») не используют модели управляемого процесса, не соответствует действительности. Предлагаемые алгоритмы (как и метод OGY [134], [6, п. 4.4]) являются частными случаями алгоритмов параметрического адаптивного управления, а модель управляемого процесса фактически присутствует в системе в виде адаптивной модели, полученной на основе текущих наблюдений.

В работе [82] предложен резонансный метод управления хаосом в хемилюминесцентной реакции Белоусова–Жаботинского с катализацией смесью церия и рутения. Управление осуществлялось изменением светового потока. Для экспериментов использовался химический реактор с непрерывным перемешиванием (CSTR). Световой поток имел вид последовательности «прямоугольных» импульсов. В результате управления с использованием «модели Монтанатора» (Montanator model) с семью переменными получена стабилизация нескольких неустойчивых периодических орбит (процессов), имеющих разные периоды². В работе [163] показана возможность стабилизации орбит периода-2 и периода-4 реакции Белоусова–Жаботинского в реакторе указанного типа. В работе [138] описываются экспериментальные результаты применения разомкнутого управления сложными, в том числе хаотическими, колебательными электрохимическими процессами. Показано, что выбором подходящей частоты изменения внешнего электрического напряжения можно не только изменить характер процесса с хаотический на периодический, но также воздействовать и на динамику регулярных колебаний. В экспериментах амплитуда входного напряжения не превосходила номинальное значение более чем на 5%, что указывает и на возможность практического применения такого «резонансного» метода управления. Возможность устранения хаоса в связанных электрохимических осцилляторах с помощью метода разомкнутого управления и метода запаздывающей обратной связи показана в работах [105, 107, 137, 136]. В работе [106] приводятся сведения об экспериментальном управлении хаосом в процессе электрохимического растворения меди в фосфорной кислоте с помощью нейронной сети. Работа [107] посвящена процессу электродиссоциации никелевых электродов в серной кислоте. Экспериментально исследовано поведение как одиночного, так и массива из шестидесяти четырех взаимосвязанных хаотических осцилляторов. На управляющий электрод подавалось внешнее гармоническое (программное) воздействие, а также воздействие через обратную связь. В работе получено, что с увеличением коэффициента обратной связи последовательно появляются стадии: несинхронизированного хаоса, нестабильных хаотических кластеров (intermittent chaotic clusters), устойчивых хаотических кластеров, устойчивых периодических кластеров, периодического синхронного процесса и устойчивого установившегося режима.

В работах [110, 111] изучалось управление непрерывной кристаллизацией двухосновного фосфида свинца через химическую реакцию. Исходная математическая модель была преобразована к логистическому уравнению, на основе которой разработан модифицированный алгоритм OGY для стабилизации цикла периода-2. Для преобразования хаотических колебаний в циклические с периодом-6 использовалось периодическое изменение расхода жидкости. В [111] приведены модельные результаты сравнения алгоритма управления с обратной связью с так называемым *алгоритмом дестохастизации*, заключающемся в периодическом внешнем воздействии на систему. Получено, что алгоритм обратной связи более целесообразен для применения, так как он обеспечивает более высокую точность.

2.4 Биология и экология

По-видимому, впервые вопрос о подавлении хаоса в экологической системе был рассмотрен еще в 1985 г. в работах [1, 2] для системы четвертого порядка, описывающей динамику

² Под периодом дискретного во времени процесса понимается число шагов между повторениями его значений. Например, говорят, что процесс $x_k, k = 1, 2, \dots$ имеет период-2, если $x_{k+2} = x_k$, но $x_{k+1} \neq x_k$ для всех k .

водной экосистемы, состоящей из двух видов микроводорослей и двух видов зоопланкто-ров. Показано, что с помощью слабого периодического воздействия на параметр системы возможно трансформировать хаотические колебания в периодические, причем величина параметра не покидает область хаотичности ни в какой момент времени. Автором работы [167] отмечается, что наличие хаоса в природных популяциях — вопрос спорный. Тем не менее, в работе показано, что даже простая линейная обратная связь (ОПФ-алгоритм) или разомкнутое управление может достаточно быстро стабилизировать динамику популяции и использоваться для контроля над паразитами, насекомыми или другими биологическими видами.

В работе [162] метод OGY и управление с прогнозированием применены к одномерной дискретной модели Рикера (Ricker), описывающей динамику одновидовой популяции и к непрерывной модели Шеффера (Scheffer) динамики планктона, имеющей порядок три.

Возможность управления популяцией мучного жука (*Tribolium castaneum*) исследуется в работе [59]. В работе приводится математическая модель в виде системы из трех детерминированных разностных уравнений, описывающих динамику популяции (так называемая LPA-модель):

$$\begin{cases} L_k &= bA_{k-1} \exp(-c_{EL}L_{k-1} - c_{EA}A_{k-1}), \\ P_k &= L_{k-1}(1 - \mu_L), \\ A_k &= P_{k-1} \exp(-c_{PA}A_{k-1}) + A_{k-1}(1 - \mu_A), \end{cases}$$

где L_k — число вскармливаемых личинок; P_k — число не вскармливаемых личинок, куколок и неполовозрелых насекомых; A_k — число готовых к размножению особей. Остальные величины — параметры. Экспоненциальные множители в правых частях описывают каннибализм среди насекомых и имеют смысл плотностей вероятности поедания одних особей другими. Дискретные моменты времени $k = 0, 1, \dots$ соответствуют моментам реального времени с интервалом в две недели. Отмечено, что данная модель прошла экспериментальную проверку и на качественном уровне хорошо описывает характерные для популяции явления: возникновение установившихся состояний, периодических, квазипериодических и хаотических колебаний, в зависимости от параметров системы. В [59] получено, что (в лабораторных условиях) малые изменения числа взрослых особей могут быть использованы для управления значительными по амплитуде флуктуациями числа насекомых.

Авторами [60] получен простой алгоритм для поддержки переходного (transient) хаоса, основанный на дискретной модели $y_{k+1} = F(y_k, u_k)$, в которой y_k есть k -й максимум (или минимум) скалярного выхода (точечное отображение дает разумное приближение для систем с сильной диссипацией). Метод применен к трем видам задач: а) исключение коллапса напряжения в электроэнергетических системах; б) сохранение видов в экологии; в) исключение нежелательных взрывных явлений в химических реакциях.

2.5 Экономика

Динамика многих экономических систем, по общему признанию экспертов, описывается нелинейными моделями и они могут обладать хаотическим поведением [124]. Задачи управления такими системами реалистичны, однако, только на микроэкономическом уровне. Разумной целью управления здесь является подавление хаоса, что приводит к большей предсказуемости бизнес-циклов. В книге [70] рассмотрено управление бизнес-циклом с исполь-

зованием непрерывного варианта модели Метслера (Metsler). На основе метода скоростного градиента получен алгоритм адаптивного управления, приводящий к удовлетворительному подавлению хаоса. Авторами [89] рассмотрена задача управления хаосом для модели микроэкономической системы, описывающей две конкурирующие фирмы, использующие различные стратегии инвестирования. Предполагается, что эти фирмы работают в одном секторе рынка и занимают там доминирующее положение. Для описания ситуаций, когда обе фирмы стараются управлять одновременно и, кроме того, действует внешнее возмущение, используется модель Беренса–Файхтингера (Behrens–Feichtinger):

$$(4) \quad \begin{cases} x_{k+1} = (1 - \alpha)x_k + a(1 + e^{-c(x_k - y_k)})^{-1}, \\ y_{k+1} = (1 - \beta)y_k + b(1 + e^{-c(x_k - y_k)})^{-1}, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, 0 < \alpha, \beta < 1$ — темпы снижения стоимости продаж при отсутствии инвестиций; параметры a, b характеризуют эффективность, или масштаб инвестиций; c — так называемая мера эластичности инвестиционной политики. Показано, что при конкуренции в управлении могут возникнуть «паразитные» колебания относительно периодической орбиты, разрушающие ожидаемый стабилизационный эффект. Для управления хаосом использован метод OGY. Показано, что если управлять будет только одна из фирм, то при соответствующем подборе параметров можно подавить хаос. Если же обе фирмы пытаются управлять рынком одновременно, то многих случаях устранить хаос не удастся. В работе [90] подобные результаты получены для алгоритма с запаздыванием в обратной связи. Интересно отметить, что уравнения (4) впервые появились в качестве модели гонки вооружений между двумя странами с асимметричной политикой в области вооружений. Попытка сопоставить процессы в хаотической модели работы [124] с реальными экономическими временными рядами представлена в работе [91], где также рассматривается модельный пример управления системой Беренса–Файхтингера по методу Пирагаса.

2.6 Медицина

Одним из наиболее захватывающих и многообещающих ранних приложений управления хаосом было изучение и лечение сердечной аритмии [76]. Создание быстродействующих кардиостимуляторов с обратной связью представлялось кардинально новым подходом в кардиологии. Однако поведение человеческого сердца оказалось более сложным, чем это представлялось десять лет назад. С тех пор было предложено несколько моделей и методов для управления хаотическими процессами сердечной деятельности. В работе [44] предложен метод, основанный на одношаговой линейной обратной связи с запаздыванием для подавления патологического ритма периода-2.

Метод управления распределенными процессами волновой неустойчивости в сердечных тканях, основанный на обратной связи с запаздыванием, предложен в работе [150]. Возможно, первые экспериментальные результаты по использованию управления в клинике относятся к лечению мерцательной аритмии [61]. Исследованиями было охвачено 25 пациентов. Четырехполюсный катетер с электродами вводился через бедренную вену и устанавливался у правого бокового предсердия пациента. Фибрилляции возбуждались с помощью частого стимулирования (rapid pacing) с частотой 50 Гц в течение 1–2 секунд. Затем наступала фаза обучения в ходе которой определялась (неустойчивая) периодическая орбита, подлежащая стабилизации. Целью управления была стабилизация интервалов между сокращениями сердечной мышцы. Для этого использовался алгоритм типа OGY. Как

указано в [61], среди 25 пациентов отличное качество управления хаосом наблюдалось для девяти пациентов (36 %), частичное управление отмечено у десяти пациентов (40 %), и не удалось достичь управления у оставшихся шести пациентов (6 %).

Другая задача из области медицины — снижение уровня хаотических колебаний при сезонных эпидемиях исследована в работе [79]. Для описания процесса использована классическая эпидемиологическая модель, в которой в качестве управления взят темп вакцинации. Показано, что хаос может быть устранен, если использовать постоянный и достаточно высокий темп вакцинации. Авторы работы утверждают, что в качестве цели управления более подходящей является снижение, а не полное подавление хаотичности. В работе установлена эффективность ПИД-законов управления, а также их робастность по отношению к неточности параметров модели.

В работе [88], носящей реферативный характер, отмечается, что методы теории хаоса могут помочь справиться с трудностями управления содержанием сахара в крови при диабете, привести к правильному подбору индивидуальных процедур лечения пациентов и даже, в перспективе, — к автоматизации этого процесса. В [88] рассматриваются возможные методы моделирования хаотических колебаний содержания сахара и обсуждаются пути уменьшения их размаха.

Результаты экспериментов по управлению хаосом в нейронных сетях животных приведены в работе [52]. В частности, в срезах гиппокампа при действии постоянного электрического поля небольшой амплитуды наблюдалось подавление эпилептиформной активности. Автором сообщается также об экспериментах по возбуждению стохастического резонанса в мозге млекопитающих под воздействием модулированного электрического поля и об исследовании алгоритма с обратной связью для подавления колебаний активности нервной сети, свойственных эпилептическим припадкам.

