© 2005 г. **Д.В. ЕФИМОВ, канд.техн. наук,**
**А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук**

**(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)**

# УСЛОВИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ[1]

Предложены условия наличия свойства колебательности по Якубовичу у системы Лурье с нелинейной номинальной частью, охваченной статической нелинейной обратной связью по выходу. Разработана методика вычисления аналитических оценок на амплитуду колебаний в системе. Установлена связь между оценками на амплитуду колебаний и индексом возбудимости системы по входу. Приведены примеры компьютерного моделирования для систем 2-го и 3-го порядка, в том числе систем Ван-дер-Поля и Лоренца, подтверждающие применимость предложенных решений.

## 1. Введение

Большинство работ по анализу или синтезу нелинейных динамических систем касаются, в той или иной степени, проблемы устойчивости решений замкнутой системы. Результаты таких работ устанавливают близость решений системы к заданным предельным траекториям (положениям равновесия, предельным циклам), которые определяют желаемое поведение системы. Изучая и оценивая отклонение системы от желаемого предельного движения, можно получить качественную и количественную информацию о поведении системы [1, 2, 3].

В последние годы вырос интерес к задачам, где в качестве желаемого может выступать заранее не фиксированный хаотический или колебательный предельный режим движения системы. Это приводит к необходимости разработки методов и подходов к анализу и синтезу сложных нерегулярных колебательных движений. Классические решения в этой области, базирующиеся на использовании свойств орбитальной устойчивости, устойчивости по Жуковскому и устойчивости по части переменным, зачастую не позволяют получить полную количественную и качественную характеристику поведения системы для сложных нерегулярных колебаний [4, 5]. Один из возможных подходов к преодолению возникающих трудностей  основан на понятии индекса возбудимости нелинейной системы [6, 7]  и дает возможность, используя индекс возбудимости, оценить амплитуду колебаний в системе, возбуждаемой ограниченным управлением.

Другой важный и практически полезный подход к изучению сложных колебательных режимов движения основан на понятии колебательности, введенном в 1973 году В.А. Якубовичем [8]. В рамках этого подхода получены частотные условия колебательности для класса систем Лурье, состоящих из номинальной линейной части и нелинейной обратной связи по выходу, причем используемая для исследования системы функция Ляпунова строится на основе квадратичной формы переменных состояния линейной части [4, 8, 9].

Однако при изучении многих физических и механических процессов более естественной выглядит декомпозиция системы не на линейную и нелинейную части, а на две нелиней-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 02-01-00765), Фонда содействия отечественной науке и Программы Президиума РАН № 19 (проект 1.4).

ные части (например, сложные механические системы с функцией энергии, выполняющей роль функции Ляпунова системы). Развитие методов анализа и синтеза колебаний на такой класс систем – новая и перспективная задача современной теории управления.

Данная работа содержит один из возможных подходов к решению задачи обнаружения и возбуждения нерегулярных колебаний для класса нелинейных динамических систем, представленных соединением нелинейных подсистем. В разделе 2 представлены полезные вспомогательные определения и свойства (два предварительных результата и доказательства вынесены в Приложение). Основные определения и условия существования колебаний сформулированы в разделе 3. Раздел 4 содержит решение задачи синтеза статической обратной связи по выходу, гарантирующей возникновение колебаний в замкнутой системе с заданными ограничениями на амплитуду колебаний. Заключительные выводы и замечания собраны в разделе 5. Примеры, основанные на компьютерном моделировании сопровождают основные результаты работы.

## 2. Предварительные результаты

Пусть модель динамической системы представлена в виде

(1) $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\,;\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})\,,$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния системы; $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор входа; $\mathbf{y} \in R^p$ – вектор выхода; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ – локально Липшицевы непрерывные функции на $R^n$, $\mathbf{h}(0) = 0$ и $\mathbf{f}(0) = 0$. Решение $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t)$ системы (1) с начальными условиями $\mathbf{x}_0 \in R^n$ и входом $\mathbf{u}$ определено как минимум локально для $t \le T$, $T \ge 0$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}\big(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t)\big)$ (далее в работе символы $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ используются, если все остальные аргументы понятны из контекста). Если $T = +\infty$, то система обладает свойством продолжимости решений.

Говорят, что функция $\rho : R_{\ge 0} \to R_{\ge 0}$ принадлежит классу $\mathsf{K}$, если она строго возрастает и $\rho(0) = 0$; $\rho \in \mathsf{K}_\infty$, если $\rho \in \mathsf{K}$ и $\rho(s) \to \infty$ для $s \to \infty$ (свойство радиальной неограниченности); измеримая по Лебегу функция $\mathbf{x} : R_{\ge 0} \to R^n$ ограничена почти везде, если

$$\|\mathbf{x}\| = ess\sup\left\{|\mathbf{x}(t)|,\, t \ge 0\right\} < +\infty\,,$$

где $|\cdot|$ обозначает норму вектора в евклидовом пространстве, $R_{\ge 0} = \{\tau \in R : \tau \ge 0\}$. Следующее свойство с небольшими изменениями было введено в [10, 11].

Определение 1. *Система* (1) *называется пассивной с непрерывной функцией* $V : R^n \to R_{\ge 0}$ *и* $\beta : R^n \to R_{\ge 0}$, *если для* $\forall\, \mathbf{x}_0 \in R^n$ *и измеримого по Лебегу входа* $\mathbf{u} : R_{\ge 0} \to R^m$, $t \ge 0$, *выполнено неравенство*

(2) $$V\big(\mathbf{x}(t)\big) \le V(\mathbf{x}_0) + \int_0^t \omega\big(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \mathbf{u}(\tau)\big)\, d\tau\,,\ \omega(\mathbf{y},\mathbf{u}) = \mathbf{y}^T\mathbf{u} - \beta(\mathbf{x})\,.$$

*Функции* $\omega$ *и* $V$ *называются функциями расхода и запаса для системы* (1), *функция* $\beta$ *характеризует скорость диссипации в системе.* ■

Если $\beta(\mathbf{x}) \ge \hat{\beta}\big(|\mathbf{x}|\big)$, $\hat{\beta} \in \mathsf{K}$, то такая система называется *строго* пассивной. Если неравенство (2) может быть записано в форме равенства, то говорят, что система (1) наделена свойством пассивности с известной скоростью диссипации $\beta$. В случае непрерывной дифференцируемости функции запаса, неравенство (2) может быть переписано в более простой форме

$$\dot{V}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x}) \le \omega\big(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y}\big).$$

Следующие два свойства используются в работе для формулировки основных результатов в разделах 3 и 4.

О п р е д е л е н и е 2. *Система* (1) *называется* $h$*-диссипативной, если для нее существуют непрерывно дифференцируемая функция запаса* $V$, *функции* $\sigma \in \mathrm{K}$ *и* $\alpha, \underline{\alpha}, \overline{\alpha} \in \mathrm{K}_\infty$ *такие, что для* $\forall\ \mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$

$$\underline{\alpha}(|\mathbf{y}|) \le V(\mathbf{x}) \le \overline{\alpha}(|\mathbf{x}|),\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x}) \le -\alpha(|\mathbf{y}|) + \sigma(|\mathbf{u}|).$$ ■

Свойство $h$-диссипативности было введено в [12] с небольшими изменениями. В этом случае функция запаса $\omega(\mathbf{y},\mathbf{u}) = -\alpha(|\mathbf{y}|) + \sigma(|\mathbf{u}|)$. Важным примером такого вида систем служат $\mathbf{y}$-строго пассивные системы [11]. Пассивные системы (1) могут быть наделены свойством $h$-диссипативности с использованием подходящей статической обратной связи по выходу.

