УДК 519.6+517.9..62-50

Линейные системы управления с эталонной моделью

А.В.Проскурников,
член-корреспондент РАН В.А. Якубович

Проблема построения обратной связи, которая обеспечивает соответствие системы управления заданной эталонной модели – одна из важнейших задач теории управления. Различные постановки задач синтеза систем управления с моделью и подходы к их решению для различных специальных случаев могут быть найдены в монографиях [1–4] и др. В данной статье получено удобное конструктивное описание класса всех стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих соответствие линейной системы управления заданной модели.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления

$$A(s)y(t) = B(s)u(t) + F(s)\varphi(t), \tag{1}$$

где $s = \frac{d}{dt}$, A, B, F – матричные полиномы размеров $n\times n$, $n\times m$, $n\times l$ соответственно, $y(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, $\varphi(t)\in\mathbb{R}^l$ – выход, управляющее воздействие и внешний сигнал соответственно. Всюду далее будет предполагаться, что $\det A \not\equiv 0$.

Предположим, что задана *эталонная модель*

$$A_m(s)y_m(t) = F_m(s)\varphi(t), \tag{2}$$

где A_m – гурвицев матричный полином размера $n\times n$, F_m – произвольный матричный полином размера $n\times l$. Требуется построить стабилизирующий регулятор

$$D(s)u(t) = C(s)y(t) + G(s)\varphi(t), \tag{3}$$

где D, C, G – матричные полиномы размеров $m\times m$, $m\times n$, $m\times l$ который обеспечивает при любом задающем воздействии $\varphi(t)$ выполнение условия

$$|y(t) - y_m(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t\to+\infty. \tag{4}$$

Как обычно, регулятор (3) называется стабилизирующим, если $\det D(\lambda)\not\equiv 0$ и матричный полином

$$\Xi(\lambda) = \begin{bmatrix} A(\lambda) & -B(\lambda) \\ -C(\lambda) & D(\lambda) \end{bmatrix} \tag{5}$$

гурвицев – то есть $\det \Xi(\lambda) \neq 0$ при $Re\,\lambda \geq 0$. Регулятор с указанными свойствами будем называть М-универсальным (для эталонной модели (2)). В частном случае, когда модель имеет вид $y(t) = 0$, задача построения М-универсального регулятора называется задачей об абсолютной инвариантности (впервые данная проблема была поставлена Г.В.Щипановым в 1939г.). При $\dim y = \dim \varphi$ и модели вида $y(t) = \varphi(t)$ соответствующая задача называется задачей отслеживания. Полное конструктивное описание класса универсальных регуляторов в задачах инвариантности и отслеживания было получено в работах [6, 7] и [8] соответственно.

Введем передаточные функции замкнутой системы (1), (3) W_y, W_u от φ к y, u соответственно. Легко видеть, что *стабилизирующий* регулятор М-универсален тогда и только тогда, когда $W_y \equiv W_m$, где

$$W_m(\lambda) = A_m(\lambda)^{-1} F_m(\lambda) \tag{6}$$

передаточная функция эталонной модели (2). В самом деле, пусть $\varphi(t) = Re(\varphi_0 e^{i\omega_0 t})$. Тогда функция $y_m(t) = Re(W_m(i\omega_0)\varphi_0 e^{i\omega_0 t})$ удовлетворяет (2), а пара функций $y(t) = Re(W_y(i\omega_0)\varphi_0 e^{i\omega_0 t})$, $u(t) = Re(W_u(i\omega_0)\varphi_0 e^{i\omega_0 t})$ – одно из решений системы уравнений (1), (3). Если регулятор М-универсален, то из (4) имеем $W_y(i\omega_0)\varphi_0 = W_m(i\omega)\varphi_0$ откуда, в силу произвольности $\omega_0 \in \mathbb{R}, \varphi_0 \in \mathbb{C}^l$ получаем $W_y \equiv W_m$. Обратно, при $W_y \equiv W_m$ для любого решения системы (1), (3) $[y(t), u(t)]$ и любой функции $y_m(t)$, удовлетворяющей (2), имеем (4) (разность $y(t) - y_m(t)$ не зависит от $\varphi(\cdot)$ и стремится к нулю в силу устойчивости).

2. Описание класса М-универсальных регуляторов.