Модель поведения совокупности нефронов — функциональных структурных единиц почек — рассматривается в [164]. В работе приводится система дифференциальных уравнений, описывающих давления и потоки жидкости в отдельном нефроне. На основе этой модели проводится анализ колебательных (в том числе — хаотических) режимов, условий их возникновения и синхронизации. В работе приведены и результаты экспериментальных исследований, которые находятся в хорошем соответствии с данными, полученными численно.

3 Технические приложения

3.1 Механические системы

Во многих технических приложениях возникают нерегулярные колебания механических систем вследствие вращения несбалансированных роторов, вибраций в вынесенных конструкциях и т.д. При введении управления типичной целью управления является подавление нежелательных колебаний. Такого рода задачи часто решаются методами линейной теории управления. Имеются также сведения об успешных применениях нелинейного управления, некоторые из которых описаны ниже.

Управление виброформирователями. Производство алюминия происходит путем электролиза глинозема в электролитических ваннах. В качестве анода используются угле-

родные блоки, производство которых является важной стадией технологического процесса. При изготовлении анодов используется нефтяной кокс, отходы от использованных анодов, и связующая смола. Кокс и отходный материал измельчаются до требуемого размера, перемешиваются и нагреваются. К этой разогретой смеси добавляется смола и после дальнейшего перемешивания производится паста, которая используется затем для изготовления блоков массой $1 \div 1.2$ тонны. Эта операция выполняется с помощью вибрационных уплотнителей (виброформирователей). Затем блоки запекаются при температуре около 1100°C . Качество анодов весьма существенно сказывается на процессе восстановления. Низкая плотность анодов приводит к снижению его эффективности, а высокая проницаемость их материала повышает испускание углерода в воздух и углекислого газа в восстановительную ячейку. Кроме того, разрушения в анодах повышают их электрическое сопротивление. Чтобы избежать этих недостатков, аноды должны состоять из однородного высокоплотного материала. Вибрационное уплотнение значительно более эффективно, чем простое сжатие. Оно способствует хорошему перемешиванию материала, изготовлению более плотных блоков и, помимо всего, приводит к устранению воздушных пузырьков, снижающих прочность анодных блоков. Из практики известно, что регулярные колебания виброформирователя приводят к изготовлению низкокачественных анодов. Использование, однако, слишком нерегулярных колебаний большой амплитуды может привести к чрезмерным скачкам толкателя, и, в свою очередь, — к немедленному разрушению анода. В работе [140] предложен метод управления виброформирователем, направленный на поддержание заданной степени нерегулярности путем нерегулярного переключения между несколькими периодическими режимами установки. Виброформирователь является разновидностью ударного (impact) осциллятора и описывается моделью прыгающего мяча (bouncing ball):

$$(5) \quad -0.5g \cdot (t - t_k)^2 + v_k \cdot (t - t_k) + a \sin(\omega t_k) = a \sin(\omega t),$$

$$(6) \quad v_{k+1} = \alpha(v_k - g(t_{k+1} - t_k)) + a(1 + \alpha)\omega \cos(\omega t_{k+1}).$$

В модели (5),(6) $x(t)$ — положение толкателя, $y(t)$ — вертикальное перемещение платформы виброформирователя считающееся гармоническим, $y(t) = a \sin(\omega t)$. Коэффициент восстановления $\alpha \in (0, 1]$ описывает рассеяние энергии при ударе и зависит от свойств толкателя и материала анода ($\alpha = 1$ соответствует абсолютно упругому столкновению). Моменты времени t_k , в которые выполнено $x = y$, являются моментами удара. Через v_k обозначена скорость толкателя сразу после момента t_k (упрощенно принято, что ударное соприкосновение проходит мгновенно). Уравнение (5) разрешается относительно t , в результате чего по v_k определяется момент следующего удара t_{k+1} . После этого из (6) находится значение v_{k+1} скорости после следующего толчка.

Известно, что система (5), (6) обладает хаотическими свойствами в широком диапазоне изменения параметров. Поскольку как регулярное, так и неконтролируемое поведение одинаково нежелательны, в [140] предложено идентифицировать и стабилизировать некоторые периодические движения, вложенные в хаотический режим, а затем переходить с одного из них на другой нерегулярным образом для повышения качества анодов. Для этого предложено применять линейный закон управления, использующий измерения скорости толкателя и предсказания момента следующего толчка, чтобы стабилизировать неустойчивое q -периодическое движение. В качестве управляющей переменной предложено использовать частоту привода вращения виброформирователя. Для ускорения перехода с режима на режим, используются предложенный ранее метод нацеливания (targeting)[141, 139].

Управление микрокантилеверами в атомно-силовых микроскопах. В рабо-

тах [35, 36] исследована динамика микрокантилеверов, которые используются в атомно-силовых микроскопах, а также предлагается метод управления такими системами. Микрокантилевер приводится в вибрационное движение с помощью синусоидального входного сигнала, а его смещение измеряется оптической системой. Динамика вынужденного движения исследуется методом Мельникова, который позволяет найти в пространстве физических параметров системы область, где возможно хаотическое движение. Затем находится функция Мельникова для замкнутой системы, зависящая от параметров ПД-регулятора. В результате определяются значения параметров, при которых хаотическое движение исключается.

Стабилизация колебаний крана. Работа [104] посвящена задаче подавления колебаний судового крана. Исследуется влияние возмущений, в качестве которых рассматривается хаотический процесс, доминирующая частота которого находится вблизи частот собственных колебаний системы. Для гашения колебаний предложен и исследован нечеткий (fuzzy) регулятор. В качестве управляющего воздействия используется длина троса. Результаты исследований показывают значительное снижение размаха колебаний по сравнению с неуправляемой системой.

Стабилизация колебаний судна. В статье [130] рассматривается бортовая качка притопленного судна. Из-за наличия большого количества воды внутри корпуса, возникают сложные взаимосвязанные колебания судна и находящейся в нем жидкости, сходные с колебаниями связанных осцилляторов. Картина усложняется из-за присутствия внешних квазипериодических возмущений. Для описания динамики крена при волнении моря в работе использована модель четвертого порядка. В предыдущих работах, на основе численных исследований и лабораторных экспериментов, авторами [130] показана возможность появления в системе сложных хаотических колебаний большой амплитуды. В [130] ставится задача приведения системы к регулярным колебаниям малой амплитуды. Такая задача решается методом обратной связи с запаздыванием (метод Пирагаса). Для этого в правые части уравнений системы вводятся слагаемые, пропорциональные разностям текущих и запаздывающих значений угловых скоростей крена судна и наклона поверхности воды в нем. Показано, что соответствующим выбором времени запаздывания и коэффициентов обратной связи можно добиться сведения хаотического процесса к периодическому с малой амплитудой.

Подавление хаотических колебаний датчика скорости. В работе [78] исследуется поведение механического тахометра, подверженного дополнительным вибрациям, действующим вдоль оси вращения. Вибрации основания описываются гармоническими колебаниями $A \sin \omega t$. Представлена математическая модель системы, свойства которой исследованы различными аналитическими и численными методами. Построены бифуркационные диаграммы, показывающие, что при росте амплитуды вибраций колебания из периодических становятся хаотическими. Получены также границы бифуркаций по коэффициенту демпфирования и частоте вибраций. Для повышения качества работы системы и исключения в ней хаотических явлений в [78] предложено вводить управление, преобразующее движение из хаотического в периодическое. Рассмотрены различные способы управления: введение дополнительного постоянного или периодического момента, управление с запаздыванием в обратной связи, адаптивное управление, релейное управление со скользящим режимом (bang-bang control), оптимальное управление и введение дополнительного импульсного воздействия. В работе приводятся многочисленные графики результатов моделирования исходной и управляемой систем, демонстрирующие применимость предложенных методов.

3.2 Космическая техника

В последнее время появилось довольно много публикаций по исследованию хаотических угловых колебаний космических аппаратов и управлению ими. Помимо традиционных задач управления космическими конструкциями, в которых рассматриваются упругие деформации их элементов (см., напр. [9]), возникают и другие задачи, в которых космический аппарат рассматривается как твердое тело, а сложные (в том числе — хаотические) колебания являются следствием нелинейности его динамики.

В работах [21, 127, 128] рассматривается вращающийся спутник с периферическим демпфером нутационных колебаний. Система состоит из твердого тела, вращающегося относительно некоторой главной оси, и поглотителя энергии в виде периферического пружинного инерционного демпфера. Кроме того, малые реактивные двигатели могут развивать управляющий момент относительно указанной оси. На спутник действует также переменный момент возмущений, который считается гармоническим. На практике такой момент может возникнуть, например, при изменении скорости вращения несбалансированного ротора, размещенного на спутнике. В статьях [127, 128] на основе метода функций Ляпунова и эвристических соображений синтезируется алгоритм управления, предназначенный для стабилизации требуемой скорости вращения спутника при отсутствии нутации и прецессии. В работе [21] рассматривается та же задача, но синтез закона управления выполнен на основе метода скоростного градиента с использованием энергетической целевой функции. Показано, что такой подход позволяет достичь цели с меньшим уровнем управления.

В работах [95, 77, 116] исследуется возможность возникновения хаотического движения в *гиростате* и методы управления им. Гиростат представляет собой тело, имеющее три вращательные степени свободы, внутри которого имеется один или несколько маховиков. Исследования динамики гиростата и задач управления им имеют практическую ценность, так как подобными моделями описываются спутники, совершающие угловое вращательное движение и взаимное вращение одних частей относительно других (*dual-spin spacecraft*), например — спутники с двигателями-маховиками или вращающиеся спутники со стабилизированной платформой.

Работа [77] посвящена анализу, управлению и синхронизации хаотических процессов в гиростате, подверженном внешним возмущениям. Рассматривается динамика гиростата, имеющего три маховика с взаимно ортогональными осями вращения. Маховики приводятся во вращение электрическими двигателями. В работе считается, что на вращательный момент одного из роторов накладываются небольшие гармонические возмущения (*sinusoidal ripple*). Силу тока в двигателе одного из маховиков можно изменять, создавая тем самым управляющее воздействие. Вектор состояния рассматриваемой системы состоит из угловых скоростей вращения спутника в осях связанной системы координат и силы тока в управляющем двигателе. С точки зрения авторов [77], исследование хаотических движений в гиростате имеет практическую ценность, в частности, потому, что гиростат может использоваться в качестве модели ракеты. Возбуждение (*anticontrol*) углового хаотического движения ракеты при атаке препятствует выполнению перехвата, так как при этом получается трудно предсказуемая траектория движения. Как и в работе [78], в данной статье приводятся результаты применения различных методов для анализа неуправляемого движения объекта. Анализ показывает, что с уменьшением частоты внешнего возмущения угловое движение гиростата может стать хаотическим. Для изменения характера колебаний системы — обеспечения периодического движения вместо хаотического, в работе предложены

и исследованы алгоритмы адаптивного управления и управления с запаздыванием в обратной связи. Кроме того, исследуется возможность «хаотизации» (anticontrol of chaos) с помощью произвольно малого управления. С этой целью предлагается применять малое постоянное или периодическое управляющее воздействие. Далее, в работе исследуется синхронизация хаотических процессов в двух системах указанного вида. Исследована синхронизация с линейной, синусоидальной, экспоненциальной и адаптивной обратными связями. Заметим, что в статье не приводится содержательной трактовки задачи синхронизации для рассматриваемого типа систем.

В работах [95, 116] рассматриваются хаотические колебания гиростата с изменяющимся моментом инерции, но неизменным положением центра масс. Рассматриваются периодические изменения момента инерции. С использованием метода Мельникова доказано, что при отсутствии внешних воздействий и вращения ротора система обладает хаотическим поведением в смысле наличия у нее «подков Смейла» (Smale's horseshoes). Стабилизация осуществляется вращением ротора относительно одной из главных осей инерции платформы.