О п р е д е л е н и е 3 [13]. *Система* (1) *называется устойчивой от входа-выхода к вектору состояния* (УВВС)*, если для нее существует функция* $W$ *со следующими свойствами:*

1. *Существуют функции* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}_\infty$ *для которых*

$$\alpha_1(|\mathbf{x}|) \le W(\mathbf{x}) \le \alpha_2(|\mathbf{x}|) \text{ для } \forall\ \mathbf{x} \in R^n;$$

2. *Функция* $W$ *непрерывно дифференцируема, и существуют функции* $\alpha_3 \in \mathrm{K}_\infty$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{K}$ *такие, что для* $\forall\ \mathbf{x} \in R^n$, $\forall\ \mathbf{u} \in R^m$ *верно неравенство*

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}W(\mathbf{x}) \le -\alpha_3(|\mathbf{x}|) + \sigma_1(|\mathbf{u}|) + \sigma_2(|\mathbf{y}|).$$ ■

Функция $W$ с указанными свойствами называется УВВС-*функцией Ляпунова*. Если в определении 3 положить $\sigma_2(s) \equiv 0$, то оно редуцируется к формулировке свойства устойчивости от входа к вектору состояния (УВС) [14]. В этом случае для системы (1) существует УВС функция Ляпунова [15] – непрерывно дифференцируемая функция $U$, для которой выполнены следующие неравенства для всех $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{u} \in R^m$:

$$\alpha_4(|\mathbf{x}|) \le U(\mathbf{x}) \le \alpha_5(|\mathbf{x}|),\ \alpha_4, \alpha_5 \in \mathrm{K}_\infty;$$

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}U(\mathbf{x}) \le -\alpha_6(|\mathbf{x}|) + \delta(|\mathbf{u}|),\ \alpha_6 \in \mathrm{K}_\infty,\ \delta \in \mathrm{K}.$$

Связь свойств, введенных в определениях 2 и 3, и свойства УВС определена результатом леммы П.1 (см. Приложение), доказанной в [16] для случая более ограничительных требований к $h$-диссипативной функции запаса

$$\alpha_7(|\mathbf{x}|) \le V(\mathbf{x}) \le \alpha_8(|\mathbf{x}|),\ \alpha_7, \alpha_8 \in \mathrm{K}_\infty.$$

Наиболее общие результаты в этом направлении были получены в [2], где для системы (1) была доказана эквивалентность свойства УВС и свойств УВВС и устойчивости от входа к выходу (это свойство связано со свойством $h$-диссипативности, в [17] можно найти более подробную информацию об этом свойстве). Далее, основываясь на результате леммы П.1 и введенных свойствах, приступим к разработке условий существования колебаний в системе вида (1).

## 3. Условия существования колебаний

Определим значение термина “колебания”, поскольку нас интересуют прежде всего нерегулярные, непериодические колебания. Существует несколько подходов к определению и пониманию колебательных процессов для динамических нелинейных систем [18]. Результаты данной работы развивают подход, предложенный в [4, 8, 9], с модификациями, необходимыми для учета общности формы задания и высокой размерности системы (1) (в [4] рассматривалась классическая система Лурье со скалярным входом).

О п р е д е л е н и е 4. *Решение* $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0, t)$ *с* $\mathbf{x}_0 \in R^n$ *системы* (1) *называется* $\lfloor \pi^-, \pi^+ \rfloor$-

*колебанием по выходу* $\psi = \eta(\mathbf{x})$ *(где* $\eta : R^n \to R$ *– непрерывная функция), если решение системы* (1) *определено для всех* $t \ge 0$ *и*

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} \psi(t) = \pi^-; \ \overline{\lim}_{t \to +\infty} \psi(t) = \pi^+; \ -\infty < \pi^- < \pi^+ < +\infty .$$

*Решение* $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0, t)$ *для* $\mathbf{x}_0 \in R^n$ *системы* (1) *называется колебательным, если для него существует некоторый выход* $\psi$ *такой, что это решение является* $\lfloor \pi^-, \pi^+ \rfloor$*-колебанием по выходу* $\psi$ *для некоторых* $-\infty < \pi^- < \pi^+ < +\infty$. *Система* (1) *при* $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, $t \ge 0$, *называется колебательной, если почти для всех* $\mathbf{x}_0 \in R^n$ *решения системы* $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0, t)$ *колебательные.* ■

Термин "почти все" решения использован в определении в силу того, что в общем случае при $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, $t \ge 0$, система (1) имеет непустое множество положений равновесия, что означает существование множества начальных условий нулевой меры, для которых соответствующее решение не будет колебанием. Стоит выделить тот факт, что константы $\pi^-$ и $\pi^+$ являются точными минимальным и максимальным значениями выхода $\psi(t)$ в асимптотике. Следовательно, для вычисления этих величин необходимы точные оценки на решения системы, что является трудно разрешимой задачей для системы общего вида (1). Однако информации о приблизительных значениях величин $\pi^-$ и $\pi^+$ достаточно для получения оценок на амплитуду колебаний в системе (конечно, необходима дополнительная информация о том, что эти константы не равны друг другу). Свойство колебательности, сформулированное в определении 4, представлено для нулевого входа и произвольных начальных условий в системе (1). Следующее свойство развивает уже введенное на случай ненулевого входа для заданных начальных условий [7].

Определение 5. *Пусть* $\mathbf{u} : R_{\ge 0} \to R^m$ *– измеримые по Лебегу и ограниченные почти везде функции времени* $t \ge 0$ *и* $\mathbf{x}_0 \in R^n$ *такие, что* $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t)$ *определено для всех* $t \ge 0$. *Тогда функции* $\chi_\psi^-(\gamma)$, $\chi_\psi^+(\gamma)$, *называемые нижним и верхним индексами возбудимости системы* (1) *в точке* $\mathbf{x}_0$ *по выходу* $\psi = \eta(\mathbf{x})$ *(где* $\eta : R^n \to R$ *– некоторая непрерывная функция), определяются для* $0 \le \gamma < +\infty$ *следующим образом*

$$\left(\chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^-(\gamma), \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^+(\gamma)\right) = \arg\sup_{(a,b)\in \mathrm{E}(\gamma)} \{b - a\},$$

$$\mathrm{E}(\gamma) = \left\{ (a,b) = \begin{pmatrix} \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^-(\mathbf{u}) = \underline{\lim}_{t\to+\infty} \eta(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,\mathbf{u},t)), \\ \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^+(\mathbf{u}) = \overline{\lim}_{t\to+\infty} \eta(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0,\mathbf{u},t)) \end{pmatrix} \right\}_{\|\mathbf{u}\| \le \gamma} .$$

*Нижний и верхний индексы возбудимости по выходу* $\psi$ *для системы* (1)*, обладающей свойством продолжимости решений, определяются как*

$$\chi_\psi^-(\gamma) = \inf_{\mathbf{x}_0 \in R^n} \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^-(\gamma), \ \chi_\psi^+(\gamma) = \sup_{\mathbf{x}_0 \in R^n} \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^+(\gamma)$$

*(в предположении, что введенные величины конечны).* ■

Аналогично можно ввести индексы возбудимости по произвольному векторному выходу $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$, в этом случае размерность индексов будет совпадать с размерностью вектора $\boldsymbol{\psi}$. Последнее свойство было введено только для фиксированных начальных условий в силу того, что для произвольных начальных условий индексы возбудимости могут иметь сложную форму зависимости от нормы входа. Например, если $\chi^{+}_{\psi,\mathbf{x}_a}(\gamma)=+\infty$ для $\mathbf{x}_a \in A \subset R^n$ при выбранном $\gamma$, то по аналогии можно ввести в рассмотрение индексы возбудимости на заданном множестве $R^n / A$.

Индексы возбудимости также характеризует выполнение равенств $\pi^{-}=\chi^{-}_{\psi}(0)$ и $\pi^{+}=\chi^{+}_{\psi}(0)$. Для ненулевого входа значение $\chi^{+}_{\psi}(\gamma)-\chi^{-}_{\psi}(\gamma)$ соответствует максимальной (на заданном множестве входов $\|\mathbf{u}\|\le\gamma$) асимптотической амплитуде сигнала $\psi$. Следовательно, индексы возбудимости характеризуют способность системы к вынужденным или управляемым колебаниям, вызванным входом, ограниченным величиной $\gamma$. Максимум по всем допустимым входам с заданной амплитудой использован в определении 5 в силу того, что в общем случае всегда можно найти для данной системы некоторый вход с заданной максимальной амплитудой, разрушающий ее колебательные свойства (одни сигналы на входе системы могут возбуждать её, другие стабилизировать).

