УДК 681.51

БОБЦОВ А.А.
(Государственный Институт Точной Механики и Оптики, СПб)
ЕФИМОВ Д.В.
(Государственный Электротехнический Университет
Институт Проблем Машиноведения РАН, СПб)

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМОЙ С ПОМЕХАМИ В КАНАЛЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Рассматривается задача адаптивного управления недоопределенной нелинейной системой с помехами в канале измерения. Предлагается общий подход к решению этого класса задач. Анализируется специальный важный случай адаптивного управления строго пассивной системой. Работоспособность полученного решения демонстрируется результатом компьютерного моделирования синтезированной системы.

Введение. В последнее время возрос интерес к задачам адаптивного управления нелинейными динамическими объектами в условиях внешних возмущений [1–4] . Одной из причин, повлекшей за собой рост числа публикаций в этой области, послужила высокая практическая заинтересованность в решении подобных задач.

На сегодняшний день можно выделить два основных подхода к решению этой проблемы: огрубление алгоритмов адаптации – введение обратных связей, лимитирующих влияние возмущения [6–7] , и фильтрация внешнего возмущения [4] . Первый подход связан с ухудшением качества процессов в адаптивной системе в отсутствии возмущений. Второй подход лишен этого недостатка, однако, его использование приводит к резкому увеличению числа уравнений, описывающих систему.

К сожалению, подавляющее число работ в этой области не рассматривает ситуацию, когда внешнее возмущение влияет не только на динамику управляемого объекта, но и входит в уравнение настройки коэффициентов адаптивного регулятора.

В данной работе рассматривается именно такая постановка задачи, а для анализа процессов в адаптивных системах используется метод устойчивых от входа к вектору состояния систем [14].

Постановка задачи. Рассмотрим обобщенную модель адаптивной системы управления следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}); \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}}); \quad (2)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{D}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{\delta}), \quad (3)$$

где $\mathbf{x}\in R^n$ – вектор состояния объекта; $\mathbf{u}\in R^m$ – вектор управления; $\boldsymbol{\theta}\in\Omega_\theta$ – вектор неизвестных параметров, Ω_θ – компактное множество из R^p; $\boldsymbol{\delta}\in R^k$ – вектор внешних возмущений (помеха); $\hat{\boldsymbol{\theta}}\in R^l$ – вектор настраиваемых параметров; функции $\mathbf{F},\mathbf{U},\mathbf{D}$ – непрерывные и локально липшицевые функции (функция $\mathbf{F}$ равномерно по $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}$, функция $\mathbf{D}$ равномерно $\boldsymbol{\delta}$). Предположим, что сигнал $\boldsymbol{\theta}:R_{\geq 0}\to\Omega_\theta$ – ограниченная функция, а $\boldsymbol{\delta}:R_{\geq 0}\to R^k$ –ограниченная почти везде функция (здесь $R_{\geq 0}=[0,+\infty)$), с L_∞ нормой:

$$\|\boldsymbol{\delta}\| = \operatorname{ess\,sup}\{|\boldsymbol{\delta}(t)|,\ t\geq 0\} < +\infty,$$

множество всех таких функций обозначим L_∞^k, здесь $|\boldsymbol{\delta}|$ обозначает евклидову норму вектора $\boldsymbol{\delta}$. Решение системы (1) с начальным значением $\mathbf{x}_0$ и заданным входом $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\delta}$ будем обозначать $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta})$, данное решение может быть определено на временном интервале $t\in[0,T]$. Если $T=+\infty$, то такую систему будем называть прямо полной. Иногда, если значение аргументов понятно из контекста, будем использовать обозначение $\mathbf{x}(t)$ вместо $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta})$.

В системе (1)–(3) от сигнала $\boldsymbol{\delta}$ зависит не только правая часть дифференциальных уравнений объекта (1), но и правая часть дифференциальных уравнений контура настройки (3), куда возмущение попадает вместе с измерениями состояния объекта.

Определение 1 [6] . *Система (1) – (3) называется адаптивной по отношению к $\boldsymbol{\theta}\in\Omega_\theta$, если при $\boldsymbol{\delta}(t)\equiv 0$ для всех $t\geq 0$ выполнены условия глобальной асимптотической устойчивости относительно множества $\mathcal{A}=\{\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}}:\mathbf{x}=0\}$.* ∎

Определения и результаты по развитию метода функций Ляпунова для задачи об устойчивости относительно множества представлены в работах [3,5,11]. Из этих определений, в частности, следует свойство прямой полноты системы (1) – (3) при $\boldsymbol{\delta}=0$.