Следуя [6–9], будем называть два регулятора $D_1 u = C_1 y + G_1 \varphi$, $D_2 u = C_2 y + G_2 \varphi$ вида (3) Н-эквивалентными, если существуют гурвицевы матричные полиномы H_1, H_2 размера $m \times m$, такие что

$$H_1^{-1} C_1 = H_2^{-1} C_2, \quad H_1^{-1} D_1 = H_2^{-1} D_2, \quad H_1^{-1} G_1 = H_2^{-1} G_2.$$

Очевидно, что Н-эквивалентные регуляторы одновременно стабилизирующие или нет, и передаточные функции замкнутой системы для таких регуляторов совпадают. В частности, два Н-эквивалентных регулятора всегда одновременно являются или не являются М-универсальными.

Следующие теоремы дают критерий существования М–универсального регулятора и описывают все множество М-универсальных регуляторов в ситуации, когда внешний вход $\varphi(\cdot)$ измеряется.

Теорема 1 *Для существования М-универсального регулятора (3) необходимо и достаточно, чтобы существовал хотя бы один стабилизирующий регулятор и при некоторой матричной рациональной функции* $X(\lambda)$, *аналитичной при* $Re\,\lambda \geq 0$, *было выполнено равенство*

$$B(\lambda)X(\lambda) = A(\lambda)W_m(\lambda) - F(\lambda). \tag{7}$$

Теорема 2 *Предположим, что* C_0, D_0 *– матричные полиномы размеров* $m\times n$, $m \times m$ *соответственно, такие что матричный полином*

$$\Xi_0(\lambda) = \begin{bmatrix} A(\lambda) & -B(\lambda) \\ -C_0(\lambda) & D_0(\lambda) \end{bmatrix}$$

является гурвицевым. Пусть $r(\lambda)$ *– матричный полином размера* $m \times n$, $\rho(\lambda)$ *– скалярный гурвицев полином, такие что* $\det(rB + \rho D_0) \not\equiv 0$, *и* $X(\lambda)$ *– рациональная матрица указанного в теореме 1 вида. Тогда регулятор (3), для которого*

$$C = rA + \rho C_0, \quad D = rB + \rho D_0, \quad G = -rF - \rho C_0 W_m + \rho D_0 X, \tag{8}$$

является М-универсальным, причем для этого регулятора $W_u = X$. *Любой М-универсальный регулятор для модели (2) Н-эквивалентен (при подходящих* r, ρ, X *вышеуказанного вида) регулятору (8).*

Доказательство теорем 1 и 2. Необходимость в теореме 1 доказана выше. В силу леммы 3 (и замечания к ней) из [7] любой стабилизирующий регулятор Н-эквивалентен некоторому регулятору вида (3), для которого $C = rA + \rho C_0$, $D = rB + \rho D_0$ (где полиномы r,ρ обладают перечисленными в формулировке теоремы 2 свойствами). Для регулятора указанного вида имеем

$$\begin{bmatrix} W_y \\ W_u \end{bmatrix} = \Xi_0^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \frac{1}{\rho}(G + rF) \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем, что такой регулятор М-универсален тогда и только тогда, когда $G = -rF - \rho C_0 W_m + \rho D_0 W_u$, причем $BW_u = AW_m - F$. Таким образом, М-универсальны те и только те регуляторы, которые Н-эквивалентны одному из регуляторов вида (8). ■

Следствие 1 *Для того, чтобы существовал М-универсальный регулятор при любой передаточной функции эталонной модели (2) $W_m = A_m^{-1} F_m$, необходимо, чтобы объект удовлетворял следующему условию "обобщенной минимальнофазовости":*

$$rk\, B(\lambda) = n = \dim y \quad \text{при } Re\,\lambda \geq 0. \tag{9}$$

(в частности, $m = \dim u \geq n = \dim y$).

Доказательство. Пусть для объекта (1) существует М-универсальный регулятор (3). Предположим, что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяют условиям $Re\,\lambda_0 \geq 0$ и $z_0^* B(\lambda_0) = 0$. Тогда из разрешимости уравнения (7) получаем, что модель должна удовлетворять условию $z_0^* A(\lambda_0) W_m(\lambda_0) = z_0^* F(\lambda_0)$. ■

Если $m = n$, то условие (9) означает гурвицевость матричного полинома $B(\lambda)$, то есть обычную минимальнофазовость объекта. При нарушении (9) М-универсальный регулятор может существовать только для некоторых передаточных функций W_m, коэффициенты которых образуют в пространстве всевозможных коэффициентов множество нулевой меры.