Стоит подчеркнуть целесообразность вычисления оценок значений $\chi^{-}_{\psi}(\gamma)$ и $\chi^{+}_{\psi}(\gamma)$ для всех величин $0\le\gamma<+\infty$. Действительно, пусть для данной системы максимальная амплитуда колебаний достигается для некоторого уровня входного сигнала $\gamma^*$ и для всех $\gamma\ge\gamma^*$ амплитуда колебаний убывает, однако индексы $\chi^{-}_{\psi}(\gamma)$ и $\chi^{+}_{\psi}(\gamma)$ сохранят свои значения. Следовательно, для определения критического уровня $\gamma^*$ входного воздействия необходимо построить полные графики функций $\chi^{-}_{\psi}(\gamma)$ и $\chi^{+}_{\psi}(\gamma)$. Полученная характеристика оказывается тесно связанной с исследованным недавно в [19] (для задачи подавления колебаний) коэффициентом Коши (Cauchy gain). Действительно, $\pi^{+}-\pi^{-}$ или $\chi^{+}_{\psi,\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})-\chi^{-}_{\psi,\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})$ являются асимптотическими амплитудами сигнала $\psi(t)$ в смысле [19] для случаев нулевого и отличного от нуля входа $\mathbf{u}$, в то время как $\chi^{+}_{\psi}(\gamma)$ служит оценкой коэффициента Коши для системы (1).

С другой стороны, индексы возбудимости характеризуют робастность свойства колебательности, введенного в определении 4, в следующем смысле. Если для некоторых $0<\gamma^*\le\gamma<+\infty$ выполнено $\chi^{-}_{\psi}(\gamma)=\chi^{+}_{\psi}(\gamma)$, то это означает потерю системой свойства колебательности для входных сигналов с амплитудой большей $\gamma^*$. Однако отсюда не следует, что любой вход (с амплитудой большей $\gamma^*$) разрушает колебания в системе в силу того, что в определении 5 ищется максимум по всем входам. Аналогичный вывод верен для случая $\chi^{+}_{\psi}(\gamma)=+\infty$. Условия существования колебаний в системе (1) сформулированы в следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Пусть для системы* (1) *существуют две непрерывно дифференцируемые функции Ляпунова* $V_1 : R^n \to R_{\ge 0}$ *и* $V_2 : R^n \to R_{\ge 0}$, *удовлетворяющие неравенствам:*

$$\upsilon_1(|\mathbf{x}|)\le V_1(\mathbf{x})\le\upsilon_2(|\mathbf{x}|),\ \upsilon_3(|\mathbf{x}|)\le V_2(\mathbf{x})\le\upsilon_4(|\mathbf{x}|),\ \upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\upsilon_4\in\mathcal{K}_\infty,$$

$$l_1(\mathbf{x},\mathbf{u})\le L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V_1(\mathbf{x}),\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V_2(\mathbf{x})\le l_2(\mathbf{x},\mathbf{u}).$$

*Пусть решения системы со статической обратной связью* $\mathbf{u}=\mathbf{k}(\mathbf{x})$ *определены как минимум локально и*

$$l_1(\mathbf{x},\mathbf{k}(\mathbf{x}))>0 \text{ для } 0<|\mathbf{x}|<X_1 \text{ и } \mathbf{x}\notin\Xi;$$

$$l_2(\mathbf{x},\mathbf{k}(\mathbf{x}))<0 \text{ для } |\mathbf{x}|>X_2 \text{ и } \mathbf{x}\notin\Xi,\ X_1<\upsilon_1^{-1}\circ\upsilon_2\circ\upsilon_3^{-1}\circ\upsilon_4(X_2),$$

*где* $\Xi \subset R^n$ *– некоторое множество нулевой меры. Если множество*

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} : \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1) < |\mathbf{x}| < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2) \right\}$$

*не содержит положений равновесия замкнутой системы* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$, *то система является колебательной.*

Доказательство. Ограничимся при анализе свойств системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$ множеством начальных значений вектора состояния, не содержащим положения равновесия системы (которые образуют множество $\Xi$). Тогда согласно условиям теоремы решения системы определены как минимум локально, и из условия

$$\dot{V}_2 < 0 \text{ для } |\mathbf{x}| > X_2$$

следует глобальная ограниченность решений системы (определенных в этом случае для всех $t \geq 0$). В силу ограниченности траектории $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, для нее существует непустое компактное и замкнутое $\omega$-предельное множество, содержащееся в множестве $\Omega$. Действительно, функция $V_2(t)$ асимптотически удовлетворяет неравенству $V_2(t) < \upsilon_4(X_2)$ при $|\mathbf{x}(t)| < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2)$. Используя аналогичные рассуждения, можно показать свойство ограниченности сверху функции $V_1(t)$, чьи значения в асимптотике удовлетворяют оценке $V_1(t) > \upsilon_1(X_1)$, откуда $|\mathbf{x}(t)| > \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1)$. По предположению множество $\Omega$ не содержит положений равновесия замкнутой системы, следовательно, $\omega$-предельное множество траектории $\mathbf{x}(t)$ также не включает в себя таких инвариантных подмножеств. Тогда существует индекс $i$, $1 \leq i \leq n$, такой, что решение является $\lfloor \pi^-, \pi^+ \rfloor$-колебанием по выходу $\psi = |x_i|$ для $\upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1) < \pi^- < \pi^+ < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2)$. Предположим, что не существует такого выхода, это означает, что для всех $1 \leq i \leq n$ для $\psi = |x_i|$ выполнено равенство $\pi^- = \pi^+$. Однако подобное может быть выполнено только для положений равновесия, которые по предположению исключены из множества $\Omega$, что является противоречием. Следовательно, для почти всех начальных условий существует колебательный выход, что по Определению 4 означает колебательность системы (1) с обратной связью $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$. ■

Замечание 1. Как и в [9] можно использовать функцию Ляпунова для линеаризованной в окрестности начала координат системы в качестве функции $V_1$ для определения свойства локальной неустойчивости системы в нуле. Далее, требование существования функции Ляпунова $V_2$ может быть сведено к свойству ограниченности решений системы $\mathbf{x}(t)$ с известной верхней границей, которая может быть оценена с использованием других подходов, не касающихся анализа свойств производной по времени некоторых функций Ляпунова. В этом случае утверждение теоремы 1 может быть приближено к результату теоремы 3.4 из [20]. ■

Рис. 1.

Пример 1. Рассмотрим модель Ван-дер-Поля:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2,$$

где параметр $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 1 для проверки этой системы на наличие свойства колебательности необходимо построить две функции Ляпунова, позволяющие установить локальную неустойчивость и глобальную ограниченность решений системы. Отметим, что данная система имеет только одно положение равновесия в начале координат, следовательно, множество $\Omega$ не будет содержать данное положение равновесия. Проанализируем свойства следующих функций Ляпунова:

$$V_1(\mathbf{x}) = 0{,}5\left(x_1^2 + x_2^2\right);$$

$$V_2(\mathbf{x}) = 0{,}5\left(\varepsilon^{-1}x_2 - 2x_1 + 1/3\,x_1^3\right)^2 + 1/12\,x_1^4,$$

чьи полные производные по времени, взятые в силу уравнений системы, имеют вид:

$$\dot{V}_1 = \varepsilon x_2^2 - \varepsilon x_2^2 x_1^2;$$

$$\dot{V}_2 = -\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\left(2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right]^2 - \frac{x_1^4}{3\varepsilon} + \left[\frac{\varepsilon}{4}\left(2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{2}{\varepsilon}\right]x_1^2.$$

