УДК 681.51

А.А. БОБЦОВ
(Гос. институт точной механики и оптики, С.-Петербург)
Д.В. ЕФИМОВ
(Гос. электротехнический университет, ИПМАШ РАН, С.-Петербург)
К.А. СЕРГЕЕВ
(Гос. институт точной механики и оптики, С.-Петербург)

К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ АФФИНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача стабилизации нелинейной аффинной по управлению системы. Производится сравнительный анализ современных методов нелинейного синтеза для этого класса динамических систем. Предлагается методика, позволяющая обеспечить предельную ограниченность траекторий в замкнутой системе.

Введение. Стабилизация нелинейных детерминированных систем является одной из сложных проблем современной теории управления. Несмотря на то, что большая часть работ, представленных в последние годы на международных и отечественных конференциях, посвящена именно тематике управления нелинейными системами, универсальных методов синтеза пока не существует. Все полученные результаты, так или иначе, носят частный характер, практическое использование которых возможно только для ограниченного класса моделей динамических систем. Например, использование второго метода Ляпунова [2] предполагает в каждом новом случае построение своей функции Ляпунова. Подходы, основанные на линеаризации [7], носят либо локальный характер, либо предусматривают существование замены координат, приводящую нелинейную модель к линейной, то есть предполагают изначальную “линейность” рассматриваемой системы. Широко распространенные и известные частотные методы синтеза, как правило, находят свое применение при решении так называемой задачи А.И. Лурье [6]. Метод обратного обхода интегратора [13] обоснован для динамических систем, модель которых может быть представлена в нижне-треугольной форме [13]. Таким образом, разработчикам систем управления остается лишь решать частные задачи (памятуя о том, что многие модели реальных технических объектов можно привести к той или иной частной структуре) и тем самым заполнять огромное “проблемное поле”, связанное с управлением нелинейными системами. Настоящая работа посвящена известной проблеме стабилизации нелинейных аффинных по управлению систем, т.е. систем в которых управление входит линейно.

Для указанного класса систем, проводится обзорный анализ современных методов стабилизации. Также в работе предлагается новый алгоритм для решения задачи стабилизации, для иллюстрации работоспособности которого, в статье приведены пример и результаты компьютерного моделирования.

Постановка задачи. Рассмотрим модель нелинейного динамического объекта вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{1а}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{1б}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ - вектор состояния, $\mathbf{y} \in R^r$ - вектор выходов, $\mathbf{u} \in R^q$ - сигнал управления; $\mathbf{f}$ и $\mathbf{G}$ - векторные и векторно-матричные функции из класса C_∞, $\mathbf{f}(0)=0$. В работе приняты следующие обозначения: символом C_i обозначается i-ый класс дифференцируемости (C_0 – непрерывные функции, C_∞ – гладкие); $R_{\geq 0} = [0, +\infty)$; говорят что неубывающая C_0 функция $\alpha : R_{\geq 0} \to R_{\geq 0}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ ($\alpha \in \mathcal{K}$), если $\alpha(0)=0$; функция δ принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$, если $\delta \in \mathcal{K}$ и $\delta(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$; $|\mathbf{x}|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{x}$; $\|\mathbf{u}(t)\|$ – L_∞ норма функции $\mathbf{u}(t)$, определяемая

$$\|\mathbf{u}(t)\| = \operatorname{ess\,sup}\{|\mathbf{u}(t)|, t \geq 0\}.$$

На ряду с моделью общего вида (1) будем рассматривать ее, так называемую, “нормальную форму”, полученную из (1) нелинейным обратимым преобразованием координат:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{z},\mathbf{y}); \tag{2а}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}(\mathbf{z},\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{u}, \tag{2б}$$

где векторно-матричная функция $\mathbf{B}$ – невырожденная для всех $\mathbf{z},\mathbf{y}$. Условия существования у системы (1) нормальной формы записи (2) можно найти в [12]. Введем следующее свойство рассматриваемой системы по выходу $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0 \text{ для всех } \mathbf{x}(0) \in R^n,\ t \geq 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{x}(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{3}$$

Совместно с (3) и, учитывая невырожденность матрицы $\mathbf{B}$, будем согласно [12] говорить, что система (1) наделена свойством *минимально-фазовости* по выходу $\mathbf{y}$.