Возможность возникновения хаотических угловых колебаний спутника и их подавления рассматривается также в работе [51]. Исследуется движение спутника при одновременном воздействии гравитационного и магнитного полей Земли. Рассматривается спутник, имеющий собственное постоянное магнитное поле. Для угла либрации $\varphi(t)$ спутника в плоскости орбиты при некоторых допущениях получена следующая математическая модель:

$$(7) \quad C\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + 3\omega_c^2(B - A)\sin\varphi\cos\varphi + \mu_m i I r^{-3}(2\sin\varphi\sin\omega_c t + \cos\varphi\cos\omega_c t) = M_c(t).$$

Здесь c — коэффициент собственного демпфирования спутника; ω_c — значение угловой скорости движения спутника по орбите; A, B — его главные моменты инерции ($B > A$); μ_m — магнитная постоянная; I — величина магнитного момента спутника; r, i — радиус и наклонение орбиты; $M_c(t)$ — значение управляющего момента. На основе метода Мельникова и численного анализа в работе показано, что в некоторой области параметров угловое движение спутника в отсутствие управления ($M_c \equiv 0$) имеет хаотический характер. Для получения желаемого процесса $\varphi(t)$ на основе метода линеаризации обратной связью [6, п. 4.2] строится закон формирования управляющего момента M_c по выходу и производной. Показано, что в системе с обратной связью обеспечивается не только подавление хаотических колебаний, но и желаемый вид процесса $\varphi(t)$ (приведены численные примеры стабилизации угла φ и гармонических колебаний с заданной частотой). Заметим, что с точки зрения теории управления решение представляется довольно тривиальным — управляющий момент выбирается так, чтобы скомпенсировать нелинейное (по ошибке управления) слагаемое в правой части (7) и ввести пропорциональное и дифференциальное слагаемые.

3.3 Электрические и электронные системы

В последние годы хаотические процессы были обнаружены и во многих электрических и электронных устройствах, и для них разработаны методы управления. Заметим, что в электротехнике выводы относительно возможности появления хаотических процессов в таких системах, анализ бифуркаций и определение параметров колебаний, могут быть сравнительно просто проверены для реально существующих систем. Неудивительно поэтому, что известные «классические» генераторы хаотических колебаний (системы Чуа, Мацумото, Лоренца, Рёсслера и др.) воплощены в виде электротехнических устройств.

Среди практических применений управления хаотическими процессами в данной области, следует отметить работы по управлению вольтодобавочными преобразователями (buck converter) [42], двигателями постоянного тока [48], системами сегнетоэлектриков [83], электростатическими преобразователями [113], преобразователями постоянного тока [66, 115, 149], энергетическими установками [165, 166] и другие.

Рассмотрим некоторые примеры.

В работе [170] рассматривается метод управления системой Чуа с адаптивной настройкой коэффициента усиления и предложена его модификация. Для проведения экспериментальных исследований авторами [170] разработан аналого-цифровой лабораторный макет, содержащий электронную цепь Чуа с гиратором в качестве индуктивного элемента и управляющий компьютер. Получено, что при отклонении величины емкости на 50% и индуктивности на 25% от номинальных значений, качество слежения за командным сигналом остается приемлемым. Макет используется также для экспериментов по передаче информации модуляцией хаотического сигнала.

В работе [63] рассматриваются автомодуляционные режимы, возникающие в лампах обратной волны (ЛОВ). Такие лампы широко применяются для проведения физических экспериментов в релятивистской электронике и могут использоваться для генерции многочастотных, в том числе хаотических, сигналов. С точки зрения динамики они представляют собой распределенные автоколебательные системы. Режимы автомодуляции ранее были исследованы теоретически и экспериментально в работе [8] для мощной ЛОВ с электродинамической системой в виде слабофривированного волновода. В [8] получено, что в зависимости от силы тока в ЛОВ наблюдаются режимы стационарной генерации, периодической синусоидальной и хаотической автомодуляции. Как отмечено в [63], что автомодуляция желательна, когда требуется получить многомодовые, хаотические колебания, но она оказывает вредное воздействие, если требуется сосредоточить мощность выходного сигнала на определенной частоте. Для подавления автомодуляции в [63] рассматривается использование обратной связи с запаздыванием. Для этого предлагается управлять интенсивностью входного пучка электронов в зависимости от значения сигнала на выходе. Высокочастотный выходной сигнал после выпрямления и фильтрации проходит через две ветви, в одну из которых вводится запаздывание, составляющее приблизительно половину периода автомодуляции. Затем оба сигнала поступают на дифференциальный усилитель, выход которого задает смещение напряжения на управляющей сетке электронной пушки, и тем самым управляет силой тока входного пучка ЛОВ. Эффективность предложенной схемы управления подтверждается компьютерным моделированием.

В работе [48] описывается экспериментальная установка, построенная на двигателе постоянного тока. Установка содержит силовой электронный прерыватель, пару генератор-двигатель и аналоговый регулятор. Моментом нагрузки двигателя можно управлять, через ток нагрузки генератора. Требуется поддерживать заданную скорость вращения ротора. С этой целью в регуляторе реализуется пропорциональный закон обратной связи по скорости. Теоретический анализ и экспериментальные результаты показывают, что при большом значении коэффициента усиления, а также при большом напряжении источника питания якоря двигателя, поведение системы становится хаотическим. Для устранения этого явления в [48] использована дополнительная обратная связь с запаздыванием. Показано, что варьируя коэффициент этой обратной связи при постоянном запаздывании, можно перевести колебания системы из хаотических в регулярные с периодом-1 (одномодовый режим)

или с периодом-2 (субгармонические колебания).

В статье [117] исследуется применение *хаотической широтно-импульсной модуляции* для устранения перемежающихся темных и светлых полос, видимых на флуоресцентных лампах. В качестве генератора хаотического управляющего сигнала использована цепь Чуа. Выходное напряжение цепи служит для изменения длительности импульса (которая номинально составляет половину периода). Сигнал, состоящий из постоянной и хаотической составляющих, поступает на широтно-импульсный модулятор, который управляет работой ключей в цепи питания. Преимуществом данного метода по сравнению с известными является то, что здесь требуется изменение только схемы цепи модуляции, а не цепи питания. В [117] приводятся и результаты экспериментального исследования предложенного метода.

Управление *магнитным подвесом* (левитацией) рассматривается в работе [100]. Авторами предложено использовать релейно-логический закон управления, в котором переключение управляющего воздействия (в данном случае — включение и выключение электромагнита) производится в зависимости от предыстории, т. е. от того, в какой последовательности телом пересекаются заданные пороговые уровни. При этом используются только датчики высоты положения тела. Такой подход позволяет избежать явного измерения скорости движения тела и, надо сказать, он не нов для разработчиков систем управления. Модель второго порядка исследована аналитически, а влияние инерционности катушки индуктивности изучено компьютерным моделированием. Численно найдено, что в установившемся режиме в системе наступают хаотические колебания. Размер хаотического аттрактора (по вертикальному перемещению) оказался равным приблизительно в четыре раза большим расстояния между уровнями переключения. Полученные результаты подтверждены экспериментально на лабораторной установке. Перемещения тела фиксировались оптическим датчиком, что позволило снять спектральные характеристики установившихся колебаний. Вид полученных характеристик свойственен хаотическим процессам.

В работе [177] исследуется поведение электромеханической системы, состоящей из взаимодействующих электрического и механического осцилляторов. Связь между обеими частями осуществляется электромагнитной силой, создаваемой постоянным магнитом. В результате появляется сила Лапласа, действующая на механическую часть системы, и электродвижущая лоренцова сила в электрической цепи. Модели такого рода характерны для *электромеханических преобразователей*, например — репродукторов. В [177] рассматривается система с нелинейной электрической частью, которая описывается уравнением Дуффинга (Duffing). Для этого используется нелинейный конденсатор, напряжение V_c на обкладках которого имеет кубическую зависимость от величины заряда q : $V_c = q/C_0 + \alpha q^3$, где C_0 есть линейная часть емкостной характеристики, а параметр α определяет нелинейность конденсатора и зависит от его типа. Механическая часть является линейной колебательной системой. Такой преобразователь описывается уравнениями

$$\begin{cases} L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C_0 + \alpha q^3 + lB\dot{z} = v_0 \cos \Omega t, \\ m\ddot{z} + \rho z + kz - lB\dot{q} = 0, \end{cases}$$

где L, R — индуктивность и активное сопротивление в электрической части; v_0, Ω — амплитуда и частота внешнего гармонического напряжения; l — протяженность участка взаимодействия магнитного поля напряженностью B с двумя подвижными стержнями, на которых крепится тело массы m ; k — коэффициент упругости пружины, ρ — коэффициент вязкого трения, \dot{q} — сила тока в электрической цепи. Для полученной модели в работе

выполнен теоретический анализ устойчивости колебаний на основе метода гармонического баланса и теории Флоке. Получены также значения ляпуновских экспонент и построены бифуркационные диаграммы, отражающие переход от регулярного поведения к хаотическому. В [177] исследуется задача подавления хаотических колебаний, либо сведения их к регулярным колебаниям с помощью регулятора в обратной связи. Предложено использовать векторное управление по отклонениям заряда конденсатора и перемещений тела относительно заданных значений. Компонентами управления являются дополнительное напряжение в электрической части системы и дополнительная сила, приложенная к грузу. Для выбора параметров регулятора используется линейное приближение. Численно продемонстрирован переход от хаотического режима колебаний к периодическому.

«Коллапсу напряжения» (voltage collapse) в электрических генераторах посвящена работа [84]. Это явление заключается в том, что последовательность эффектов, вызванных неустойчивостью напряжения приводит, в итоге, к недопустимо низкому его уровню в значительной части энергетической системы. Коллапс напряжения в последние годы неоднократно происходил в крупных энергосистемах нескольких стран вследствие снижения нагрузки в связи с отключением большого числа потребителей. В [84] рассматривается трехшинная (three-bus) энергетическая система малой мощности. В этой системе имеется два генератора, питающие нагрузку, которая представлена параллельно соединенными индуктивным, емкостным и активным элементами. Показано, что с ростом импеданса первого генератора, после точки бифуркации Хопфа через удвоение периода возникает хаотический режим. Для управления (стабилизации, подавления) хаотическими колебаниями используется глобальная линеаризация обратной связью (см. [5, п. 4.2]). Система управления имеет два контура обратной связи: внутренний контур обеспечивает линеаризацию, а внешний — управление. Во внешнем контуре используется ПИ-регулятор. Управляющей переменной является величина импеданса. Приводятся результаты сравнения данного метода и управления с нелинейной обратной связью.

Синхронизация электронных цепей, обладающих хаотическим поведением, рассмотрена в работе [37]. Исследуются цепи, описываемые так называемым «уравнением рывка» (jerk equation), в котором задается производная от ускорения некоторой переменной $x(t)$. В абстрактной форме записи это уравнение имеет вид $x^{(3)} = -Ax^{(2)} - \dot{x} + G(x)$, где A — постоянный параметр, $G(\cdot)$ — нелинейная функция. В [37] рассматриваются электрические цепи с кусочно-линейной функцией $G(\cdot)$, для которых возникают хаотические колебания. Далее в работе на примере линейных систем второго порядка излагается идея наблюдателей состояния, которая затем применяется для синхронизации нелинейных цепей. Работоспособность предложенного метода исследована численным моделированием.