Функция $\dot{V}_1$ является строго положительной для всех $0 < |x_1| < 1$ и $x_2 \neq 0$, однако подмногообразие $x_2 = 0$ не содержит инвариантных решений системы вне положения равновесия в начале координат, следовательно, $\dot{V}_1(t) > 0$ для почти всех $t \geq 0$ таких, что $0 < |x_1(t)| < 1$ и

$$|\mathbf{x}| < X_1 \Rightarrow \dot{V}_1 \geq 0,$$

где $X_1 = 1$. Отметим, что схожие выводы были получены в [21] для $X_1 = \sqrt{3}$. Локальная неустойчивость также может быть обоснована с использованием свойств линеаризованной системы, чьи собственные числа всегда имеют положительную вещественную часть для $\varepsilon > 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}.$$

Исследуя функцию $\dot{V}_2$, можно получить неравенство

$$X_2 \leq \sqrt{3\left[\frac{\varepsilon^2}{4}\left(2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + 2\right]}.$$

В этом примере функции $\upsilon_1(s) = \upsilon_2(s) = 0{,}5s^2$, функции $\upsilon_3(s)$ и $\upsilon_4(s)$ могут быть построены численно для данного значения $\varepsilon$. Результаты расчета множества $\Omega$ и компьютерного моделирования траекторий системы для $\varepsilon = 1$ представлены на рис. 1, где черные окружности определяют размер и форму множества $\Omega$. Отметим, что в [22] для системы Вандер-Поля была предложена не квадратичная функция Ляпунова с разрывной производной по времени. □

П р и м е р 2. Рассмотрим модель системы Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x);$$
$$\dot{y} = rx - y - xz;$$
$$\dot{z} = -bz + xy,$$

где параметры $\sigma = 10$, $r = 97$ и $b = 8/3$. Известно, что у выбранной модели при заданных значениях параметров наблюдается хаотический режим движения. Продемонстрируем применение Теоремы 1 на примере этой системы. Прежде всего отметим, что матрица линейной аппроксимации системы в начале координат

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

имеет при выбранных значениях параметров одно собственное число с положительной вещественной частью. Следовательно, система локально неустойчива. Проанализируем полную производную по времени от функции

$$V(x,y,z) = 0{,}5\left(\sigma^{-1}x^2 + y^2 + (z - r)^2\right).$$

Для производной в силу рассматриваемой системы имеет место неравенство

$$\dot{V} = -x^2 + xy - y^2 - bz^2 + rbz \leq -0{,}5x^2 - 0{,}5y^2 - 0{,}5bz^2 + 0{,}5br^2,$$

откуда следует глобальная ограниченность траекторий системы. Согласно замечанию 1, все требования теоремы 1 удовлетворены, и данная система является колебательной в смысле определения 4. Пример фазовой траектории приведен на рис. 2. □

Рис. 2.

Отметим, что свойства из определения 4 были введены для нулевого входа $\mathbf{u} = 0$, однако в теореме 1 использовалась система с управлением $\mathbf{k}$. Существуют две причины упоминания обратной связи в формулировке Теоремы 1. Во-первых, это позволяет указать на один из возможных подходов к применению данных результатов на практике, основанный на декомпозиции исходной системы на номинальную часть и статическую обратную связь. Во-вторых, подобная формулировка результата облегчает установление связи между колебательностью и индексом возбудимости системы, как это сделано в следующем следствии.

Следствие 1. *Пусть для системы* (1) *выполнены все условия Теоремы* 1 *и решение* $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{k}(\mathbf{x}), t)$, $\mathbf{x}_0 \in R^n$, *является* $\left\lfloor \pi^-, \pi^+ \right\rfloor$*-колебанием относительно некоторого выхода* $\psi = \eta(\mathbf{x})$ *в смысле определения 4, тогда*

$$\pi^+ - \pi^- \le \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2) - \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1)\ , \pi^+ - \pi^- \le \chi^+_{\psi,\mathbf{x}_0}(\gamma) - \chi^-_{\psi,\mathbf{x}_0}(\gamma),$$

*где* $\gamma \ge \gamma^*$, $\gamma^* = \sup\limits_{|\mathbf{x}| \le \Gamma} |\mathbf{k}(\mathbf{x})|$, $\Gamma = \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4\left(\max\left\{X_2, |\mathbf{x}_0|\right\}\right)$.

Доказательство. Согласно результатам теоремы 1 решение системы (1) с обратной связью $\mathbf{k}$ удовлетворяет ограничению $|\mathbf{x}(t)| \le \Gamma$ для всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ и $t \ge 0$. Тогда вход $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ ограничен сверху величиной $\gamma^*$, и результат следует из определений 4 и 5. ■

Следовательно, для вычисления оценок индексов возбудимости достаточно найти некоторое управление $\mathbf{k}$ для системы (1), гарантирующее колебательность замкнутой системе.

При доказательстве теоремы 1 норма компоненты вектора состояния системы была предложена в качестве примера колебательного выхода, однако наличие подобного выхода не позволяет полностью раскрыть все особенности колебаний, наблюдаемых в системе. Это является одним из недостатков предложенного решения, так как результат не дает ограничений на множество возможных колебательных переменных в системе. Для преодоления этого недостатка можно переформулировать утверждение теоремы 1 на случай колебательности по выходу $\mathbf{y}$ следующим образом:

$$\upsilon_1(|\mathbf{y}|) \le V_1(\mathbf{x}) \le \upsilon_2(|\mathbf{y}|),\ \upsilon_3(|\mathbf{y}|) \le V_2(\mathbf{x}) \le \upsilon_4(|\mathbf{y}|),$$

$$l_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x})) > 0 \text{ для } 0 < |\mathbf{y}| < Y_1;$$

$$l_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x})) < 0 \text{ для } |\mathbf{y}| > Y_2,\ Y_1 < \upsilon_1^{-1} \circ \upsilon_2 \circ \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(Y_2),$$

и множество $\Omega = \left\{\mathbf{y} : \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(Y_1) < |\mathbf{y}| < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(Y_2)\right\}$. В этом случае система является колебательной, если данное множество не содержит положений равновесия системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$. Более конструктивный результат, определяющий состав колебательных переменных в системе, сформулирован ниже.

Лемма 1. *Пусть система* (1) *удовлетворяет всем условиям леммы* П.1. *Предположим, что статическая обратная связь* $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, *где* $\mathbf{k} : R^n \to R^m$ *– некоторая функция, гарантирующая локальное существование решений у замкнутой системы, удовлетворяет условиям*

i) $\alpha_6(|\mathbf{x}|) > \delta(|\mathbf{k}(\mathbf{x})|)$ *для* $|\mathbf{x}| > X \ge 0$ *и* $\mathbf{x} \notin \Xi$;

ii) $l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})} V(\mathbf{x})$, $l(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x})) > 0$ *для* $0 < |\mathbf{h}(\mathbf{x})| \le Y$ *и* $\mathbf{x} \notin \Xi$

*для некоторых постоянных* $X, Y$ *с условием* $Y < \underline{\alpha}^{-1} \circ \overline{\alpha} \circ \alpha_4^{-1} \circ \alpha_5(X)$ (*здесь функции* $\alpha_4$, $\alpha_5, \alpha_6$ *и* $\delta$ *вычисляются в процессе доказательства Леммы* П.1), *множество* $\Xi \subset R^n$ *– ну-*

*левой меры. Если множество* $\Omega=\left\{V(\mathbf{x}):\underline{\alpha}(Y)\le V(\mathbf{x})\le\overline{\alpha}\circ\alpha_4^{-1}\circ\alpha_5(X)\right\}$ *не содержит положений равновесия замкнутой системы* $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}\big(\mathbf{x},\mathbf{k}(\mathbf{x})\big)$, *то эта система наделена свойством колебательности.*

Доказательство. В этом случае система наделена свойством УВС по входу $\mathbf{u}$ и согласно условию (i) решение замкнутой системы ограничено и, следовательно, определено для всех $t\ge 0$. Как и ранее, переменные $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ имеют непустые замкнутые и компактные $\omega$-предельные множества и удовлетворяют оценке (вид функций $\alpha_4$ и $\alpha_5$ представлен в формулировке леммы П.1):

$$\left|\mathbf{x}\right|\le\alpha_4^{-1}\circ\alpha_5(X).$$

Используя условие (ii) леммы, можно обосновать выполнение неравенства $\dot{V}>0$ для малых $0<\left|\mathbf{y}\right|\le Y$. Тогда множество $\omega$-предельных траекторий для функции $V(t)$ содержится в множестве $\Omega$. Далее, повторяя финальные шаги доказательства Теоремы 1, можно обосновать утверждение леммы. ■

Здесь функция $V$ зависит только от части переменных, что ограничивает множество колебательных переменных в системе и, дополнительно указывает один из возможных подходов к построению функций $V_1$ и $V_2$ из теоремы 1. Результаты предложенных теоремы 1 и леммы 1 не касаются способов формирования закона обратной связи $\mathbf{k}$, гарантирующей существование в системе колебательных режимов движения с желаемыми параметрами. Данной проблеме посвящен материал следующего раздела.