Вводя новый “виртуальный” закон управления

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{a}(\mathbf{z},\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{u},$$

взаимно однозначно связанный с управлением $\mathbf{u}$, получим еще одну упрощенную форму записи модели (1):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{z},\mathbf{y}); \tag{4а}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{u}}. \tag{4б}$$

Свойство минимально-фазовости системы (1) означает асимптотическую устойчивость в целом подсистемы $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{q}(\mathbf{z},0)$ с известной функцией Ляпунова $U(\mathbf{z})$. В ряде задач мы ограничимся специальным видом $\mathbf{q}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{y}$. Модели (1) и (2), (4) – динамически эквивалентны (решения этих систем дифференциальных уравнений связаны диффеоморфным преобразованием координат), поэтому из решения задачи стабилизации для любой из них следует решение этой задачи для других моделей.

Среди целей управления системой (1) или (2), (4) будем выделять:

– обеспечение асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = 0$;

– наделение свойством аттрактивности положения равновесия $\mathbf{x} = 0$, т.е. $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = 0$, для всех $\mathbf{x}(0) \in R^n$;

– предельной ограниченности траекторий системы, т.е. выполнение условий: $|\mathbf{x}(t)| \leq \varepsilon$ или $|(\mathbf{z}(t),\mathbf{y}(t))| \leq \varepsilon$ при $t \to +\infty$, где $\varepsilon > 0$ заданное малое число.

Напомним, что свойство асимптотической устойчивости точки $\mathbf{x} = 0$ означает, свойство аттрактивности (вторая цель управления) и устойчивости по Ляпунову начала координат пространства состояний. В этой связи, вторая цель управления формирует меньшие требования к синтезируемой системе. Последняя цель управления предполагает лишь ограниченность траекторий в асимптотике.

Проанализируем возможности реализации этих целей управления с использованием приведенных на рис. 1 известных методов синтеза нелинейных систем.

Методы:

– линеаризации;
– функций Ляпунова;
– итеративного синтеза;
– аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР);
– частотные методы синтеза;

Рис. 1. Методы синтеза нелинейных систем и связи между ними.

Методы линеаризации. На данный момент существует два метода линеаризации: точная линеаризация и линейная аппроксимация [7б 12]. Здесь мы рассмотрим только метод *точной линеаризации* (от англ. exact linearization [12]), заключающийся в поиске нелинейного преобразования координат и управляющего воздействия, при которых нелинейная система приводится к эквивалентному линейному виду. Рассматривая систему

(4), предположим, что функция $\mathbf{q}$ имеет вид: $\mathbf{q}(\mathbf{z},\mathbf{y})=\mathbf{Az}+\mathbf{Dy}$. В силу свойства минимально-фазовости исходной системы матрица $\mathbf{A}$ – гурвицева. Выберем линеаризующий закон управления

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{Ry}, \tag{5}$$

где $\mathbf{R}$ – гурвицева матрица соответствующей размерности, тогда замкнутая система будет линейной асимптотически устойчивой системой. Проблема состоит в поиске преобразования координат, обеспечивающем линейный вид функции $\mathbf{q}$ в (4), далее управление (5) обеспечивает линейность замкнутой модели за счет полной компенсации нелинейных компонент, что и подразумевается под термином точная линеаризация. Достоинство метода – позволят синтезировать законы управления для нелинейных систем с использованием стандартных методов теории линейных систем. Недостаток – существование обратного преобразования координат, такое преобразование можно предложить для очень узкого класса динамических систем (1). Основные положения этого метода, а также алгоритм поиска нелинейного преобразования можно найти в [12].