3.4 Системы связи

Обилие работ, посвященных возможности применения хаотических процессов для передачи сообщений позволяет говорить о сложившемся направлении как в области телекоммуникаций, так и в области исследований динамического хаоса. Этим задачам посвящены специальные выпуски журналов IEEE Transactions on Circuits and Systems, International Journal of Circuit Theory and Applications, обзоры и монографии [10, 12, 24, 26, 93, 94, 96, 101, 112, 178].

В работе [26] указаны три отличительные черты хаотических процессов, благодаря которым перспективно применение динамического хаоса для передачи информации:

1. *Широкополосность.* Хаотические сигналы непериодичны и обладают непрерывным спектром. Для многих типов хаотических сигналов этот спектр занимает весьма широкую полосу и, кроме того, вид спектральной характеристики можно задавать. В системах связи широкополосные сигналы используются для борьбы с искажениями в каналах распространения сигнала, в частности, с такими эффектами, как затухание сигнала в некоторой полосе частот (фединг) или с узкополосными возмущениями. Таким образом, хаотические сигналы потенциально применимы для систем связи, использующих широкий диапазон частот (spread-spectrum communications).
2. *Сложность.* Хаотические сигналы имеют сложную структуру и весьма нерегулярны. Один и тот же хаотический генератор может создавать совершенно разные процессы при весьма незначительном изменении начальных условий. Это значительно затрудняет определение структуры генератора и предсказание процесса на какое ни будь длительное время. Сигналы сложной формы и непредсказуемого поведения являются классическими видами сигналов, используемых в криптографии, что дает еще одну возможность применения хаоса.
3. *Ортогональность.* В силу нерегулярности хаотических сигналов, их автокорреляционная функция обычно весьма быстро затухает. Поэтому сигналы от нескольких генераторов вполне можно считать некоррелированными, ортогональными. Это свойство указывает на применимость хаотических сигналов для многопользовательских систем связи, в которых один и тот же диапазон частот используется несколькими пользователями одновременно.

Исследования в области применения хаоса в системах связи открывают широкие возможности для практических применений в таких направлениях как: синхронизация приемника и передатчика [7, 11, 53, 54, 109, 142]; маскировка и восстановление сообщений [38]; фильтрация шумов [152]; восстановление информационных сигналов [125], а также разработка алгоритмов кодирования – декодирования, позволяющих представить произвольное цифровое сообщение (digital message) через символическую динамику хаотической системы [38, 39, 125, 126].

В работе [40] приводится классификация динамических систем с точки зрения возможности их использования в качестве источников хаотического сигнала, содержащего закодированную информацию, который может быть передан и подвергнут дешифрованию в приемнике с малыми искажениями. Основной результат работы состоит в том, что передача информации с очень малой вероятностью ошибки может быть выполнена в том случае, если скорость генерирования информации хаотической системой, т. е. *топологическая энтропия* системы не меньше, чем скорость выработки информации источником сообщения (т. е. *шенноновской энтропии*) за вычетом условной энтропии, вызванной ограничениями в канале связи (например, такими, как шумовые искажения в канале). Динамические системы, у которых топологическая энтропия совпадает с шенноновской называются авторами *оптимальными кодирующими системами* (optimal encoder).

Многие статьи посвящены передаче сообщений с помощью модулированного хаотического сигнала. Такой способ модуляции имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционно используемой модуляцией гармонического сигнала. Действительно [10], если в случае гармонических сигналов управляемых характеристик всего три (амплитуда, фаза и частота), то в случае хаотических колебаний даже небольшое изменение параметра дает надеж-

но фиксируемое изменение характера колебаний. Это означает, что у источников хаоса с изменяемыми параметрами имеется широкий набор схем ввода информационного сигнала в хаотический (т. е. модуляции хаотического сигнала информационным). Кроме того, хаотические сигналы принципиально являются широкополосными. В системах связи широкая полоса частот несущих сигналов используется как для увеличения скорости передачи информации, так и для повышения устойчивости работы систем при наличии возмущений. Шумоподобность и самосинхронизируемость систем, основанных на хаосе, дают им потенциальные преимущества и над традиционными системами с расширением спектра, базирующимися на псевдослучайных последовательностях.

Описание различных методов передачи информации с использованием синхронизации хаотических систем дано в монографии [12]. Рассмотрены такие методы как (а) хаотическая маскировка, (б) переключение хаотических режимов, (с) нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому, (д) использование структуры фазовой автоподстройки (ФАП) и (е) использование методов адаптивного приема. На основе сравнительного анализа этих схем авторами [12] сделан вывод о преимуществах схемы с нелинейным подмешиванием, предложенной в [7], которая взята в качестве базовой для исследований. В [12] приводятся разнообразные результаты численных исследований и лабораторных экспериментов, показывающие принципиальную возможность использования данного метода для передачи информации. Отмечены и основные сложности, возникающие при практической реализации: это расстройка элементов передатчика и приемника, которая играет основную роль в проводной связи, и, кроме этого, искажения сигнала в канале связи при беспроводной передаче информации. Авторами [12] делается вывод, что хотя практическое использование хаотических сигналов продолжает сталкиваться с целым рядом проблем, «эпоха широкого применения динамического хаоса уже на старте».

Рассмотрим подробнее некоторые схемы применения хаоса для передачи сообщений.

К первым и, пожалуй, наиболее часто цитируемым публикациям по передаче сообщений с помощью хаотических сигналов относятся статьи [53, 54]. В этих статьях передатчик строится как система Лоренца, уравнения которой после масштабирования приводятся к виду

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{u} = \sigma(v - u), \\ \dot{v} = ru - v - 20uw, \\ \dot{w} = 5uv - bw. \end{cases}$$

В соответствии с (8) построена аналоговая электронная цепь, имеющая параметры $\sigma = 16$, $r = 45.6$, $b = 4.0$ (переменные u , v , w отвечают напряжениям на выходах операционных усилителей).

Уравнения приемника взяты в виде

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{u}_s = \sigma(v_s - u_s), \\ \dot{v}_s = ru - v_s - 20uw_s, \\ \dot{w}_s = 5uv_s - bw_s. \end{cases}$$

Уравнения (9) похожи на (8), за исключением того, что правая часть (9) зависит не от «своей» переменной состояния u_s , а от переменной u , которая таким образом может

рассматриваться как поступающий на приемник выходной сигнал передатчика. Методом функций Ляпунова в работах [53, 54] показано, что системы (8) и (9) синхронизируются, т. е. невязка между их соответствующими переменными состояния асимптотически стремится к нулю. Другими словами, (9) является асимптотическим наблюдателем для (8). Для передачи двоичного сигнала коэффициент b передатчика (8) изменялся, принимая значение $b = 4.4$, соответствующее двоичной «единице», тогда как исходное значение $b = 4.0$ означало двоичный «ноль». При изменении величины b в (8) до $b = 4.4$ в системе (9) резко возрастает уровень сигнала рассогласования $e = u - u_s$ (так как параметр b наблюдателя (9) отличается от значения b в системе (8)). Усреднением $e^2(t)$ определялось, какой из сигналов был передан.

В работе [54] продемонстрирована и возможность применения хаоса для защиты информации. Предложенный там подход известен под названием «хаотического маскирования» (chaotic masking) и состоит в том, что в передатчике к информационному (полезному) сигналу добавляется хаотический, а в приемнике происходит восстановление полезного сигнала из смеси. В работе [54] для выделения полезного сигнала использовано свойство робастности процесса синхронизации систем (9), (8). Система (9) может, тем самым, рассматриваться как фильтр, настроенным, нестрого говоря, в резонанс к хаотическому генератору (8). Поскольку полезный сигнал $m(t)$ имеет принципиально другую форму, чем хаотический, его можно восстановить, подавая на вход приемника (9) смешанный сигнал $s(t) = m(t) + u(t)$, а затем на выходе приемника восстановить по оценке $u_r(t)$ переменной $u(t)$ по формуле $\hat{m}(t) = s(t) - u_r(t)$.

Процесс восстановления приемником передаваемого сообщения на основе синхронизации имеет много общего с известным в теории управления оцениванием состояния объекта (в данном контексте — передатчика) с помощью наблюдающего устройства (которое для данных задач реализуется в приемнике). На основе такого подхода возникло целое направление исследований: «наблюдательный подход» (observer-based approach) к хаотической синхронизации; в качестве примера можно привести работы [28, 121, 132, 133]. В отличие от хорошо известной задачи оценивания состояния линейных систем, при построении наблюдателей для хаотических процессов приходится иметь дело с существенно нелинейными источниками сигнала, что вызывает значительные сложности [121, 133].

Более сложный, но потенциально более гибкий способ восстановления сообщения по модулированному хаотическому сигналу связан с применением методов адаптации, в частности — с применением адаптивных наблюдателей [71]. В указанной работе рассматривается задача синхронизации двух нелинейных систем (в данном контексте — приемника и передатчика) в условиях неполноты измерений и при неполной информации о параметрах источника. Модулируемые (информационные) параметры вводятся в модель линейно.

Управляемый хаотический генератор модулированного сигнала задается уравнениями состояния в форме Лурье:

$$(10) \quad \dot{x}_d = Ax_d + \varphi_0(y_d) + B \sum_{i=1}^m \theta_i \varphi_i(y_d), \quad y_d = Cx_d$$

где $x_d \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния модулятора, $y_d \in \mathbb{R}^l$ — вектор выходов (передаваемых сигналов), $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_m]^T$ — вектор параметров модулятора, содержащий информацию о передаваемом сообщении. Нелинейности $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m$, матрицы A, C и вектор B считаются известными при синтезе приемника (демодулятора).

В работе [71] предложен демодулятор, основанный на пассивации. Этот демодулятор является разновидностью адаптивного наблюдателя и при известных A, B, C описывается уравнениями:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \varphi_0(y_r) + B \left(\sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i \varphi_i(y_r) + \hat{\theta}_0 G(y_r - y) \right), \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

$$(12) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = \psi_i(y_r, y), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}$, $[\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_m(t)]^T$ — вектор оценок параметров, и $G \in \mathbb{R}^l$ — вектор весовых коэффициентов. Алгоритм адаптации (12) получается на основе стандартного применения метода скоростного градиента [15] и имеет вид:

$$(13) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i(y - y_r)\varphi_i(y_r), \quad i = 1, \dots, m, \quad \dot{\hat{\theta}}_0 = -\gamma_0(y - y_r)^2,$$

где γ_i , ($i = 0, 1, \dots, m$) — положительные коэффициенты усиления алгоритма. При наличии помех в канале связи алгоритм (13) можно регуляризовать (робастифицировать) введением параметрической обратной связи или зоны нечувствительности.

Свойства алгоритма (13) и модельные примеры передачи сообщений с помощью управляемой системы Чуа описаны в работах [4, 5, 31, 32, 71, 72]. Развитие последнего подхода связано с распространением методов синтеза адаптивных наблюдателей на непассивируемые системы и изложено в [73], где предложено два варианта методов построения адаптивных наблюдателей и продемонстрирована возможность их применения для передачи сообщений. В работе [67] для синтеза адаптивного наблюдателя используется метод функций Ляпунова и лемма Якубовича–Калмана. Приведены иллюстративные численные примеры передачи информации модуляцией параметров систем Лоренца и Чуа. Другой подход, основанный на идентификации параметров передатчика по дискретной модели, изложен в работе [34].

Вопросы робастной синхронизации хаотических систем и ее возможное применение для передачи информации обсуждаются в работе [68]. Отмечено, что их изучение важно, с одной стороны, чтобы удостовериться в уровне скрытности передачи сообщений, с другой стороны — чтобы проверить, насколько возможно восстановление информационного сигнала при несоответствии между реальными и расчетными моделями устройств системы связи. Как и выше, в [68] используются наблюдатели состояния.