## 4. Управление колебательными режимами

Материалы этого раздела базируются на результатах леммы П.2, являющейся следствием леммы П1 (в лемме П.2 сформулированы условия, при которых статическая обратная связь гарантирует свойство УВС для УВВС и пассивной системы). Условия, наложенные на закон управления $\mathbf{k}$ в лемме П.2, имеют сложную математическую формулировку, однако их проверка для данной системы не вызывает затруднений. Например если $\sigma_1$ и $\sigma_2$ являются квадратичными функциями своих аргументов, то управление $\mathbf{k}$ с линейным коэффициентом роста относительно $\mathbf{y}$ удовлетворяет всем ограничениям леммы. Основной результат данного раздела представлен в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *является пассивной с известной скоростью диссипации* $\beta$ *и* УВВС *в смысле определений* 1, 3. *Тогда закон управления*

$$\mathbf{u}=-\mathbf{k}(\mathbf{x})+\mathbf{d};\ \left|\mathbf{k}(\mathbf{x})\right|\le\lambda\big(\left|\mathbf{y}\right|\big)+K,\ \lambda\in\mathsf{K},\ 0<K<+\infty;$$

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}(\mathbf{x})+\beta(\mathbf{x})+\mu\big(\left|\mathbf{d}\right|\big)+\mu(K)\ge\kappa\big(\left|\mathbf{y}\right|\big)+\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{d},\ \kappa\in\mathsf{K}_\infty,\ \mu\in\mathsf{K};$$

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\sigma_2(s)+\sigma_1\circ\lambda(s)}{\kappa(s)}<+\infty;$$

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}(\mathbf{x})>\beta(\mathbf{x})\ \textit{для}\ 0<\left|\mathbf{y}\right|<Y<+\infty,\ Y<\underline{\alpha}^{-1}\circ\overline{\alpha}\circ\alpha_4^{-1}\circ\alpha_5\circ\alpha_6^{-1}\circ\delta(K),$$

*где* $\mathbf{d}\in R^m$ *– новый вектор входа замкнутой системы (измеримая по Лебегу и ограниченная почти везде функция времени), гарантирует*

i) *ограниченность решений замкнутой системы;*

ii) *если множество* $\Omega=\left\{V(\mathbf{x}):\underline{\alpha}(Y)\le V(\mathbf{x})\le\overline{\alpha}\circ\alpha_4^{-1}\circ\alpha_5\circ\alpha_6^{-1}\circ\delta(K)\right\}$ *не содержит положений равновесия системы* $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}\big(\mathbf{x},-\mathbf{k}(\mathbf{x})\big)$, *то для* $\mathbf{d}(t)\equiv 0$, $t\ge 0$, *замкнутая система обладает свойством колебательности (здесь функции* $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ *и* $\delta$ *получены при доказательстве леммы* П.2*).*

Доказательство. Рассмотрим следующее разбиение закона управления

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$$

на два аддитивных члена, удовлетворяющих условиям:

$$|\mathbf{k}_1(\mathbf{x})| \le \lambda(|\mathbf{y}|),\ |\mathbf{k}_2(\mathbf{x})| \le K;$$

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) + \mu(|\mathbf{d}|) \ge \kappa(|\mathbf{y}|) + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{d};$$

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_2(\mathbf{x}) > \beta(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) \text{ для } 0 < |\mathbf{y}| < Y < +\infty.$$

Подобное разбиение соответствует всем условиям теоремы. Введем вспомогательный вектор входа

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + \mathbf{k}_2(\mathbf{x}),$$

ограниченный почти для всех $t \ge 0$ по условиям теоремы $\|\tilde{\mathbf{d}}\| \le K + \|\mathbf{d}\|$. Можно отметить, что в новых обозначениях для системы (1) и управления

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{d}}$$

выполнены все условия леммы П.2, и замкнутая система является УВС по входу $\tilde{\mathbf{d}}$. Из ограниченности $\tilde{\mathbf{d}}$ для УВС системы следует ограниченность решений [14], и утверждение (i) теоремы доказано. Для доказательства утверждения (ii) отметим, что также верны все условия леммы 1. ■

Предложенная теорема расширяет результаты [23] на случай нелинейной динамической системы общего вида. Дополнительно в данной статье уделено специальное внимание нижней оценке амплитуды колебаний в системе при $\mathbf{d}(t) \equiv 0$, $t \ge 0$. Целесообразно подчеркнуть, что управление, предложенное в теореме, выбирается исходя из выполнения некоторых секторных ограничений относительно выхода $\mathbf{y}$, и в этом случае возможно использовать метод скоростного градиента [1, 24] для синтеза законов управления в практических приложениях.

Пример 3. Рассмотрим следующую модель линейной управляемой системы

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u,$$

наделенной свойством пассивности относительно функции запаса

$$V(\mathbf{x}) = 0{,}5\left(x_1^2 + x_2^2\right),\ \dot{V} = x_2 u,$$

и УВВС с соответствующей функцией Ляпунова

$$W(\mathbf{x}) = 0{,}5\left(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2\right),\ \dot{W} \le -0{,}5\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_2^2 + u^2$$

по выходу $y = x_2$ ($\sigma_1(s) = \sigma_2(s) = s^2$). В этом случае управление $u = -k_1(\mathbf{x}) + k_2(\mathbf{x})$ при $k_1(\mathbf{x}) = a x_2$, $a > 0{,}5$, и $k_2(\mathbf{x}) = K\,\mathrm{sign}(x_2)$ отвечает всем условиям Теоремы 2 для

$$\lambda(s) = as,\ \kappa(s) = (a - 0{,}5)s^2,\ \mu(s) = 0{,}5s^2.$$

Все функции $\sigma_2$, $\sigma_1 \circ \lambda$ и $\kappa$ являются квадратичными и, следовательно,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\sigma_2(s) + \sigma_1 \circ \lambda(s)}{\kappa(s)} < +\infty;$$

неравенство

$$x_2 k_2(\mathbf{x}) > x_2 k_1(\mathbf{x})$$

выполнено для $0 < |x_2| < Y = K/a$. Данная система является УВС для управления $u = -k_1(\mathbf{x}) + d$ с УВС функцией Ляпунова:

$$U(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) + \frac{1 + 2a^2}{a - 0{,}5}V(\mathbf{x}),\ \dot{U} \le -0{,}5\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \left(2 + \frac{0{,}5 + a^2}{a - 0{,}5}\right)d^2.$$

В этом случае множество $\Omega = \left\{ \mathbf{x} : K / a \le |\mathbf{x}| \le \sqrt{1 + \frac{1{,}5a - 0{,}75}{a^2 + 0{,}5}} \sqrt{4 + \frac{1 + 2a^2}{a - 0{,}5}} K \right\}$ всегда не пусто и не содержит положений равновесия системы. Результаты моделирования и границы множества $\Omega$ представлены на рис. 3 для $a = 1$ и $K = 1/3$. □

Рис. 3.