При использовании аппарата нелинейных преобразований целесообразно помнить, что преобразование координат гарантирует *качественное* сохранение свойств системы и не меняет собственных чисел матрицы линеаризации системы в окрестности положения равновесия. Следовательно, характер переходных процессов *в близи положения* равновесия *качественно и количественно* идентичен у линеаризованной и исходной системы. При больших отклонениях от начала координат траектории могут незначительно искажаться. Пример: исходная система $\dot{x}=-\ln(x)x$, $x>0$ (положение равновесия $x=1$); выбрано преобразование координат $y=\ln(x)$ – логарифмическое масштабирование; эквивалентная (линеаризованная) система примет вид y'=-y (положение равновесия y=0). Собственное число матрицы линеаризации у этих систем в окрестности положения равновесия $\lambda=-1$. Если промоделировать и сравнить траектории этих двух систем, то будут заметны некоторые количественные отличия, особенно на начальных участках траекторий, абсолютные значения отклонений величин x и y от положений равновесия в одинаковые моменты времени также будут отличаться, но темп затухания (определяемый собственным числом λ) будет совпадать. С другой стороны, в каждом конкретном случае, по виду преобразования координат можно сказать какой “запас прочности” надо заложить в эквивалентную модель, что бы на исходной динамической системе получить приемлемые качественные характеристики переходных процессов.

Метод функций Ляпунова. Классические результаты этого метода [2], или их развитие для задач устойчивости системы по части переменным (по функции, относительно множества) [9,14], направлены на исследование свойств автономной системы, без внешнего входа. В задачах управления этот метод используется следующим образом: выбирается некоторый закон управления, как функция координат управляемой системы $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$, затем свойства замкнутой этим управлением системы обосновываются на основании подобранной функции Ляпунова. Основным недостатком этого метода служит отсутствие общих правил поиска функций Ляпунова для нелинейных систем. Существование функции Ляпунова является одним из наиболее часто используемых достаточных условий асимптотической устойчивости системы. Именно этим объясняются связи этого метода с итеративными процедурами синтеза, где в явном виде при выборе закона управления анализируется знакоотрицательность соответствующих положительно определенных функций от вектора состояния системы.

В течение последнего десятилетия большую популярность приобрело распространение этого метода и на системы с внешним входом (на системы с управлением), получившее название метода *контролирующих функций Ляпунова* (КЛФ, от англ. Control Lyapunov Function [10,11,16,17]). Основу этого метода составляет следующий результат.

Теорема 1 [11,17]. *Для системы*

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{f}$ *– непрерывная локально липшицевая по своим аргументам функция и* $\mathbf{f}(0,0)=0$, *следующие свойства эквивалентны:*

– система является асимптотически управляемой *(то есть для любого $\mathbf{x}(0)\in R^n$ существует функция управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$, $\|\mathbf{u}\|_\infty \le \sigma(|\mathbf{x}(0)|)$, $\sigma\in\mathcal{K}$, такая, что замкнутая система управления асимптотически устойчива в целом).*

– существует C_0 КЛФ *V, то есть функция $V: R^n \to R_{\ge 0}$, при этом для некоторых функций $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$ выполнено $\alpha_1(|\mathbf{x}|)\le V(\mathbf{x})\le \alpha_2(|\mathbf{x}|)$ и для положительно определенной функции $W(\mathbf{x})$, $\sigma\in\mathcal{K}$ верно неравенство:*

$$\sup_{\mathbf{x}\in R^n} \min_{|\mathbf{u}|\le\sigma(|\mathbf{x}|)} \Delta V(\mathbf{x}) \le -W(\mathbf{x}). \tag{6}$$

– существует разрывная *функция управления $\mathbf{u}: R^n \to R^m$, такая, что замкнутая система будет асимптотически устойчива (в целом).* ■

Приращение непрерывной функции V вдоль направления векторного поля $\mathbf{f}$ надо понимать в обобщенном смысле [17]. Существование решения у динамических систем с разрывной функцией управления предполагается в смысле определений, данных в [5].

Основную идею этого результата можно сформулировать следующим образом. Для нелинейной системы общего вида, допускающей решение задачи асимптотической стабилизации (свойство асимптотической управляемости), можно предложить закон управления как функцию от координат вектора состояния $\mathbf{x}$. Исследовать систему на наличие этих свойств можно с использованием КЛФ: существование КЛФ необходимо и достаточно для решения задачи стабилизации. Можно также провести следующую параллель: классический метод функций Ляпунова получил широкое распространение при анализе автономных динамических систем на наличие свойства асимптотической устойчивости, метод КЛФ решает схожую задачу, но уже для систем с управлением, при этом анализируется наличие эквивалентного свойства для системы с управлением: свойства асимптотической управляемости.

Для аффинных систем верно следующее, более конструктивное утверждение.

