Бесконечномерная лемма Якубовича-Калмана для нестрогих неравенств.

А.В. Проскурников
СПбГУ, Математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский просп., д.28
e-mail: anton@ap9560.spb.edu, avp@tklab.math.spbu.ru

Лемма Якубовича-Калмана (частотная теорема) является одним из основных инструментов теории управления, находящим применение в исследовании динамики нелинейных систем, теории оптимального управления, робастном и адаптивном управлении и т.д. Данная лемма дает частотные условия разрешимости уравнений Лурье-Риккати, то есть условия существования для заданной линейной стационарной системы (с конечномерным пространством состояний) квадратичной функции Ляпунова со специальными свойствами. Важность леммы Якубовича-Калмана стала стимулом к ее обобщению на более широкие классы систем: нестационарные системы с периодическими коэффициентами, произвольные нестационарные системы, бесконечномерные системы. Доклад связан с последним направлением, начатым работами В.А. Якубовича и А.Л. Лихтарникова, В.А.Брусина, М.А.Нудельмана, Л. Пандольфи и др.

Большинство известных бесконечномерных обощений леммы Якубовича-Калмана относятся к так называемого невырожденному случаю, или случаю строгих частотных неравенств. Полного же обобщения варианта леммы для случая нестрогих неравенств, а именно этот вариант необходим для целого ряда приложений, получено не было. В докладе приводится такое обобщение для наиболее распространенного случая, когда вход системы является конечномерным.

Основным результатом доклада является следующая теорема.

Теорема. *Пусть X – комплексное гильбертово пространство, A – линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор на X, генерирующий C_0-полугруппу и $B : \mathbb{C}^m \to X$ – линейный оператор. Предположим, что при любом $a \in X$ уравнение*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \tag{*}$$

имеет решение $x(\cdot), u(\cdot) \in L_2(0; +\infty)$ с начальным данным $x(0) = a$. Рассмотрим ограниченную квадратичную форму $F(x, u)$, заданную на $X \times \mathbb{C}^m$ и предположим, что матрица $\Pi(i\omega) = \Pi(i\omega)$, определяемая условием $u^*\Pi(i\omega)u = F((i\omega I - A)^{-1}Bu, u)$ при некотором $\omega_0 \in \mathbb{R}$ невырождена : $\det \Pi(i\omega_0) \neq 0$. Тогда следующие условия равносильны:

1. *Существует ограниченный оператор $H : X \to X$, такой что*

$$2Re\langle Hx, Ax + Bu\rangle + F(x, u) \geq 0 \quad \forall x \in D(A), u \in \mathbb{C}^m.$$

2. *Существуют ограниченные операторы $H : X \to X$, $h : X \to U$, такие что*

$$2Re\langle Hx, Ax + Bu\rangle + F(x, u) = |\Gamma^{1/2}u + hx|^2 \quad \forall x \in D(A), u \in \mathbb{C}^m, \text{ где } u^*\Gamma u = F(0, u).$$

3. *Выполнено частотное неравенство: $\Pi(i\omega) \geq 0$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$.*

Аналогичная теорема справедлива и для бесконечномерных систем с дискретным временем. В докладе обсуждается также применение полученных результатов при анализе динамики некоторых нелинейных систем.