Для случая, когда входной сигнал $\mathbf{d}$ отличен от нуля, можно, используя результаты теоремы 2 и следствия 1, получить оценки для индекса возбудимости замкнутой системы.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия Теоремы 2. Тогда для* $\|\mathbf{d}\| \le \gamma < +\infty$

$$0 \le \chi_V^-(\gamma) \le \chi_V^+(\gamma) \le \overline{\alpha} \circ \alpha_4^{-1} \circ \alpha_5 \circ \alpha_6^{-1} \circ \delta(K + \gamma).$$

*Если дополнительно*

(3) $$\mathbf{y}(t)^{\mathrm{T}} \mathbf{d}(t) \ge 0 \; \textit{для всех} \; t \ge 0,$$

*то*

$$\underline{\alpha}(Y) \le \chi_V^-(\gamma) < \chi_V^+(\gamma) \le \overline{\alpha} \circ \alpha_4^{-1} \circ \alpha_5 \circ \alpha_6^{-1} \circ \delta(K + \gamma).$$

Доказательство. Верхняя оценка на индексы возбудимости следует из свойства УВС по входу $\tilde{\mathbf{d}}$ (свойство предельной ограниченности (asymptotic gain) в [25]). Проанализируем свойства производной функции $V$ по времени:

$$\dot{V} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{d}\right) - \beta(\mathbf{x}) \ge \left\lfloor \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x})\right) - \beta(\mathbf{x}) \right\rfloor + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}.$$

Согласно условиям Теоремы 2, выражение в квадратных скобках положительно для $0 < |\mathbf{y}| < Y < +\infty$, однако в силу присутствия знакопеременного члена $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}$ только выполнение неравенства $0 \le \chi_V^-(\gamma) \le \chi_V^+(\gamma)$ может быть обосновано в общем случае. Если дополнительно, $\mathbf{y}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{d}(t) \ge 0$ для всех $t \ge 0$, то

$$\left\lfloor \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x})\right) - \beta(\mathbf{x}) \right\rfloor + \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \ge \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x})\right) - \beta(\mathbf{x}),$$

и желаемый результат может быть получен, используя аргументы, аналогичные представленным при доказательстве теоремы 2. Далее предположим, что возможна ситуация $\chi_V^-(\gamma) = \chi_V^+(\gamma)$ для некоторого $\gamma$. Однако согласно определению 5 индексы возбудимости должны удовлетворять ограничениям:

$$\gamma_1 \le \gamma_2 \Rightarrow \chi_V^-(\gamma_2) \le \chi_V^-(\gamma_1) \text{ и } \chi_V^+(\gamma_1) \le \chi_V^+(\gamma_2).$$

Используя идеи доказательства Следствия 1, можно получить неравенство

$$0 < \chi_V^+(0) - \chi_V^-(0) \le \overline{\alpha} \circ \alpha_4^{-1} \circ \alpha_5 \circ \alpha_6^{-1} \circ \delta(K) - \underline{\alpha}(Y),$$

следовательно, неравенство $\chi_V^+(\gamma) - \chi_V^-(\gamma) > 0$ также верно для любого $\gamma \ge 0$. ■

Таким образом, значение индекса $\chi_V^+(\gamma)$ всегда ограничено сверху, более того, нижний и верхний индексы возбудимости не равны друг другу для любого $\gamma \in R_{\ge 0}$ при условии (3). Следовательно, система не способна потерять свойство колебательности для любого произвольно большого возмущающего входа $\mathbf{d}$, удовлетворяющего условию "согласованности" (3). Кроме того, подобные входные воздействия не приводят к образованию новых положений равновесия у системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{d}\right)$ на множестве $\Omega = \left\{ V(\mathbf{x}) : \underline{\alpha}(Y) \le V(\mathbf{x}) \le \overline{\alpha} \circ \alpha_4^{-1} \circ \alpha_5(K + \gamma) \right\}$. Целесообразно отметить, что требование выполнения условия (3) для всех $t \ge 0$ может быть ослаблено и сформулировано в виде $t \ge T$, где $0 \le T < +\infty$.

## 5. Заключение

В работе предложены условия колебательности по Якубовичу, применимые для нелинейных систем, разбитых на две нелинейные части. Получены оценки амплитуды колебаний в системе и проанализирована связь между понятиями колебательности и индексами возбудимости. Описан класс законов управления в виде обратной связи по состоянию, гарантирующий колебательность предельных режимов. Применимость полученных результатов продемонстрирована на примере анализа свойства колебательности систем Ван-дер-Поля и Лоренца. В качестве вспомогательного результата отметим предложенную неквадратичную функцию Ляпунова, гарантирующую ограниченность решений системы Ван-дер-Поля.

## Приложение

Л е м м а П. 1. *Пусть для системы* (1) *известны* УВС *функция Ляпунова* $W$ *и функция запаса* $V$ *для свойства* $h$ *-диссипативности как в Определениях* 2 *и* 3. *Если*

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\sigma_2(s)}{\alpha(s)}<+\infty,$$

*то система* (1) *наделена свойством* УВС.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условиям Леммы и Определениям 2 и 3 выполнены следующие неравенства для всех $\mathbf{x}\in R^n$ и $\mathbf{u}\in R^m$:

$$\alpha_1(|\mathbf{x}|)\le W(\mathbf{x})\le\alpha_2(|\mathbf{x}|);\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}W(\mathbf{x})\le-\alpha_3(|\mathbf{x}|)+\sigma_1(|\mathbf{u}|)+\sigma_2(|\mathbf{y}|);$$

$$\underline{\alpha}(|\mathbf{y}|)\le V(\mathbf{x})\le\overline{\alpha}(|\mathbf{x}|);\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x})\le-\alpha(|\mathbf{y}|)+\sigma(|\mathbf{u}|),$$

где $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\underline{\alpha},\overline{\alpha}\in\mathrm{K}_\infty$ и $\sigma,\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{K}$. Сконструируем новую УВВС функцию Ляпунова следующим образом

$$\widetilde{W}(\mathbf{x})=\rho(W(\mathbf{x})),\ \rho(r)=\int_0^r q(s)\,ds,$$

где $q$ некоторая функция из класса $\mathrm{K}$, которая будет определена позднее. По построению функция $\widetilde{W}$ является непрерывно дифференцируемой, положительно определенной и радиально неограниченной в силу $\rho\in\mathrm{K}_\infty$. Её производная по времени удовлетворяет неравенству

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}\widetilde{W}(\mathbf{x})\le q(W(\mathbf{x}))\left[-\alpha_3(|\mathbf{x}|)+\sigma_1(|\mathbf{u}|)+\sigma_2(|\mathbf{y}|)\right].$$

Для раскрытия левой части неравенства рассмотрим последовательно три ситуации:

1) $0{,}5\alpha_3(|\mathbf{x}|)\ge\sigma_1(|\mathbf{u}|)+\sigma_2(|\mathbf{y}|)$, тогда $L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}\widetilde{W}(\mathbf{x})\le-0{,}5q(W(\mathbf{x}))\alpha_3(|\mathbf{x}|)$;

2) $0{,}5\alpha_3(|\mathbf{x}|)<\sigma_1(|\mathbf{u}|)+\sigma_2(|\mathbf{y}|)$ и $\sigma_1(|\mathbf{u}|)\le\sigma_2(|\mathbf{y}|)$, тогда

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}\widetilde{W}(\mathbf{x})\le 2q(W(\mathbf{x}))\sigma_2(|\mathbf{y}|)\le 2\chi(2\sigma_2(|\mathbf{y}|))\sigma_2(|\mathbf{y}|),$$

где $\chi(s)=q\circ\alpha_2\circ\alpha_3^{-1}(2s)$;

3) $0{,}5\alpha_3(|\mathbf{x}|)<\sigma_1(|\mathbf{u}|)+\sigma_2(|\mathbf{y}|)$ и $\sigma_1(|\mathbf{u}|)>\sigma_2(|\mathbf{y}|)$, тогда