Определение 2 [4]. *Система (1) – (3) называется робастно-адаптивной по отношению к* $\boldsymbol{\theta}\in\Omega_\theta$, *если при* $\boldsymbol{\delta}(t)\neq 0$ *выполнены условия прямой полноты и предельной ограниченности траекторий по векторам* $\mathbf{x}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\forall\, \mathbf{x}_0\in R^n,\ \forall\, \boldsymbol{\delta}\in L_\infty^k \quad \exists\, \delta\left(\mathbf{x}_0,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0,\|\boldsymbol{\delta}\|\right)>0:\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\left|\mathbf{x}(t),\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)\right|\leq\delta\left(\mathbf{x}_0,\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0,\|\boldsymbol{\delta}\|\right). \qquad \blacksquare$$

Введенные определения позволяют сформулировать решаемую задачу следующим образом. При каких условиях (модификациях правых частей уравнений (1) – (3)) из адаптивности системы следует ее робастная адаптивность? Ответ можно формализовать с использованием следующего определения:

Определение 3 [14]. *Прямо полная система*

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{4}$$

с непрерывной и локально липшицевой правой частью, называется (глобально) устойчивой от входа к вектору состояния (input-to-state stable) относительно не пустого замкнутого инвариантного множества $\mathcal{A}$, *если для любого входа* $\mathbf{u}\in L_\infty^m$ *и* $\mathbf{x}_0\in R^n$ *существуют функции* $\beta\in\mathcal{KL}$, $\gamma\in\mathcal{K}$ *такие, что*

$$\left|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{u})\right|_{\mathcal{A}}\leq\beta\left(\left|\mathbf{x}_0\right|_{\mathcal{A}},t\right)+\gamma\left(\|\mathbf{u}\|\right)\ \text{для}\ \forall\, t\geq 0. \qquad \blacksquare$$

Напомним, что функция $\rho: R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, если она строго возрастает и $\rho(0)=0$; $\rho\in\mathcal{K}_\infty$ если $\rho\in\mathcal{K}$ и $\rho(s)\to\infty$ при $s\to\infty$. Функция $\beta: R_{\geq 0}\times R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$ принадлежит классу $\mathcal{KL}$, если она принадлежит классу $\mathcal{K}$ по первому аргументу (при любом фиксированном втором) и строго убывает до нуля по второму аргументу (при любом фиксированном первом). Будем обозначать расстояние от данной точки $\boldsymbol{\zeta}\in R^n$ до не пустого подмножества $\mathcal{A}$ из R^n как

$$|\zeta|_{\mathcal{A}}\overset{\Delta}{=}\operatorname{dist}[\zeta,\mathcal{A}]=\inf_{\boldsymbol{\eta}\in\mathcal{A}}[\zeta,\boldsymbol{\eta}],$$

при этом $|\zeta|_0=|\zeta|$ – обычная евклидова норма.

Очевидно, что устойчивая от входа к вектору состояния (УВС) система является глобально асимптотически устойчивой относительно подмножества $\mathcal{A}$ при нулевом входе. Кроме того, для любого не нулевого входа из L_∞^m выполнено условие предельной ограниченности траекторий:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{u})\right|_{\mathcal{A}}\leq\gamma\left(\|\mathbf{u}\|\right),$$

так называемое свойство асимптотической границы (АГ) (*asymptotic gain*). Можно сказать, что термин УВС объединяет в себе свойства, введенные в определениях 1 и 2: глобальную асимптотическую устойчивость при нулевом входе и предельную ограниченность при любом ограниченном в пространстве L_∞ внешнем возмущении.

Приведем известные достаточные и необходимые условия наличия свойства УВС у системы (4).