Следующая теорема показывает, что условие (9) и достаточно для существования М-универсального регулятора для эталонной модели (2), если имеется возможность измерять внешний сигнал $\varphi(t)$. Заметим, что (9) влечет существование такого $(m-n) \times m$-матричного полинома $B^+(\lambda)$, что матричный полином

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} B^+(\lambda) \\ B(\lambda) \end{bmatrix} \tag{10}$$

является гурвицевым (при $m = n$ компонента B^+ в (10) отсутствует).

Теорема 3 *Предположим, что выполнено условие (9) и $B^+(\lambda)$ выбирается так, что (10) – гурвицев матричный полином. Тогда существует М-универсальный регулятор. Пусть $r(\lambda) = \begin{bmatrix} r_1(\lambda) \\ r_2(\lambda) \end{bmatrix}$, где r_1, r_2 – $n \times n$-матричный и $(m-n) \times n$-матричный полиномы соответственно, $\det r_1 \not\equiv 0$. Пусть ρ – скалярный гурвицев полином и G_2 – матричный полином размера $(m-n) \times l$. Тогда регулятор (3), для которого выполнены соотношения*

$$D = rB + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ B^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ \rho I_{m-n} & r_2 \end{bmatrix} S, \quad C = rA + \rho \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -r_1 F - \rho W_m \\ G_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

является М-универсальным для эталонной модели (2). Любой М-универсальный регулятор Н-эквивалентен регулятору вида (11) при подходящих r, ρ, G_2 указанного вида.

Доказательство. Легко видеть, что матричные полиномы

$$C_0 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ B^+ \end{bmatrix}$$

(размеров $m \times n$, $m \times m$ соответственно) удовлетворяют условиям теоремы 2. В силу гурвицевости матричного полинома (10) для любого матричного полинома $P(\lambda)$ размера $(m-n)\times l$ найдется такая аналитичная при $Re\,\lambda \geq 0$ функция $X(\lambda)$, что выполнено (7) и $B^+X = P$. Таким образом, в виде D_0X, где X – некоторое решение (7), представимы матричные полиномы вида $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ P \end{smallmatrix}\right]$ и только они (здесь P обозначает произвольный $(m-n)\times l$ - матричный полином). В силу теоремы 1 получаем, что регулятор М-универсален тогда и только тогда, когда он Н-эквивалентен одному из регуляторов вида (11).■

В случае, когда $m = n$ и объект (1) минимальнофазовый (матричный полином B гурвицев), параметризация из теоремы 3 принимает более простой вид.

Теорема 4 *Предположим, что $m = n$ и $B(\lambda)$ – гурвицев матричный полином. Пусть $r(\lambda)$ – матричный полином размера $n \times n$, $\det r \not\equiv 0$, пусть ρ – скалярный гурвицев полином. Тогда регулятор (3), для которого выполнено*

$$D = rB, \quad C = rA - \rho I_n, \quad G = -rF - \rho W_m \tag{12}$$

является М-универсальным. Любой М-универсальный регулятор Н-эквивалентен регулятору вида (12) при подходящих r, ρ указанного вида.

Значительный интерес представляет вопрос о существовании М-универсального регулятора в том случае, когда внешний сигнал $\varphi(t)$ измерению недоступен, т.е. в (3) должно быть $G \equiv 0$. Необходимое, но, вообще говоря, не достаточное условие разрешимости задачи в этих условиях дает следующая лемма.

Лемма 1 *Пусть для эталонной модели (2) существует М-универсальный регулятор (3) с $G \equiv 0$. Тогда передаточная функция модели представима в* *виде* $W_m(\lambda) = Z(\lambda)F(\lambda)$, *где* $Z(\lambda)$ *– аналитичная при* $Re\,\lambda \geq 0$ *рациональная матрица размера* $n \times n$ *и* $\det Z \not\equiv 0$. *В частности, ранги матриц* W_m, F *над полем скалярных рациональных функций совпадают.*

Для доказательства достаточно взять произвольный М-универсальный регулятор $Du = Cy$ и воспользоваться тождествами

$$W_m = [I_n, 0] \left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ -C & D \end{smallmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{smallmatrix} I_n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] F, \quad \left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ -C & D \end{smallmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{smallmatrix} I_n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} \\ D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} \end{smallmatrix}\right]$$

Поскольку регулятор является стабилизирующим, то матрица

$$Z(\lambda) = [I_n, 0] \left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ -C & D \end{smallmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{smallmatrix} I_n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

удовлетворяет условиям леммы.■

В частности, лемма 1 показывает, что достичь *абсолютной инвариантности* (случай $W_m \equiv 0$) без измерения внешнего воздействия невозможно, за исключением тривиальной ситуации, когда $F \equiv 0$. Данный факт хорошо известен и был подкреплен многочисленными практическими примерами (см. например обзор [10]), другое его доказательство может быть найдено в [6].