Теорема 2 [10,16]. *Для системы (1а) следующие свойства эквивалентны:*

1. Существует C_1 КЛФ V : $V: R^n \to R_{\ge 0}$, для некоторых функций $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$ выполнено $\alpha_1(|\mathbf{x}|)\le V(\mathbf{x})\le \alpha_2(|\mathbf{x}|)$ и

$$|\partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{G}(\mathbf{x})|=0 \;\Rightarrow\; \partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{x})<0 \text{ для } \forall \mathbf{x}\ne 0. \tag{7}$$

2. Существует непрерывный закон управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$, асимптотически стабилизирующий систему (1а). ■

Здесь $\partial V/\partial \mathbf{x}$ – вектор строка размерности $(1\times n)$. Для исследования аффинной системы на наличие свойства стабилизируемости нет необходимости исследовать минимаксное неравенство (6), достаточно проверить векторно-матричные соотношения (7). Кроме того, в работе [16] предложен закон управления, позволяющий для системы (1а) записать вид стабилизирующего закона управления по известной КЛФ:

$$\mathbf{u}=-\left[\partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{x})+\sqrt{(\partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{x}))^2+|\partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{G}(\mathbf{x})|^2}\right]|\partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{G}(\mathbf{x})|^{-2}\,\partial V/\partial \mathbf{x}\mathbf{G}(\mathbf{x})^T. \tag{8}$$

Таким образом, предложив положительно определенную функцию от координат системы (1а), удовлетворяющую (7), можно сразу получить стабилизирующий закон управления.

Основным недостатком этого подхода остается проблема выбора КЛФ по уравнениям системы (1а). Если для системы известно некоторое стабилизирующее управление, с известной функцией Ляпунова для замкнутой системы, то ее можно выбрать в качестве КЛФ. В качестве такой функции можно также выбрать функцию Ляпунова для желаемого движения системы (например, требуется синтезировать систему эквивалентную линейной асимптотически устойчивой системе с заданными показателями качества, тогда в качестве кандидата на роль КЛФ можно рассмотреть квадратичную функцию).

Для моделей частного вида универсальный выбор КЛФ – открытая задача, требующая своего решения. Например, предложим КЛФ для модели (4). С этой целью, предварительно, отметим, что условие (7) означает свойство минимально-фазовости модели (1а) по выходу

$$\mathbf{y} = \left(\partial V / \partial \mathbf{x} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \right)^T . \tag{9}$$

Действительно, для всех точек пространства состояний, где обращается в нуль функция выхода (9), существует функция Ляпунова V, с знакоотрицательной производной по времени. Формально для свойства минимально-фазовости требуется еще выполнение рангового условия (как для матрицы $\mathbf{B}$ в уравнениях (2)). Для модели (4) все эти условия выполнены: известна функция минимально-фазового выхода $\mathbf{y}$ и функция Ляпунова U для системы (4а) при нулевом выходе, в этом случае КЛФ примет вид:

$$V(\mathbf{z},\mathbf{y}) = U(\mathbf{z}) + 0.5\mathbf{y}^T \mathbf{y} . \tag{10}$$

Итеративные процедуры синтеза. К этой группе методов можно отнести: метод обратного обхода интегратора (backstepping) [13], метод прямого обхода интегратора (forwarding) [15] и метод наследования с насыщением (nested saturation design) [18]. Общим свойством, позволяющим объединить эти методы в одну группу, служит их “рекуррентный” характер, который мы проиллюстрируем на примере метода обхода интегратора (ОИ) для системы (4). Как уже отмечалось, метод ОИ служит для стабилизации систем в нижне-треугольной форме, два других метода предложены для систем, модель которых может быть представлено в верхне-треугольной канонической форме.

По условиям задачи “внутренняя” подсистема (4а) стабилизируема ”внутренним” законом управления $\mathbf{y} = 0$ с известной функцией Ляпунова $U(\mathbf{z})$. Требуется построить “внешний” закон управления $\tilde{\mathbf{u}}$, стабилизирующий всю систему (4) целиком (перенести управление через интегратор). Решение этой задачи – одна итерация, в результате для системы (4) будет известно управление и функция Ляпунова, далее эту процедуру можно повторить уже для системы (4), если она сама является частью другой динамической подсистемы, разворачивая такую же процедуру синтеза и для нее. Рассмотрим формальное решение этой задачи.