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}\widetilde{W}(\mathbf{x})\le 2q(W(\mathbf{x}))\sigma_1(|\mathbf{u}|)\le 2\chi(2\sigma_1(|\mathbf{u}|))\sigma_1(|\mathbf{u}|).$$

Следовательно, неравенство для производной функции $\widetilde{W}$ по времени, взятой в силу уравнений системы (1), может быть приведено к виду:

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}\widetilde{W}(\mathbf{x})\le-0{,}5q(W(\mathbf{x}))\alpha_3(|\mathbf{x}|)+2\chi(2\sigma_2(|\mathbf{y}|))\sigma_2(|\mathbf{y}|)+2\chi(2\sigma_1(|\mathbf{u}|))\sigma_1(|\mathbf{u}|).$$

Пусть функция $\chi$ выбрана в соответствии со следующим уравнением

$$\chi(2\sigma_2(s))=\frac{\alpha(s)}{1+2\sigma_2(s)},$$

подобный выбор функции $\chi$ возможен в силу

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\sigma_2(s)}{\alpha(s)}<+\infty$$

для $q(s)=\dfrac{\alpha\circ\sigma_2^{-1}\left(0{,}25\alpha_3\circ\alpha_2^{-1}(s)\right)}{1+0{,}5\alpha_3\circ\alpha_2^{-1}(s)}$ из класса $\mathsf{K}$. Тогда система (1) является УВС с УВС функцией Ляпунова $U(\mathbf{x})=V(\mathbf{x})+\widetilde{W}(\mathbf{x})$ ($\alpha_4(s)=\rho\circ\alpha_1(s)$, $\alpha_5(s)=\overline{\alpha}(s)+\rho\circ\alpha_2(s)$). Действительно

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}U(\mathbf{x})\le-0{,}5q\left(W(\mathbf{x})\right)\alpha_3\left(|\mathbf{x}|\right)+\sigma\left(|\mathbf{u}|\right)+2\chi\left(2\sigma_1\left(|\mathbf{u}|\right)\right)\sigma_1\left(|\mathbf{u}|\right)\le-\alpha_6\left(|\mathbf{x}|\right)+\delta\left(|\mathbf{u}|\right),$$

где $\alpha_6(s)=0{,}5q\left(\alpha_1(s)\right)\alpha_3(s)$ и $\delta(s)=\sigma(s)+2\chi\left(2\sigma_1(s)\right)\sigma_1(s)$. ■

Следующий результат является следствием Леммы П1, представляющий один из способов синтеза для пассивной системы закона управления, обеспечивающего ей свойство УВС.

Л е м м а  П . 2 . *Пусть система* (1) *является пассивной и* УВВС *в смысле Определений* 1, 3 *и*

$$\underline{\alpha}\left(|\mathbf{y}|\right)\le V(\mathbf{x})\le\overline{\alpha}\left(|\mathbf{x}|\right),\ \underline{\alpha},\overline{\alpha}\in\mathsf{K}_\infty.$$

*Тогда управление*

$$\mathbf{u}=-\mathbf{k}(\mathbf{x})+\mathbf{d},\ \left|\mathbf{k}(\mathbf{x})\right|\le\lambda\left(|\mathbf{y}|\right),\ \lambda\in\mathsf{K};$$

$$\mathbf{y}^T\mathbf{k}(\mathbf{x})+\beta(\mathbf{x})\ge\kappa\left(|\mathbf{y}|\right)+0{,}5|\mathbf{y}|^2,\ \kappa\in\mathsf{K}_\infty;$$

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\sigma_2(s)+\sigma_1\circ\lambda(s)}{\kappa(s)}<+\infty,$$

*где* $\mathbf{d}\in R^m$ *– новый вектор входа (измеримая по Лебегу и ограниченная почти везде функция времени), обеспечивает замкнутой системе свойство УВС.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно Определениям 1 и 3 следующие неравенства выполнены для всех $\mathbf{x}\in R^n$ и $\mathbf{u}\in R^m$:

$$\alpha_1\left(|\mathbf{x}|\right)\le W(\mathbf{x})\le\alpha_2\left(|\mathbf{x}|\right);\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}W(\mathbf{x})\le-\alpha_3\left(|\mathbf{x}|\right)+\sigma_1\left(|\mathbf{u}|\right)+\sigma_2\left(|\mathbf{y}|\right);$$

$$\underline{\alpha}\left(|\mathbf{y}|\right)\le V(\mathbf{x})\le\overline{\alpha}\left(|\mathbf{x}|\right);\ L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x})\le-\beta\left(|\mathbf{x}|\right)+\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$$

с $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\underline{\alpha},\overline{\alpha}\in\mathsf{K}_\infty$, $\sigma_1,\sigma_2\in\mathsf{K}$ и $\beta$ – некоторой неотрицательной функцией. Подставляя управление в эти неравенства, получим:

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}W(\mathbf{x})\le-\alpha_3\left(|\mathbf{x}|\right)+\sigma_1\left(|\mathbf{d}-\mathbf{k}(\mathbf{x})|\right)+\sigma_2\left(|\mathbf{y}|\right)\le$$

$$\le-\alpha_3\left(|\mathbf{x}|\right)+\sigma_1\left(2|\mathbf{d}|\right)+\sigma_1\left(2\lambda\left(|\mathbf{y}|\right)\right)+\sigma_2\left(|\mathbf{y}|\right);$$

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x})\le-\beta\left(|\mathbf{x}|\right)+\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{d}-\mathbf{k}(\mathbf{x})\right)\le-\kappa\left(|\mathbf{y}|\right)+0{,}5|\mathbf{d}|^2.$$

Следовательно, подобное управление обеспечивает замкнутой системе свойства УВВС и $h$-диссипативности относительно нового входа $\mathbf{d}$. Если

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\widetilde{\sigma}_2(s)}{\kappa(s)}<+\infty,\ \widetilde{\sigma}_2(s)=\sigma_2(s)+\sigma_1\circ\lambda(s),$$

то все условия Леммы П1 удовлетворены, и система является УВС с УВС функцией Ляпунова

$$U(\mathbf{x})=V(\mathbf{x})+\widetilde{W}(\mathbf{x}),\ \widetilde{W}(\mathbf{x})=\rho\left(W(\mathbf{x})\right),\ \rho(r)=\int_0^r q(s)\,ds,$$

$$q(s)=\frac{\kappa\circ\tilde{\sigma}_2^{-1}\left(0{,}25\alpha_3\circ\alpha_2^{-1}(s)\right)}{1+0{,}5\alpha_3\circ\alpha_2^{-1}(s)},\ \alpha_4(s)=\rho\circ\alpha_1(s),\ \alpha_5(s)=\bar{\alpha}(s)+\rho\circ\alpha_2(s),$$

$$\alpha_6(s)=0{,}5q(\alpha_1(s))\alpha_3(s),\ \delta(s)=0{,}5s^2+2\chi(2\sigma_1(2s))\sigma_1(2s).\quad\blacksquare$$