В работах [39, 126] рассматривается применение методов управления хаотическими процессами для кодирования сообщений в канале связи. Такое кодирование состоит в сознательном введении избыточности в передаваемом сообщении таким образом, чтобы в приемнике можно было восстановить сообщение, а также скорректировать возникшие в канале ошибки. Заметим, что под *управлением* здесь понимается возможность такого воздействия на систему, чтобы она генерировала содержащую сообщение последовательность символов, вместо псевдослучайной последовательности, которая порождается неуправляемой системой. При этом поведение системы должно в целом оставаться хаотическим. Пример реализации системы связи с хаотической несущей приведен в работе [25].

Ряд исследований посвящен использованию для передачи сообщений оптического (лазерного) канала связи. Так, в работе [17] обсуждается возможность построения оптического

информационного канала на двух синхронных CO_2 лазерах с периодической накачкой активной среды. При частотах генерации накачки вблизи релаксационной частоты системы лазер генерирует хаотические импульсы, информация в которые вводится через амплитудную модуляцию. Второй лазер («приёмный») управляется инъекцией излучения от передающего лазера. Выходное излучение используется для восстановления модулирующего сигнала. Экспериментальная установка содержит два Nd:YVO_4 кристаллических (microchip) лазера с периодической накачкой, для которой используются лазерные диоды. Для внешней модуляции выходного излучения лазера использован акустико-оптический модулятор с частотой модуляции 4 МГц и глубиной менее 0.2 %. Передача единицы соответствовала модуляции выходного излучения, а отсутствие модуляции — передаче нуля. Частота изменения двоичного сигнала в экспериментах равнялась 100 кГц. Как и выше, для декодирования сообщения использована синхронизация хаотических процессов в передающем и приемном лазерах. Приведенные в [171] экспериментальные результаты показывают удовлетворительное качество воспроизведения информационного сигнала на выходе приемника. Экспериментальная установка для передачи информации на основе синхронизации двух хаотических лазеров описана и в работе [168]. В установке использованы два полупроводниковых лазера 1.3 μm диапазона, охваченные оптоэлектронной обратной связью с запаздыванием через высокоскоростные (с полосой пропускания 6 ГГц) InGaAs фотодетекторы. При уменьшении времени запаздывания от 7.47 нс до 6.9 нс наблюдался переход от регулярных колебаний интенсивности излучения к хаотическим через квазипериодические. Световой поток передатчика воспринимался фотодетектором, выход которого суммировался с сигналом обратной связи приемника. При экспериментах по передаче информации полезный сигнал (сообщение) подавался аддитивно в цепь обратной связи передатчика. Восстановление сообщения на выходе приемника выполнялось по методу работы [54] путем вычитания сигнала хаотического генератора приемника из его входа. Экспериментально получено хорошее качество восстановления двоичного сигнала, представленного импульсами малой скважности с частотой следования 100 МГц. Синхронизация хаотических полупроводниковых лазеров и возможность ее применения для систем связи рассматривается также в работе [143] где приводятся результаты экспериментов по изменению разности фаз отраженных волн (relative cavity phase) приемника и передатчика. Результаты работы показывают влияние этого параметра на качество синхронизации.

3.5 Информационные системы

К настоящему времени предложены различные методы использования хаотических процессов для хранения и кодирования информации. Как отмечено в работе [3], «начинают проявляться контуры принципиально новых систем обработки информации — хаотических процессоров». Возможности таких процессоров продемонстрированы разработкой программного комплекса «Associative Memory for Pictures», предназначенного для записи и извлечения изображений, а также систему управления факсимильными документами «FacsData Wizard» [3]. Развитием этой системы явился программный комплекс «Незабудка» [3, 13], защищенный патентами Российской Федерации (патент РФ2050072) и США [62]. Задачей комплекса является поиск документов (с идентификацией места в документе) при запросах на естественном языке. Информация запоминается и хранится в виде траекторий дискретной хаотической системы. Соответствующее хаотическое отображение строится в процессе кодирования информации. При старте с произвольных начальных условий траектория по-

сле переходного процесса притягивается к одному из имеющихся циклов и воспроизводит соответствующую информацию.

Создание ассоциативной памяти на базе параметрически-связанных хаотических элементов обсуждается в работе [97]. В работе [122] приводятся экспериментальные результаты по хранению информации в управляемой по методу обратной связи с запаздыванием хаотической системы, а работа [114] посвящена кодированию двоичных данных с использованием хаотических процессов (transient chaos).

3.6 Химическая промышленность и обработка сырья

Важным направлением исследований по применению управляемого хаоса является *хаотическое перемешивание*, в особенности — перемешивание жидкостей и сыпучих веществ. Качественное перемешивание потоков имеет большое значение для таких приложений как химическое производство в смесевых реакторах непрерывного действия, производство порошков и полимеров. Его следует обеспечивать при разработке камер сгорания, теплообменников и в других производствах [135, 159].

Повышение скорости и качества перемешивания в химическом производстве уменьшает массу реагентов, не охваченных реакцией и, следовательно, повышает чистоту выходного продукта. Отмечено, что стоимость очистки составляет около 80 % стоимости готовой продукции, поэтому тщательное перемешивание имеет здесь первостепенное значение. В работе [175] предложен метод синтеза управления для стабилизации хаотических неизотермических процессов в реакторах с непрерывным перемешиванием (continuous stirred tank reactor, CSTR) при ограничениях как на амплитуду, так и на темп изменения управляющего воздействия. Авторами работы [99] использован расширенный вариант алгоритма Пирагаса для управления барботажными газо-адсорбционными реакторами с псевдооживлением в кипящем слое (bubbling gas-solid fluidized bed reactor). Такое управление приводит к уменьшению пузырьков, что, в свою очередь, улучшает массопередачу реагентного газа через пузырьки к частицам катализатора.

Перемешивание потоков жидкостей. В работе [159] предложен общий метод повышения скорости перемешивания хаотических потоков жидкостей, основанный на увеличении *степени хаотичности*. Для ее определения используются локальные значения показателей Ляпунова (ляпуновских экспонент), характеризующих среднее увеличение фазового объема. На основе лагранжевого описания динамики двумерных потоков, они описывают движение частиц жидкости через уравнения Гамильтона, после чего рассматриваются общие уравнения нелинейной динамической системы в виде

$$(14) \quad \dot{x} = F(x(t), u(t)),$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t)$ — управляющий параметр потока. Уравнения (14) рассматриваются совместно с вариационной системой

$$(15) \quad \dot{w} = M(x, u)w,$$

где $M = \partial F / \partial x(x, u)$ — матрица Якоби. В работе [159] предложено измерять локальную скорость расширения потока через квадратичную норму w , а именно, как $\frac{\partial}{\partial t} |w|^2 = 2w^T M(x, u)w$ и изменять управляющий параметр по закону

$$(16) \quad \Delta u = \gamma \operatorname{sign}(w^T \frac{\partial M}{\partial u} w),$$

где $\gamma > 0$. Управляющее воздействие активируется в тех областях, в которых значение локального наибольшего показателя Ляпунова меньше, чем его среднее значение. Нетрудно видеть, что алгоритм (16) представляет собой частный случай алгоритма скоростного градиента (см. [6, п. 4.2]), в котором используется целевая функция $Q(x) = |x|^2$. В указанной работе [159] описывается также дискретный алгоритм управления, который, в свою очередь, представляет собой частный случай градиентного алгоритма, приведенного в [6, п. 4], где описано его применение для повышения степени хаотичности отображения Чирикова (стандартного отображения). Недостатком обоих вариантов алгоритма является предположение о возможности измерения всего вектора состояния, а также знания параметров управляемого процесса.

Перемешивание сыпучих материалов. В работе [160] описывается самопроизвольное хаотическое смешивание гранулированных частиц, которое наблюдается в простых цилиндрических барабанах, частично заполненных мелкими зёрнами. Такое явление возникает самопроизвольно при достаточно малых гранулах (диаметром примерно не более 300 микрон). Механизм возникновения хаотических движений предполагается следующим: периодическое скачкообразное движение возникает на сдвиге слоя, разделяющего неподвижные и текущие зоны зёрен. Это приводит к значительно более слабому сцеплению зёрен при перемешивании, чем то, которое описано этими же авторами в более ранних работах [102, 129].

Перемешивание сыпучих материалов приводит к появлению большого числа красивых картин, как и примеров самоорганизации (образования структур) [87]. Следует иметь в виду, что более активное перемешивание, полученное, например, за счет более энергичного встряхивания или увеличения скорости эволюций миксера совсем не гарантирует получения в результате более качественной смеси. Дело в том, что сыпучим материалам при встряхивании свойственно разделение по плотности и размерам частиц, так что усиленное перемешивание может привести к результату, противоположному желаемому. Самоорганизация возникает на основе двух конкурирующих явлений: хаотической адвекции, или хаотического перемешивания, как это происходит в жидкостях, и разделения — явления, не имеющего аналога для жидкостей. Такие системы представляют собой простейший вид систем, доступных для лабораторных исследований, в которых сосуществуют хаос и самоорганизация. Хорошее описание процесса перемешивания сыпучих материалов можно найти в работе [87].

Многими авторами изучалась (численно или экспериментально) зависимость качества перемешивания от различных параметров. В работе [103] показано, что поток в миксерах эллиптической или квадратной формы имеет периодичность во времени, что приводит к хаотической адвекции и ускорению перемешивания, в отличие от потока в круговых миксерах. Что касается способа формирования внешнего воздействия, то здесь большинством авторов принимается разомкнутое (программное) управление в виде периодической функции времени. Такое воздействие использовано для улучшения перемешивания сыпучих веществ в работе [45]. Смешивание жидкостей в двумерной квадратной полости при пульсирующем периодическом изменении скорости движения крышки исследовано в работе [30] путем пространственной дискретизацией методом спектрального элемента. Наиболее строгая трактовка задачи оптимального перемешивания дана, по-видимому, в работе [56], авторы которой трактуют идеализированную (prototypical) задачу смешивания как задачу управления, целью в которой является нахождение такого режима изменения расходов жидкости, при котором максимизируется энтропия. Для этого используется соответствующий

щий аппарат эргодической теории, на основе которого находится энтропия периодических последовательностей и определяется режим работы, максимизирующий энтропию среди всех периодических режимов образованных взаимно ортогональными потоками.

Идея хаотизации процесса перемешивания сыпучих материалов получила промышленное применение в устройствах, изготавливаемых компанией Kroosher Technologies ³, среди разработок которой имеется механическое приспособление «Крушер» (Kroosher). Оно присоединяется к штоку вибрационного грохота и, за счет имеющихся внутри износостойких механических деталей создает дополнительные колебания, которые передаются рабочему органу машины. В результате энергия одночастотных вибраций перераспределяется между частотами в широком диапазоне. Многочастотное возбуждение усиливается на ячейках грохота вследствие их резонансных свойств, что повышает производительность установки.

4 Прочие применения

Работа [151] посвящена задаче составления расписаний применительно к управлению производственными процессами (в широком смысле). Рассматриваются системы из параллельно работающих агрегатов (машин) и переключающегося распределяющего устройства (*сервера*). В зависимости от свойств исследуемой системы, может возникнуть режим с хаотическими переключениями сервера. В работе вычисляются вероятности распределения хаотических моментов возврата (*chaotic return times*) и анализируются потери в производстве продукции на переключениях в зависимости от регламента обслуживания. В [151] предлагается и обосновывается дисциплина обслуживания, при которой общие потери времени на переключения минимальны, что повышает производительность всей системы. Рассматриваются также производственные линии, которые обычно имеют несколько взаимодействующих уровней машин. В работе приводятся результаты моделирования для трехуровневой производственной системы с близкими между собой временами переключения. Численный анализ показал появление хаотических «бегущих волн». Результаты моделирования показали также, что между отдельными машинами синхронизации нет, но между уровнями сети с последовательной организацией наблюдается «глобальная» синхронизация частот переключений.