Предположим, что $\mathbf{q}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{y}$. Для поиска управления $\tilde{\mathbf{u}}$ в методе ОИ предлагается использовать функцию Ляпунова вида (10). Запишем полную производную по времени от (10), взятую вдоль всех траекторий системы (4):

$$\dot{V} = \partial V / \partial \mathbf{z} \left(\mathbf{f}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{y} \right) + \partial V / \partial \mathbf{y} \tilde{\mathbf{u}} = \partial U / \partial \mathbf{z} \, \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) + \left(\partial U / \partial \mathbf{z} \, \mathbf{G}_1(\mathbf{z},\mathbf{y}) + \tilde{\mathbf{u}}^T \right) \mathbf{y} .$$

По условиям $\partial U / \partial \mathbf{z} \, \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) \le -\alpha(|\mathbf{z}|)$, $\alpha \in \mathcal{K}$ – подсистема (4а) асимптотически устойчива при $\mathbf{y} = 0$. Требуется обеспечить выбором управления $\tilde{\mathbf{u}}$ знакоотрицательность произведения круглой скобки и вектора выхода. Эту задачу можно решить используя, например, следующий закон управления:

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\varphi(\mathbf{y}) - \partial U / \partial \mathbf{z} \, \mathbf{G}_1(\mathbf{z},\mathbf{y})^T , \ \mathbf{y}^T \varphi(\mathbf{y}) > 0 \ \text{для} \ \forall \mathbf{y} \ne 0 \ \text{и} \ \varphi(0) = 0 , \ \varphi \in C_0 . \tag{11}$$

Суть метода ОИ состоит в “распространении” известной функции Ляпунова U для подсистемы (4а) на всю системы (4) целиком V. Отметим, что свойства функции (10) были уже исследованы нами при рассмотрении КЛФ метода стабилизации. Закон управления, получаемый по методу ОИ, формально проще чем (8), однако, он получен для специального вида функции $\mathbf{q}$ и здесь в явном виде требуется существование у системы (1а) “нормальной формы записи” вида (4) с невырожденной матрицей $\mathbf{B}$, для КЛФ метода эти предположения не важны.

Следующий метод также может быть отнесен к разряду итеративных и условия его применимости не зависят от вида функции $\mathbf{q}$.

Метод АКАР. В этом методе закон управления не гарантирует существование функции Ляпунова у замкнутой системы, но обеспечивает достижение минимума следующим “сопровождающим” функционалом [4]:

$$J = \int_0^\infty \left(\dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} + \varphi(\mathbf{y})^T \varphi(\mathbf{y}) \right) dt ,$$

здесь свойства функции φ аналогичны (11). Согласно вариационным методам оптимизации экстремаль этого функционала примет вид:

$$\dot{\mathbf{y}}+\varphi(\mathbf{y})=0,$$

закон управления ищется как решение этого функционального уравнения:

$$\tilde{\mathbf{u}}=-\varphi(\mathbf{y}). \quad (12)$$

Сравнивая (12) с управлением (11) нетрудно сделать вывод, что управление, полученное по методу АКАР, является упрощением управления, синтезированного методом ОИ. Можно сказать, что в методе ОИ осуществляется дополнительный охват обратной связью синтезируемой системы. Это также означает, что процессы в замкнутой системе не удовлетворяют функции Ляпунова (10). В общем случае [3] синтезированная по методу АКАР система будет наделена только свойством локальной асимптотической устойчивости, или, более точно свойством локальной аттрактивности (в отличие от методов КЛФ и ОИ, гарантирующих сохранение желаемых свойств во всем пространстве состояния). Решение этой проблемы содержится в модификации функции выхода для системы (1) [3]. Можно показать, что метод АКАР обеспечивает свойство асимптотической устойчивости по минимально-фазовому выходу $\mathbf{y}$.

Выбирая функцию $\varphi(\mathbf{y})=\mathbf{Ry}$ в классе линейных, получим совпадение законов управления (5) и (12), следовательно, при специальном виде функции $\mathbf{q}(\mathbf{z},\mathbf{y})=\mathbf{Az}+\mathbf{Dy}$ метод АКАР решает также задачу точной линеаризации системы.