Список литературы


1. *Фрадков А.Л., Мирошник И.В., Никифоров В.О.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.
2. *Jiang Z.-P., Teel A., Praly L.* Small – gain theorem for ISS systems and applications // Math. Control Signal Syst., 1994, **7**, P. 95 – 120.
3. *Sepulchre R., Janković M., Kokotović P.V.* Constructive Nonlinear Control. New York, Springer-Verlag, 1996.
4. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. СПб: Наука, 1992.
5. *Martinez S., Cortes J., Bullo F.* Analysis and design of oscillatory control systems // *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 2003, **48**, 7, P. 1164 – 1177.
6. *Fradkov A.L.* Feedback resonance in nonlinear oscillators // Proc 5th Europ. Control Conference 1999, ECC'99, Karlsruhe.
7. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика. СПб: Наука, 2003.
8. *Якубович В.А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. мат. журнал, 1973. **14**, № 2, С. 1100-1129.
9. *Якубович В.А.* Частотные условия колебаний в нелинейных регулируемых системах с одной однозначной и ли гистерезисной нелинейностью // АиТ, 1975, **12**, С. 51-64.
10. *Hill D., Moylan P.* Dissipative dynamical systems: Basic input – output and state properties. J. Franklin Inst. 1980. **309**, P. 327 – 357.
11. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Д.Д.Хилл.* Пассивность и пассификация нелинейных систем (обзор) // АиТ. 2000. N 3. С. 3–37.
12. *Angeli D., Sontag E.D., Wang Y.* A characterization of integral input to state stability // Syst. Control Lett., 1999, **38**, P. 209 – 217.
13. *Sontag E.D., Wang Y.* Output-to-State Stability and Detectability of Nonlinear Systems // Syst. Control Lett., 1997, **29**, P. 279 – 290.
14. *Sontag E.D.* Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Trans. Aut. Contr., 1989, **34**, P. 435 – 443.
15. *Sontag E.D., Wang Y.* Various results concerning set input-to-state stability // Proc. IEEE CDC 95, IEEE Publications, 1995, P. 1330 – 1335.
16. *Angeli D.* Input-to-state stability of PD-controlled robotic systems // Automatica, 1999, **35**, P. 1285–1290.
17. *Sontag E.D., Wang Y.* Notions of input to output stability // Syst. Control Lett., 1999, **38**, P. 235 – 248.
18. *Nemytskiy V.V.* Oscillations in multidimention dynamical systems // Proc. Int. Symposium on nonlinear oscillations, 1963.
19. *Sontag E.D.* Asymptotic amplitudes and Cauchy gains: A small gain principle and an application to inhibitory biological feedback // Syst. Control Lett., 2002, **47**, P. 167 – 179.
20. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to oscillations and chaos. World Scientific, Singapore, 1998.
21. *Hayachi C.* Nonlinear oscillations in physical systems. McGraw-Hill Book Company, NY, 1964.
22. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Москва: Мир, 1964.
23. *Arcak M., Teel A.* Input-to-state stability for a class of Lurie systems // Automatica, 2002, **38**, P. 1945 – 1949.

24. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими системами. Москва: Наука, 1981.
25. *Sontag E.D., Wang Y.* New characterization of the input to state stability property // IEEE Trans. Aut. Contr., 1996, **41**, P. 1283 – 1294.

Реферат статьи Ефимова Д.В., Фрадкова А.Л.

## УСЛОВИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Предложены условия наличия свойства колебательности по Якубовичу у системы Лурье с нелинейной номинальной частью, охваченной статической нелинейной обратной связью по выходу. Разработана методика вычисления аналитических оценок на амплитуду колебаний в системе. Установлена связь между оценками на амплитуду колебаний и индексом возбудимости системы по входу. Приведены примеры компьютерного моделирования для систем 2-го и 3-го порядка, в том числе систем Ван-дер-Поля и Лоренца, подтверждающие применимость предложенных решений.

Рисунки к статье
Д.В. ЕФИМОВ, А.Л. ФРАДКОВ
УСЛОВИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

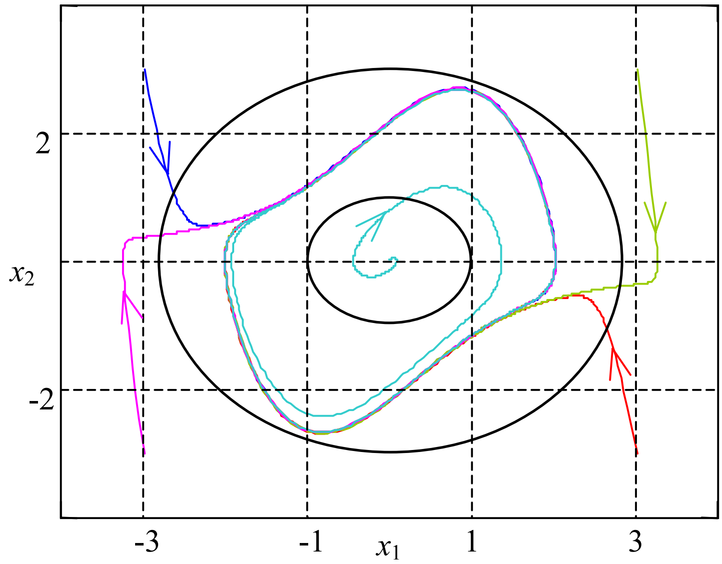


Рис. 1.

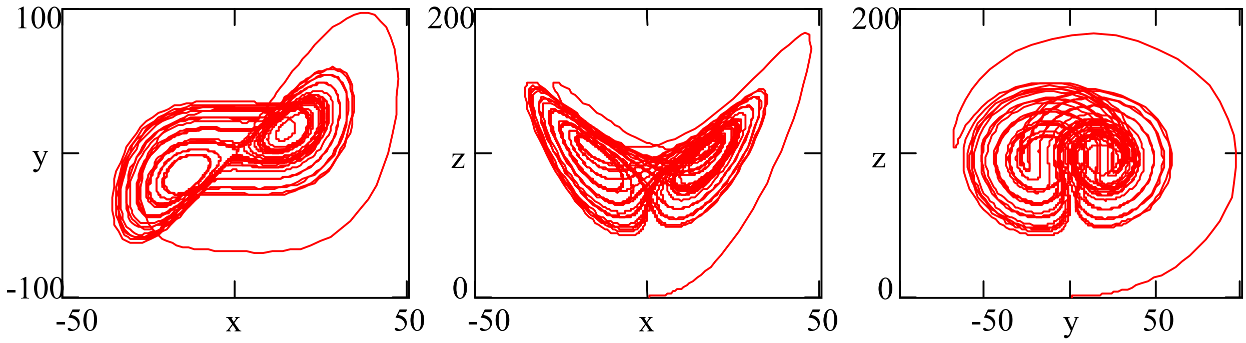


Рис. 2.

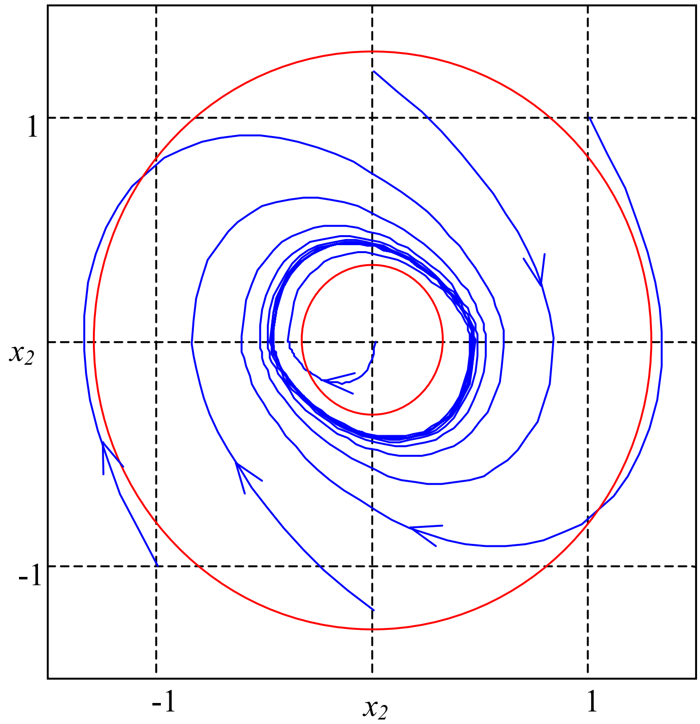


Рис. 3.

Подрисуночные подписи к статье
Д.В. ЕФИМОВ, А.Л. ФРАДКОВ
УСЛОВИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рис. 1. Траектории и множество $\Omega$ для системы Ван-дер-Поля.

Рис. 2. Траектория системы Лоренца.

Рис. 3. Траектории линейного осциллятора с нелинейной обратной связью.