Число существующих и потенциальных применений хаоса и управления им быстро растет. Среди предложений последнего времени стоит отметить:

- применения к численным методам анализа (к анализу устойчивости неподвижных точек [123], и к стабилизации алгоритма Ричардсона для определения собственных векторов [85]);
- использование управляемого хаоса для обработки информации [58, 108, 161];
- управление сложностью систем [69].

³ Сайт компании <http://www.kroosh.com/>

5 Заключение

Выделение широкого класса приложений теории управления (в широком смысле — кибернетики), направленных не на решение практических задач, а на развитие других научных теорий представляет собой важную особенность современного этапа развития кибернетики. Большинство таких работ публикуется не в инженерных, а в физических журналах, что позволяет говорить о становлении нового раздела физики — кибернетической физики [20, 22], занимающейся применением кибернетических методов для исследования физических систем. Управление хаосом оказывается ветвью кибернетической физики. Сложность хаотической динамики приводит к новым задачам управления, которые требуют нового развития теории управления.

Важный класс приложений основан на использовании хаоса для описания неопределенности поведения динамических систем. Описание неопределенности хаотической системой, в отличие от других способов (стохастического, нечеткого и др.), дает естественный инструмент описания неопределенности параметров колебаний: частоты, фазы, амплитуды при помощи небольшого числа параметров. Методы управления в условиях хаотической неопределенности начали развиваться лишь совсем недавно.

Следует отметить, что сложность возникающих задач приводит к использованию весьма упрощенных моделей объектов управления даже в работах, где обсуждаются технические приложения. На самом деле многие приложения являются лишь «потенциальными», практическая реализация их возможна лишь в будущем и лишь при определенных условиях. Тем не менее, знакомство с новыми постановками и их обсуждение, по мнению авторов обзора, может оказать положительное влияние на дальнейшее развитие как теории управления, так и ее приложений.

Авторы пользуются случаем указать на некоторые опечатки в части I обзора [6].

1. На стр. 28, строка 5 сверху — вместо “матрица $\Phi(t)$ ” читать “матрица $\Phi(\tau)$ ”.
2. На стр. 16, строка 10 сверху — вместо “ λ и для всех” читать “ $\lambda > 0$ и для всех”.
3. На стр. 17 после формулы (31) — вместо “если замкнутая” читать “такие, что замкнутая”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю. Дестохастизация системы со странным аттрактором посредством параметрического воздействия // Вестник Моск. ун-та, сер. Физ.-астр. 1985. Т. 26. № 3. С. 40–44.
2. Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю. О возможности управления системой со странным аттрактором / В сб.: Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Т. VIII. Л.: Гидрометеиздат, 1985, С. 175–189.
3. Андреев Ю.В., Дмитриев А.С., Куминов Д.А. Хаотические процессоры // Успехи современной радиоэлектроники (Зарубежная радиоэлектроника). 1997. 10. С. 50–79.
4. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. *Избранные главы теории автоматического управления*. Гл. 13, *Управление нелинейными колебательными и хаотическими системами*. СПб.: Наука, 1999.

5. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. *Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab (учебное пособие)*. СПб.: Наука, 2001. 286 с.
6. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом. Методы и приложения. Часть 1. Методы // *АиТ*. 2003. 5. С. 3–45.
7. Волковский А.Р., Рульков Н.Ф. // *Письма в ЖТФ*. 1993. 19. 3.
8. Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В. и др. Хаотическая генерация в лампе обратной волны мегаваттного уровня мощности // *ЖТФ*. 2001. 71, 11. С. 73–80.
9. Глумов В.М., Земляков С.Д., Рутковский В.Ю., Суханов В.М. Модально-физическая модель пространственного углового движения деформируемого космического аппарата и ее свойства // *АиТ*. 1998. 12. С. 38–50.
10. Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О. Динамический хаос как парадигма современных систем связи // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1997. № 10. С. 4–26.
11. Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В. Передача информации с использованием синхронного хаотического отклика при наличии фильтрации в канале связи // *Письма в ЖТФ*. 1999. 25. 16. С. 71–77.
12. Дмитриев А.С., Панас А.И. *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*. М.: Изд. Физ.-мат. лит. 2002, 252 с.
13. Дмитриев А.А. Хаотические последовательности, содержащие заданную информацию // *Радиотехника и электроника*. 2002. 47, 11. С. 1370–1375.
14. Лойко Н.А., Науменко А.В., Туровец С.И. Воздействие обратной связи Пирагаса на динамику лазера с модуляцией потерь // *ЖЭТФ*. 1997. 112, 4 (10). С. 1516–1530.
15. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами*. СПб.: Наука, 2000.
16. Мун Ф. *Хаотические колебания*. М.: Мир, 1990.
17. Напартович А.П., Сухарев А.Г. Декодирование информации в системе хаотического лазера, управляемого хаотическим сигналом // *Квантовая электроника*. 1998. 25, 1. С. 85–88.
18. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания*. М.: Наука, 1987. 424 с.
19. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн*. М.: Наука, 1984.
20. Фрадков А.Л. Исследование физических систем при помощи обратных связей // *АиТ*. 1999. 3. С. 213–230.
21. Фрадков А.Л., Андриевский Б.Р. Демпфирование колебаний космического летательного аппарата управлением малой мощности / Тез. X С.-Петербур. межд. конф. по интегрированным навигационным системам. ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор», СПб. 2003.
22. Фрадков А.Л. *Кибернетическая физика: Принципы и примеры*. СПб.: Наука, 2003
23. Храмов А.Е., Ремпен И.С. Влияние обратной связи с запаздыванием на сложную динамику в гидродинамической модели диода Пирса // *Радиотехника и электроника*. 2002. 47, 6. С. 732–738.

24. Шалфеев В.Д., Осипов Г.В., Козлов А.К., Волковский А.Р. Хаотические колебания – генерация, синхронизация, управление // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1997. № 10. С. 27–49.
25. Шиманский В.Э. Система связи с хаотической несущей на цифровом сигнальном процессоре ADSP-2181 // Изв. ВУЗов. Прикл. нел. динам. 1998. 6. № 5. С. 66–75.
26. Abel A., Schwarz W. Chaos communication – principles, schemes, and system analysis // Proc. IEEE. 2002. 90. 5. P. 691–710.
27. Aliev K.M., Kamilov I.K., Ibragimov Kh.O., Abakarova N.S Synchronization of chaos and small signal amplification in electron-hole plasma of germanium / 2003 Int. Conf. “Physics and Control” Proc. Eds. A.L. Fradkov and A.N. Churilov. St.Petersburg, Russia, 2003. P. 675–679.
28. Alvarez-Ramirez J., Puebla H., Cervantes I. Stability of observer-based chaotic communications for a class of Lur’e systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2002. 12. 7. P. 1605–1618.
29. Amann A., Schöll E., Baba N., Just W. Time delayed feedback control of chaos by spatio-temporal filtering // 2003 Int. Conf. “Physics and Control”, St.Petersburg, 2003 (<http://www.rusycon.ru>).
30. Anderson P.D., Galaktionov O.S., Peters G.W.M., van de Vosse F.N., Meijer H.E.H. Chaotic fluid mixing in non-quasi-static time-periodic cavity flows // Int. J. Heat and Fluid Flow. 2000. 21. P. 176–185.
31. Andrievsky B., Fradkov A. Information transmission by adaptive synchronization with chaotic carrier and noisy channel / Proc. 39th IEEE Conf. Dec. Contr. Sydney. 2000.
32. Andrievsky B.R. Adaptive synchronization methods for signal transmission on chaotic carriers // Mathem. and Computers in Simulation. 2002. 58. 4–6. P. 285–293.
33. Andrievsky B.R., Boykov K.B., Fradkov A.L. Numerical and experimental excitability analysis of multi-pendulum mechatronics system. Prepr. 15th IFAC World Congress on Automatic Control. Barcelona, July 2002.
34. Anishchenko V.S., Pavlov A.N. Global reconstruction in application to multichannel communication // Phys. Rev. E. 1998. 57, 2. P. 2455–2457.
35. Ashhab M., Salapaka M.V., Dahleh M., Mezic I. Control of chaos in atomic force microscopes / Amer. Contr. Conf. 1997. 1. P. 196–202.
36. Ashhab M., Salapaka M.V., Dahleh M., Mezic I. Dynamical analysis and control of microcantilevers // Automatica. 1999. 35. P. 1663–1670.
37. Bai E.-W., Lonngren K.E., Sprott J.C. On the synchronization of a class of electronic circuits that exhibit chaos // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. 13. P. 1515–1521.
38. Baptista M.S. Cryptography with chaos // Phys. Lett. A. 1998. 240. P. 50–54.
39. Baptista M.S., Macau E.E., Grebogi C., et al. Integrated chaotic communication scheme // Phys. Rev. E. 2000. 62. 4. P. 4835–4845.
40. Baptista M.S., Macau E.E., Grebogi C. Conditions for efficient chaos-based communication // Chaos. 2003. 13 1. P. 145–150.
41. Barratt C. On the control of chaos in extended structures // J. of Vibration and Acoustics – Trans. ASME. 1997. 119. P. 551–556.

42. *Battle C., Fossas E., Olivar G.* Stabilization of periodic orbits of the buck converter by time-delayed feedback // Intern. J. Circ. Theory and Appl. 1999. 27. P. 617–631.
43. *Bishop S.R., Xu D.* The use of control to eliminate subharmonic and chaotic impacting motions of a driven beam // J. Sound Vibr. 1997. 205. P. 223–234.
44. *Brandt M.E., Shih H.T., Chen G.R.* Linear time-delay feedback control of a pathological rhythm in a cardiac conduction model // Phys. Rev.E. 1997. 56. P. 1334–1337.
45. *Brone D., Muzzio F.J.* Size segregation in vibrated granular systems: A reversible process // Phys. Rev. E. 1997. 56, 1. P. 1059–1063.
46. *Chaos in chemistry and biochemistry* /Eds *R.J. Field, L. Gyorgyi* // World Scientific. 1992.
47. *Chaos and non-linear models in economics. Theory and applications* /Eds *J. Creedy, V.L. Martin.* Melbourne: Edward Elgar, 1994.
48. *Chen J.H., Chau K.T., Siu S.M., Chan C.C.* Experimental stabilization of chaos in a voltage-mode DC drive system // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2000. 47. P. 1093–1095.
49. *Chen L.Q., Cheng C.J.* Controlling chaotic oscillations of viscoelastic plates by the linearization via output feedback // Applied Mathem. Mechanics – Engl. Ed. 1999. 20. P. 1324–1330.
50. *Chen H.-K.* Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping // J. Sound Vibr. 2002. 255. 4. P. 719–740.
51. *Chen Li-Qun, Liu Yan-Zhu.* Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2002. 37. P. 493–504.
52. *Gluckman B.J.* Control of seizing neuronal networks / In: *Experimental Chaos. 6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001.* Eds. S. Boccaletti, B.J. Gluckman, J. Kurths et al. AIP Conf. Proc. V. 622, NY, 2002. P. 105–107.
53. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H.* Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications // IEEE Trans. Circ. Syst. – II. 1993. 40. 10. P. 626–633.
54. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. 1993. 71. 1. P. 65–68.
55. *Complexity, chaos, and biological evolution* /Eds *E. Mosekilde, L. Mosekilde* //NATO ASI Series, Ser. B: Physics. New York; London: Plenum Press, 1991. Vol. 270.
56. *D’Alessandro D., Dahleh M., Mezić I.* Control of mixing in fluid flow: a maximum entropy approach // IEEE Trans. Aut. Contr. 1999. 44. 10. P. 1852–1863.
57. *Davies M.L., Halford-Maw P.A., Hill J., Tinsley M.R., Johnson B.R., Scott S.K., Kiss I.Z., Gáspár V.* Control of chaos in combustion reactions // J. Phys. Chem. A. 2000. 104. P. 9944–9952.
58. *Dedieu H., Ogorzalek M.* Chaos based information processing // Intern. J. Bifurc. Chaos. 2000. 10. 4. P. 737–748.
59. *Desharnais R.A., Costantino R.F., Cushing J.M., et al.* Chaos and population control of insect outbreaks // Ecology Let. 2001. 4. 229–235.
60. *Dhamala M., Lai Y.C.* Controlling transient chaos in deterministic flows with applications to electrical power systems and ecology // Phys. Rev.E. 1999. 59. P. 1646–1655.