Частотные методы. Этот класс методов анализа и синтеза систем управления [2,8], получил свое развитие при решении задачи А.И. Лурье [6], т.е. при анализе устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений записанных в форме Лурье:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{B}\sigma(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{Cx},$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ - постоянные матрицы, а $\sigma(\mathbf{y})$ - векторная функция, компоненты которой удовлетворяю секторным условиям:

$$\sigma_i(0)=0,\ 0\le\sigma_i(y_i)/y_i\le\bar{k}_i,\ y_i\ne0,\ \bar{k}_i>0,\ i=1,\dots,m.$$

В инженерной практике эта система приобрела наибольшую известность при записи математической модели в операторной форме $\mathbf{y}=W(p)\sigma(\mathbf{y})$, где p – оператор дифференцирования, $W(p)=\mathbf{C}(p\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ – передаточная матрица системы.

Среди методов анализа и синтеза нелинейных систем указанного класса наибольшую популярность и известность получили: частотный критерий В.М. Попова, частотная теорема Якубовича-Калмана, частотный критерий Чо-Нарендры, критерий Гелига [2]. Очевидным недостатком этих методов является их проработанность лишь при решении задачи Лурье, т.е. для ограниченного класса нелинейных систем.

Все рассмотренные выше методы сконцентрированы на решении задачи асимптотической стабилизации системы, или обеспечении свойства аттрактивности, рассмотрим теперь иную цель управления для (1).

Задача предельной ограниченности траекторий. В данной части работы, рассмотрим оригинальную процедуру синтеза нелинейного регулятора, обеспечивающего предельную ограниченность траекторий замкнутой системы. Подход основан на методе функции Ляпунова и при выполнении некоторых требований (см. ниже), позволяет претендовать на роль универсального метода синтеза.

Итак, рассмотрим нелинейную систему вида (1а) и функцию Ляпунова:

$$V(\mathbf{x},\mathbf{u})=V_1(\mathbf{x})+\mathbf{u}^T th(\gamma\,\mathbf{u}), \quad (13)$$

где число $\gamma>0$, $th(\mathbf{u})$ – функция гиперболического тангенса, а функция V_1 удовлетворяет следующим условиям:

$$V_1(\mathbf{x})>0 \text{ при } \mathbf{x}\ne0;\ V_1(0)=0;\ V_1(\mathbf{x})\to+\infty \text{ при } x\to\infty.$$

Пусть для простоты изложения управление $u\in R$. Обозначим производную по управлению $\dot{u}=\widetilde{u}$ и примем $V_1(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{Px}$, где матрица $\mathbf{P}=\mathbf{P}^T>0$. Выберем управление в виде

$$\widetilde{u}=-\mu\, th(\gamma u)\left[\mathbf{x}^T\mathbf{Pf}(\mathbf{x})+\mathbf{x}^T\mathbf{PG}(\mathbf{x})u\right]-th(\gamma u)\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Px}+u\, th(\gamma u)\right),\ \mu\ge 1. \tag{14}$$

Тогда если для всех решений замкнутой системы выполнено условие

$$|u(t)|\to\infty \text{ при } \mathbf{x}(t)\to\infty, \tag{15}$$

то управление (14) обеспечивает сходимость всех траекторий системы в некоторую окрестность положения равновесия. В самом деле, дифференцируя уравнение (13) и подставляя выражение (14), получаем неравенство:

$$\dot{V}\le-\gamma\, th(\gamma u)^2 V+\Delta(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{16}$$

где функция $\Delta=\Delta(\mathbf{x},\mathbf{u})$ - ограничена. Из (16) следует, что выбором γ можно обеспечить

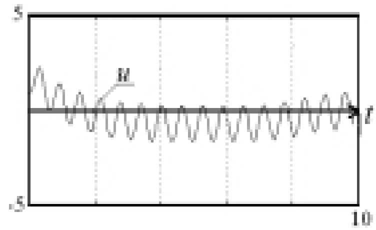

Рис. 2. Переходные процессы в системе (18) по управлению.

Рис. 3. Переходные процессы в системе (18) по состоянию.

любую малую область притяжения траекторий системы.