Следующая теорема показывает, что в распространенном случае "обобщенно-минимальнофазового" объекта (удовлетворяющего (9)), это необходимое условие становится и достаточным.

Теорема 5 *Пусть объект управления (1) удовлетворяет условию (9). Для существования М-универсального регулятора (3) с* $G \equiv 0$ *необходимо и достаточно, чтобы передаточная функция модели была представима в виде* $W_m(\lambda) = Z(\lambda)F(\lambda)$, *где рациональная матрица* $Z(\lambda)$ *аналитична при* $Re\,\lambda \geq 0$ *и* $\det Z \not\equiv 0$. *Пусть матрица* $B^+(\lambda)$ *выбрана так, что (10) – гурвицев матричный полином. Представим одну из матриц* $Z(\lambda)$ *с указанными свойствами в виде* $Z(\lambda) = -\rho^{-1}(\lambda)r_1(\lambda)$, *где* r_1 *– матричный полином, а* $\rho(\lambda)$ *– скалярный гурвицев полином. Пусть* r_2 *– произвольный матричный полином размера* $(m-n) \times n$. *Тогда регулятор* $D(s)u(t) = C(s)y(t)$, *где*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ \rho I_{m-n} & r_2 \end{bmatrix} S, \quad C = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} A - \rho \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

является М-универсальным. Любой М-универсальный регулятор (3) с $G \equiv 0$ *Н-эквивалентен одному из регуляторов вида (13) при подходящем выборе* r_1, ρ *(то есть матрицы* Z*) и* r_2.

Доказательство. При указанном выборе r_1, r_2, ρ регулятор вида (13) лежит в семействе регуляторов (11) (для доказательства достаточно взять $G_2 \equiv 0$ и воспользоваться тем, что $\rho W_m = \rho Z F = -r_1 F$), следовательно, является М-универсальным. Обратно, пусть регулятор (3) с $G \equiv 0$ является М-универсальным. Тогда он Н-эквивалентен одному из регуляторов вида (11). Регулятор (11) не измеряет внешнее воздействие только в том случае, если $Z = -\rho^{-1} r_1 F$ и $G_2 \equiv 0$. Поскольку скалярный полином ρ гурвицев и $\det r_1 \not\equiv 0$, то матрица $Z = -\rho^{-1} r_1$ должна удовлетворять указанным в формулировке теоремы условиям.$\blacksquare$

Замечание. Пользуясь приведенными параметризациями, можно описать класс физически реализуемых (в различных смыслах, см. [2, 11]) М-универсальных регуляторов по аналогии с тем, как это сделано для задачи отслеживания в [8]. В частности, можно показать, что если объект управления удовлетворяет малоограничительным дополнительным предположениям, то реализуемые М-универсальные регуляторы существуют.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 05-01-00238, 05-01-00869.

Список литературы

[1] Ройтенберг Я.Н., *Автоматическое управление*, М., Наука, 1978

[2] Первозванский А.А., *Курс теории автоматического управления*, М., Наука, 1986

[3] *Справочник по теории автоматического управления* (под ред. Красовского А.А.) М., Наука, 1987

[4] Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. *Адаптивное управление динамическими объектами*, М., Наука, 1981

[5] Francis B.A. *Course in H_∞ control theory*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Tokyo, 1988

[6] Проскурников А.В., Якубович В.А.//ДАН, 2003, т.389, N6, с.742-746

[7] Проскурников А.В., Якубович В.А.//ДАН, 2004, т.397, N5, с.610-614

[8] Проскурников А.В., Якубович В.А.//ДАН, 2005, т.404, N3, с.321-325

[9] Yakubovich V.A. In: Trends in Control: A European Perspective, Alberto Isidory (eds.), Springer, 1995, pp.53-68.

[10] Кухтенко А.И. // Автоматика. 1984. N 2. С. 3–13; 1985. N 2. С 3–14; N 6. С. 3–14.

[11] Якубович В.А.//Авт. и телемех., 1984, N8, с.5-44