61. *Ditto W.L., Spano M.L., In V., Neff J., Meadows B., Langberg J.J., Bolmann A., McTeague K.* Control of human atrial fibrillation // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2000. 10. P. 593–601.
62. *Dmitriev A., Andreev Yu., Belsky Yu., et al.* Patent US US5774587: Method of objects recognition. Dec. 1, 1995.
63. *Dolov A.M., Kuznetsov S.P.* Application of idea of chaos control to stabilization of stationary generation in backward-wave oscillator / *2003 Int. Conf. "Physics and Control" Proc.* Eds. A.L. Fradkov and A.N. Churilov. St.Petersburg, Russia, 2003. P. 507–509.
64. *Dykstra R., Tang D.Y., Heckenberg N.R.* Experimental control of single-mode laser chaos by using continuous, time-delayed feedback // *Phys. Rev. E.* 1998. 57. P. 6596–6598.
65. *Elmer F.J.* Controlling friction // *Phys. Rev. E.* 1998. 57. P. 4903–4906.
66. *Fang C.C., Abed E.H.* Robust feedback stabilization of limit cycles in PWM DC-DC converters // *Nonlinear Dyn.* 2002. 27. P. 295–309.
67. *Feki M.* An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. 18. P. 141–148.
68. *Femat R., Jauregui-Ortiz R., Solís-Perales G.* A chaos-based communication scheme via robust asymptotic feedback // *IEEE Trans. Circ. Syst. I.* 2001. 48. P. 1161–1169.
69. *Feudel U., Grebogi C.* Multistability and the control of complexity // *Chaos.* 1997. 7. P. 597–604.
70. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. World Scientific, Singapore. 1998.
71. *Fradkov A.L., H. Nijmeijer and A.Yu. Markov.* Adaptive observer-based synchronization for communication // *Int. J. Bifurcations and Chaos.* 2000. 10. 12. 2000, P. 2807–2813.
72. *Fradkov, A.L., Andrievsky, B.R.* Adaptive robustified synchronization methods for chaos-based information transmission / *Proc. 1st IEEE Int. Conf. Circ. Syst. for Communic.* 2002. St.Petersburg, P. 275–280.
73. *Fradkov A.L., Nikiforov V.O., Andrievsky B.R.* Adaptive observers for nonlinear nonpassifiable systems with application to signal transmission / *Proc. 41st IEEE Conf. Dec. and Contr. (CDC '02).* 2002. USA, P. 47046–4711.
74. *Friedel H., Grauer R., Spatschek K.H.* Controlling chaotic states of a Pierce diode // *Physics of Plasmas.* 1998. 5. P. 3187–3194.
75. *Gad-el-Hak M.* Flow Control: Passive, Active, and Reactive Flow Management, Cambridge University Press, London. 2000.
76. *Garfinkel A., Spano M.L., Ditto W.L., Weiss J.N.* Controlling cardiac chaos // *Science.* 1992. 257. P. 1230–1235.
77. *Ge Z.-M., Lin T.-N.* Chaos, chaos control and synchronization of electro-mechanical gyrostat system // *J. Sound Vibr.* 2003. 259. 3. P. 585–603.
78. *Ge Z.M., Shiue J.S.* Non-linear dynamics and control of chaos for a tachometer // *J. Sound Vibr.* 2002. 253.
79. *Ghezzi L.L., Piccardi C.* PID control of a chaotic system: An application to an epidemiological model // *Automatica.* 1997. 33. P. 181–191.

80. *Giona M.* Functional reconstruction of oscillating reaction: prediction and control of chaotic kinetics // *Chem. Engr. Sci.* 1992. 47. P. 2469–2474.
81. *Glorieux P.* Control of chaos in lasers by feedback and nonfeedback methods // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1998. 8. P. 1749–1758.
82. *Guderian A., Munster A.F., Jinguji M., Kraus M., Schneider F.W.* Resonant chaos control by light in a chemiluminescent reaction // *Chem. Phys. Lett.* 1999. 312. P. 440–446.
83. *Habel R., Beige H.* Ferroelectric systems with controlled chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1997. 7. P. 199–204.
84. *Harb A.M., Abdel-Jabbar N.* Controlling Hopf bifurcation and chaos in a small power system // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. 18. P. 1055–1063.
85. *He S.* Stabilizing the Richardson eigenvector algorithm by controlling chaos // *Comput. in Phys.* 1997. 11. P. 194–198.
86. *Heertjes M.F., Van de Molengraft M.J.G.* Controlling the nonlinear dynamics of a beam system // *Chaos, Solitons Fractals.* 2001. 12. P. 49–66.
87. *Hill K.M., Gilchrist J.F., Ottino J.M., Khakhar D.V., McCarthy J.J.* Mixing of granular materials: a test-bed dynamical system for pattern formation // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1999. 9. P. 1467–1484.
88. *Holt T.A.* A chaotic model for tight diabetes control // *Diabetic Medicine*, 2002, 19, P. 274–278.
89. *Holyst J.A., Hagel T., Haag G.* Destructive role of competition and noise for control of microeconomical chaos // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1997. 8. P. 1489–1505.
90. *Holyst J.A., Urbanowicz K.* Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // *Physica A.* 2000. 287. P. 587–598.
91. *Holyst J.A., Żebrowska M., Urbanowicz K.* Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy? // *Eur. Phys. J. B.* 2001. 20. P. 531–535.
92. *Ibragimov Kh.O., Aliev K.M., Kamilov I.K., Abakarova N.S.* Chaos in germanium oscillistor / 2003 *Int. Conf. "Physics and Control" Proc.* Eds. A.L. Fradkov and A.N. Churilov. St.Petersburg, Russia, 2003. P. 680–682.
93. *IEEE Transactions on Circuits and Systems.* Special issue "Chaos control and synchronization" / Eds. M. Kennedy, M. Ogorzalek. 1997. 44. 10.
94. *IEEE Transactions on Circuits and Systems.* Special issue on applications of chaos in modern communication systems / Eds. L. Kocarev, G.M. Maggio, M. Ogorzalek, et al. 2001 48. 12.
95. *Iñarrea M., Lanchares V.* Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. 10. 5. P. 997–1018.
96. *Int. J. of Circuit Theory and Applications* Special issue: Communications, Information Processing and Control Using Chaos. / Eds. M. Hasler, J. Vandewalle. 1999. 27. 6.
97. *Ishii S., Sato M.* Associative memory based on parametrically coupled chaotic elements // *Physica D.* 1998. 121. P. 344–366.

98. *Kaart S., Schouten J.C., van den Bleek C.M.* Synchronizing chaos in an experimental chaotic pendulum using methods from linear control theory // *Phys. Rev. E.* 1999. 59. P. 5303–5312.
99. *Kaart S., Schouten J.C., van den Bleek C.M.* Improving conversion and selectivity of catalytic reactions in bubbling gas-solid fluidized bed reactors by control of the nonlinear bubble dynamics // *Catalysis Today.* 1999. 48. P. 185–194.
100. *Kaplan B.Z., Horen Y., Cohen G., Hellerman Y.* Magnetic levitation by chaotic oscillation: a new method // *IEEE Trans. Magnetics.* 2002. 38. 5. P. 3475–3481.
101. *Kennedy M.P., Kolumban G.* Digital communications using chaos. In: *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems* / Ed. G.Chen, CRC Press. 1999. P. 477–500.
102. *Khakhar D.V., McCarthy J.J., Shinbrot T., Ottino J.M.* Transverse flow and mixing of granular materials in a rotating cylinder. *Phys. Fluids.* 1997. 9. P. 31 – 43.
103. *Khakhar D.V., McCarthy J.J., Gilchrist J.F., Ottino J.M.* Chaotic mixing of granular materials in two-dimensional tumbling mixers // *Chaos.* 1999. 9. P. 195–205.
104. *Kimiaghalam B., A. Homaiifar A., M. Bikdash.* Pendulation suppression of a shipboard crane using fuzzy controller // *Proc. "American Control Conference (ACC'99)", San Diego, California 2 – 4 June 1999.* P. 586 – 590.
105. *Kiss I.Z., Gáspár V., Hudson J.L.* Experiments on synchronization and control of chaos on coupled electrochemical oscillators // *J. Phys. Chem. B.* 2000. 104. P. 7554–7560.
106. *Kiss I.Z., Gáspár V.* Controlling chaos with artificial neural network: Numerical studies and experiments // *J. Phys. Chem. A.* 2000. 104. P. 8033–8037.
107. *Kiss I.Z., Wang W., Hudson J.L.* Forcing, coupling, and feedback of chaotic electrochemical oscillators / In: *Experimental Chaos. 6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001.* Eds. S. Boccaletti, B.J. Gluckman, J. Kurths et al. AIP Conf. Proc. V. 622, NY, 2002. P. 3–11.
108. *Klotz A., Brauer K.* A small-size neural network for computing with strange attractors // *Neural Netw.* 1999. 12. P. 601–607.
109. *Kocarev L., Parlitz U.* Genreal approach for chaotic synchronization with applications to telecommunication // *Phys. Rev. Lett.* 1995. 74. 25. P 5028–5031.
110. *Kol'tsova E.M., Gordeev L.S., Korchagin E.Y., et al.* Control of chaos in chemical systems (for the process of crystallization as an example) // *Russian J. of Physical Chemistry*, 74: S78–S84 Suppl. 1 2000.
111. *Kol'tsova E.M., Cherenkov M.V., Korchagin E.Y.* Non-linear processes and control of chaos in chemical technology / *2003 Int. Conf. "Physics and Control" Proc.* Eds. A.L. Fradkov and A.N. Churilov. St.Petersburg, Russia, 2003. P. 484–490.
112. *Kolumban G., Kennedy M.P., Chua L.O.* The role of synchronization in digital communications using chaos – Part I: Fundamentals of digital communications // *IEEE Trans. Circ. Syst.-Part I:* 44(10). 1997. P. 927–936,. Part II: Chaotic modulation and chaotic synchronization. // *IEEE Trans. Circ. Syst.-Part I:* 45. 11. 1998. P. 1129–1140.
113. *Kouomou Y.C., Woafu P.* Stability and chaos control in electrostatic transducers // *Physica Scripta.* 2000. 62. P. 255–260.