Отметим, что выполнение условия (15) значительно сужает класс систем стабилизируемых указанным образом. Выход из этой ситуации предполагает модернизацию управления (14) следующим образом:

$$\dot{u}=\widetilde{u}=-\mu\, th(\gamma u)\left[\mathbf{x}^T\mathbf{Pf}(\mathbf{x})+\mathbf{x}^T\mathbf{PG}(\mathbf{x})u\right]-th(\gamma u)\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Px}+u\, th(\gamma u)\right)+v, \tag{17}$$

где v - некоторый сигнал раскачки не позволяющий принимать управлению нулевых значений. Для иллюстрации работоспособности предлагаемой методики синтеза, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим систему вида:

$$\dot{x}=0.1x+u. \tag{18}$$

Выберем функцию Ляпунова (13) как

$$V=0.5x^2+u(thu).$$

Тогда закон управления (17) с функцией раскачки $\upsilon=10\sin 10t$ и параметром $\mu=1$, позволяет для неустойчивой системы (18) свести все траектории в некоторую ограниченную область. Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 2 и 3.

Заключение. В работе произведен обзор методов синтеза систем управления нелинейными аффинными системами, предложено аналитическое сравнение методов на примере решения задачи стабилизации аффинной системы с минимально-фазовым выходом и глобально определенной нормальной формой.

Сравнение показало, что наиболее общей концепцией синтеза является КЛФ метод, включающий в себя необходимые и достаточные условия задачи стабилизации динамических систем общего вида. Метод ОИ, также как и метод точной линеаризации зависит от вида правых частей дифференциальных уравнений. Метод АКАР лишен этого недостатка, однако без дополнительных модификаций гарантирует только локальные свойства синтезируемой системе. Частотные методы направлены на решение специфической задачи синтеза нелинейной системы. В целом можно сказать, что приведенный обзор подтверждает отсутствие универсальной концепции синтеза нелинейных систем. Предложенная авторами оригинальная методика синтеза систем не привязана к конкретному виду правых частей дифференциальных уравнений модели, но обеспечивает системе достаточно слабое свойство: предельную ограниченность траекторий.

Состав обзора определен интересами авторов и не включает в себя многие популярные решения и иные постановки задач. Идея этой работы сформировалась в ходе семинаров, проводимых лабораторией Управления сложными системами, Институт Проблем Машиноведения РАН, под руководством ст. н. сот. Полушина И.Г.

Литература.

1. Бобцов А.А., Ефимов Д.В. Адаптивное управление нелинейной аффинной системой с помехами в канале измерения // Труды конф. "Навигация и управление движением", СПб., 2001.
2. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. – М.: Наука, 1978.
3. Ефимов Д.В. Синтез адаптивных нейросетевых систем управления классом нелинейных динамических объектов. Дисс. на соискание учен. степени к-та техн. наук./ СПбГЭТУ. СПб., 2001. 170 с.
4. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. — М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974 – 353 с.
6. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 216 с.
7. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами //Сер. “Анализ и синтез нелинейных систем”. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
8. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учеб. Пособ. – М. Наука.1986. – 616 с.
9. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движений по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987 – 263 с.
10. Artstein Z. Stabilization with relaxed control // Nonlinear Analysis, № 7, 1983, pp. 1163–1173.
11. Clarke, F.H., Yu. S. Ledyaev, E.D. Sontag, and A.I. Subbotin, Asymptotic controllability implies feedback stabilization, IEEE Trans. Automat. Control, № 42, 1997, pp. 1394-1407.
12. Isidori A. Nonlinear control systems: An Introduction. 2nd ed. — Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 478.
13. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley & Sons, Inc. 1995, P. 563.
14. Lin Y., Sontag E., Wang Y. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability // SIAM Journal on Control and Optimization, № 34, 1996, pp. 124 – 160.
15. Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P. Constructive nonlinear control. Springer-Verlag, NY, 1997.
16. Sontag E.D. A "universal" constraction of Arstein's theorem on nonlinear stabilization // Systems & Control Letters, vol. 12, 1989, pp. 542 – 550.
17. Sontag E.D. Stability and Stabilization: discontinuities and the effect of disturbances // in Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control (proc. NATO Advanced Study Institute, Monreal, Jul/Aug 1998, F.H. Clarke and R.J. Stern eds.), Kluwer, Doldrecht, 1999, pp. 551–598.
18. Teel A.R. Using saturation to stabilize a class of single-input partially linear composite systems // In Prep. of the 2nd IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, France, 1992. P. 224–229.