114. *Lai Y.C.* Encoding digital information using transient chaos // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2000. 10. P. 787–795.
115. *Lai, Y.M., Tse, C.K., Chow, M.H.L.* Control of bifurcation in current-programmed DC/DC converters: An alternative viewpoint of ramp compensation // *Circuits Syst. Signal Process.* 2001. 20. P. 695–707.
116. *Lanchares V., Iñarraea M., Salas J.P.* Spin rotor stabilization of a dual-spin spacecraft with time dependent moments of inertia // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 1998. 8. 3. P. 609–617.
117. *Lee S.T.S, Chung H.S.H., Chen G., Hui S.Y.R.* Use of chaotic switching in electronic ballasts. PAPER Special Section on Nonlinear Theory and its Applications.
118. *Lenci S., Rega G.* A procedure for reducing the chaotic response region in an impact mechanical system // *Nonlinear dynamics*. 1998. 15. P. 391–409.
119. *Lenci S., Rega G.* Controlling nonlinear dynamics in a two-well impact system. I. Attractors and bifurcation scenario under symmetric excitations // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 1998. 8. P. 2387–2407.
120. *Lenci S., Rega G.* Numerical control of impact dynamics of inverted pendulum through optimal feedback strategies // *J. Sound Vibr.* 2000. 236. P. 505–527.
121. *Liao, T.-L., Huang, N.-S.* An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications // *IEEE Trans. Circ. Syst. – I*. 1999. 46, 1144–1150.
122. *Lim T.K., Kwak K., Yun M.* An experimental study of storing information in a controlled chaotic system with time-delayed feedback // *Physics Letters A*. 1998. 240. P. 287–294.
123. *Locher M., Johnson G.A., Hunt E.R.* Stability analysis of fixed points via chaos control // *Chaos*. 1997. 7. P. 590–596.
124. *Lorenz H.W.* *Nonlinear Dynamical Equations and Chaotic Economy*. Springer, Berlin, 1993.
125. *Mariño I.P., Rosa Jr. E., Grebogi C.* Exploiting the natural redundancy of chaotic signals in communication systems // *Phys. Rev. Lett.* 2000. 85. 12. P. 2629–2632.
126. *Mariño I.P., Lopez L., Sanjuan M.A.F.* Channel coding in communications using chaos // *Physics Letters A*. 2002. 295. P. 185–191.
127. *Meehan P.A., Asokanathan S.F.* Control of Chaotic instabilities in a spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov method // *Chaos Solitons Fractals*. 2002. 13. P. 1857–1869.
128. *Meehan P.A., Asokanathan S.F.* Control of chaotic motion in a dual-spin spacecraft with nutational damping // *J. Guid., Control Dyn.* 2002. 25. 2. P. 209–214.
129. *Metcalf G., Shinbrot T., McCarthy J.J., Ottino J.M.* Avalanche mixing of granular solids. *Nature*. 1995. 374. P. 39 – 41.
130. *Mitsubori K., Aihara K.* Delayed-feedback control of chaotic roll motion of a flooded ship in waves // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2002. 458. P. 2801–2813.
131. *Moon F.C., Reddy A.J. Holmes W.T.* Experiments in control and anti-control of chaos in a dry friction oscillator // *J. Vibr. Control*. 2003. 9. P. 387–397.
132. *Morgül Ö., Solak, E.* Observed based synchronization of chaotic systems // *Phys. Rev.* 1996. E54, 4803–4811.
133. *Nijmeijer H., Mareels I.M.Y.* Observer looks at synchronization// *IEEE Trans. Circ. Syst. – I*. 1997. 44, 10, 882–890.

134. *Ott, E., Grebogi C., Yorke J.* Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.*, V. 64 (11), 1990, P. 1196–1199.
135. *Ottino J.M.* The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport. New York: Cambridge Univ. Press, 1989.
136. *Parmananda P., Madrigal R., Rivera M., Nyikos L., Kiss I.Z., Gáspár V.* Stabilization of unstable steady states and periodic orbits in an electrochemical system using delayed-feedback control // *Phys. Rev.E.* 1999. 59. P. 5266–5271.
137. *Parmananda P., Eiswirth M.* Suppression of chemical turbulence using feedbacks and forcing // *J. Phys. Chem. A.* 1999. 103. P. 5510–5514.
138. *Parmananda P., Rivera M., Madrigal R., Kiss I.Z., Gáspár V.* Resonant control of electrochemical oscillations // *J. Phys. Chem. B* 2000, 104, P. 11748–11751.
139. *Paskota M., Mees A.I., Teo K.L.* Directing orbits of chaotic systems in the presence of noise: Feedback correction // *Dynamics and Control.* 1997. 7. P. 25–47.
140. *Paskota M.* On modelling and the control of vibroformers in aluminium production // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1998. 9. P. 323–335.
141. *Paskota M., Lee H.W.J.* Targeting moving targets in chaotic dynamical systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1997. 8. P. 1533–1544.
142. *Pecora L.M., Carroll T.L., Johnson G.A., Mar D.J.* Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications // *Chaos.* 1997. 7. 4. P. 520–543.
143. *Peil M., Heil T., Fischer I., Elsäber W.* Chaos-synchronization in semiconductor laser systems: an optical phase dependent scenario / In: *Experimental Chaos. 6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001.* Eds. S. Boccaletti, B.J. Gluckman, J. Kurths et al. AIP Conf. Proc. V. 622, NY, 2002. P. 433–438.
144. *Peters E.* Chaos and order in the capital markets. New York: Wiley, 1991.
145. *Petrov V., Bo Peng, Showalter K.* A map-based algorithm for controlling low-dimensional chaos // *J. of Chem. Phys.* 1992. 96. P. 7506–7513.
146. *Petrov V., Gáspár, V., Masere, J., Showalter, K.* Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction // *Nature.* 1993. 361. P. 240–243.
147. *Petrov V., Showalter K.* Nonlinear prediction, filtering, and control of chemical systems from time series // *Chaos.* 1997. 7. P. 614–620.
148. *Piel A., Greiner F., Klinger T., Krahnstover N., Mausbach T.* Chaos and chaos control in plasmas // *Physica Scripta.* 2000. T84. P. 128–131.
149. *Poddar G., Chakrabarty K., Banerjee S.* Control of chaos in DC-DC converters // *IEEE Trans. Circ. Syst. I.* 1998. 45. P. 672–676.
150. *Rappel W.J., Fenton F., Karma A.* Spatiotemporal control of wave instabilities in cardiac tissue // *Phys. Rev.Letters.* 1999. 83. P. 456–459.
151. *Rem B., Armbruster D.* Control and synchronization in switched arrival systems // *Chaos.* 2003. 13. 1. P.128–137.
152. *Rosa Jr. E., Hayes S., Grebogi C.* Noise filtering in communication with chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1997. 78. 7. P. 1247–1250.

153. *Roy R., Murphy T.W., Maier T.D., Gills Z., Hunt E.R.* Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system // *Phys. Rev. Lett.* 1992. 68. P. 1259–1262.
154. *Roy Chowdhury A., Papri Saha, Santo Banerjee* Control of chaos in laser plasma interaction // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2001. 12. P. 2421–2426.
155. *Rozman M.G., Urbakh M., Klafter J.* Controlling chaotic frictional forces // *Phys. Rev.E.* 1998. 57. P. 7340–7343.
156. *Schöll E., Amann A., Schlesner J., et al.* Chaos control of nonlinear current oscillations in semiconductor heterostructures // *2003 Int. Conf. "Physics and Control"*, St.Petersburg, 2003 (<http://www.rusycon.ru>).
157. *E. Schomburg, K. Hofbeck, R. Scheuerer, et al.* Control of the dipole domain propagation in a GaAs/AlAs superlattice with a high-frequency field // *Phys. Rev. B.* 2002. 65. 155320.
158. *Sen A.K.* Control and diagnostic uses of feedback // *Physics of Plasmas.* 2000. 7. P. 1759–1766.
159. *Sharma, A, Gupte, N.* Control methods for problems of mixing and coherence in chaotic maps and flows // *Pramana – J. of Physics.* 1997. 48. P. 231–248.
160. *Shinbrot T., Alexander A., Muzzio F.J.* Spontaneous chaotic granular mixing // *Nature.* 1999. 397. 676.
161. *Sinha S., Ditto W.L.* Computing with distributed chaos. // *Phys. Rev. E.* 1999. 60. P. 363–377.
162. *Solé R.V., Gamarra J.G.P., Ginovart M., Lopez D.* Controlling chaos in ecology: From deterministic to individual-based models // *Bullet. Mathem. Biology.* 1999. 61. P. 1187–1207.
163. *Song H., Li Y.N., Chen L., Cai Z.S., Li Y.J., Hou Z., Zhao X.Z.* Controlling Belousov–Zhabotinsky–continuous stirred tank reactor chaotic chemical reaction by discrete and continuous control strategies // *PCCP Physical Chemistry Chemical Physics.* 1999. 1. P. 813–819.
164. *Sosnovtseva O.V, Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal dynamics in nephron autoregulation / *2003 Int. Conf. "Physics and Control" Proc.* Eds. A.L. Fradkov and A.N. Churilov. St.Petersburg, Russia, 2003. P. 283–288.
165. *Srivastava K.N., Srivastava S.C.* Elimination of dynamic bifurcation and chaos in power systems using facts devices // *IEEE Trans. Circ. Syst. I.* 1998. 45. P. 72–78.
166. *Srivastava K.N., Srivastava S.C.* Quasi-periodic route to chaos and its control in a power-system model // *Europ. Trans. Electr. Power.* 1999. 9. P. 241–245.
167. *Suárez I.* Mastering chaos in ecology // *Ecological Modelling.* 1999. 117. P. 305–314.
168. *Tang S., Illing L., Liu J.M., et al.* Communication using synchronization of chaos semiconductor lasers with optoelectronic feedback / In: *Experimental Chaos. 6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001.* Eds. S. Boccaletti, B.J. Gluckman, J. Kurths et al. AIP Conf. Proc. V. 622, NY, 2002. P. 224–229.
169. *Thomas K.I., Ambika G.* Suppression of Smale horseshoe structure via secondary perturbations in pendulum systems // *Pramana – J. of Physics.* 1999. 52. P. 375–387.

170. *Tôrres L.A.B., Aguirre L.A.* Extended chaos control method applied to Chua circuit // *Electr. Lett.* 1999. 35, 10. P. 768–770.
171. *Uchida A., Shinozuka M., Kinugawas S., et al.* Chaotic on-off keying in laser systems for optical secure communications / In: *Experimental Chaos. 6th Experimental Chaos Conf., Potsdam, Germany, 2001.* Eds. S. Boccaletti, B.J. Gluckman, J. Kurths et al. AIP Conf. Proc. V. 622, NY, 2002. P. 317–328.
172. *Vincent T.L.* Control using chaos // *IEEE Contr. Syst. Magazine.* 1997. 17. P. 65–76.
173. *Vincent T.L., Mees A.I.* Controlling a bouncing ball // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. 10. P. 579–592.
174. *Wiener R.J., Dolby D.C., Gibbs G.C., Squires B., Olsen T., Smiley A.M.* Control of chaotic pattern dynamics in Taylor vortex flow // *Phys. Rev. Lett.* 1999. 83. P. 2340–2343.
175. *Wu W.* Nonlinear bounded control of a nonisothermal CSTR // *Industr. Engin. Chem. Research.* 2000. 39. P. 3789–3798.
176. *Xiao J.H., Hu G., Gao J.H.* Turbulence control and synchronization and controllable pattern formation // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. 10. P. 655–660.
177. *Yamapi R., Chabi Orou J. B., Wofo P.* Harmonic oscillations, stability and chaos control in a non-linear electromechanical system // *J. Sound Vibr.* 2003. 259. 5. P. 1253–1264.
178. *Yang T., Chua L.O.* Chaotic digital code-division multiple access (CDMA) communication systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1997. 7. P. 2789–2805.