Лемма 1 [10,15]. Пусть *система (4) прямо полная и у нее существует УВС функция Ляпунова для не пустого замкнутого множества* $\mathcal{A}$: *то есть существуют функции* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathcal{K}_\infty$, $\sigma\in\mathcal{K}$ *такие, что выполнены неравенства*

$$\alpha_1\left(|\mathbf{x}|_{\mathcal{A}}\right)\leq V(\mathbf{x})\leq\alpha_2\left(|\mathbf{x}|_{\mathcal{A}}\right)\ \text{для}\ \forall\,\mathbf{x}\in R^n,$$

$$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x})\leq-\alpha_3\left(|\mathbf{x}|_{\mathcal{A}}\right)+\sigma\left(|\mathbf{u}|\right)\ \text{для}\ \forall\,\mathbf{x}\in R^n,\ \mathbf{u}\in L_\infty^m.$$

Тогда система является УВС относительно этого множества. ■

Если ограничиться рассмотрением только компактных множеств $\mathcal{A}$, то результат этой леммы также носит и необходимый характер. Для систем вида (4) (в том числе с выходом $\mathbf{y}=\mathbf{h}(\mathbf{x})$) можно также ввести в рассмотрение следующее свойство.

Определение 4 [9]. *Система (4) называется интегрально вход - вектор состояния устойчивой (ИУВС) если существуют функции* $\beta\in\mathcal{KL}$ *и* $\gamma\in\mathcal{K}$ *такие, что для* $\forall\,\mathbf{x}_0\in R^n$ *и всех* $t\geq 0$ *выполнено*

$$\left|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{u})\right|\leq\beta\left(|\mathbf{x}_0|,t\right)+\int_0^t\gamma\left(|\mathbf{u}(s)|\right)ds. \qquad \blacksquare$$

Лемма 2 [9]. *Система является ИУВС тогда и только тогда, если*

1) у нее существует ИУВС функция Ляпунова со следующими свойствами:

– существуют функции $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, *такие, что выполнено:*

$\alpha_1(|\mathbf{x}|)\le V(\mathbf{x})\le\alpha_2(|\mathbf{x}|)$ *для* $\forall\,\mathbf{x}\in R^n$*;*

– функция V *непрерывно дифференцируема вдоль траекторий системы (4), при этом существуют функция* $\sigma\in\mathcal{K}$ *и положительно определенная непрерывная функция* α, *такие, что*

$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x})\le-\alpha(|\mathbf{x}|)+\sigma(|\mathbf{u}|)$ *для* $\forall\,\mathbf{x}\in R^n$*;*

2) система является обнаруживаемой в нуле по функции выхода и h*-диссипативной, то есть существует функция* W *для которой можно предложить функции* $\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2\in\mathcal{K}_\infty$, $\tilde\sigma\in\mathcal{K}$ *и положительно определенная непрерывная функция* $\tilde\alpha$, *такие, что* $\tilde\alpha_1(|\mathbf{x}|)\le V(\mathbf{x})\le\tilde\alpha_2(|\mathbf{x}|)$ *и*

$L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}V(\mathbf{x})\le-\tilde\alpha(|\mathbf{y}|)+\tilde\sigma(|\mathbf{u}|)$ *для* $\forall\,\mathbf{x}\in R^n$. ■

Напомним, что система называется обнаруживаемой в нуле, если:

$\mathbf{y}(t)\equiv0$, $\mathbf{u}(t)\equiv0$ для $\forall\,t\ge0\ \Rightarrow\ \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0,0)\to0$ при $t\to+\infty$ для $\forall\,\mathbf{x}_0\in R^n$.

Основным отличием между УВС и ИУВС функциями Ляпунова являются требования, предъявляемы к функции α. Можно сказать, что термин ИУВС также объединяет в себе свойства, введенные в определениях 1 и 2: глобальную асимптотическую устойчивость при нулевом входе и предельную ограниченность при любом ограниченном в пространстве L_2 внешнем возмущении. Далее, будем говорить, что УВС система (1)–(3) является робастно-адаптивной, а ИУВС система – интегрально робастно-адаптивной.

Покажем, как применение этого аппарата к анализу процессов в системе (1) – (3) позволяет решить сформулированную проблему: наделить эту систему робастно-адаптивными свойствами.

Основные результаты. Сформулируем утверждение, гарантирующее разрешимость поставленной задачи в рамках используемого подхода.

Теорема 1. *Пусть при* $\boldsymbol{\theta}=\text{const}$ *система (1) – (3) является адаптивной. Тогда существуют непрерывные векторные функции* $\mathbf{k}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}}),\mathbf{k}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$*; всюду не вырожденные векторно-матричные функции* $\mathbf{T}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\mathbf{T}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$, *такие, что система*

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})+\mathbf{T}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\delta});\qquad(5)$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{U}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}});\qquad(6)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}=\mathbf{D}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}},\mathbf{k}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})+\mathbf{T}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\delta}),\qquad(7)$$

является робастно-адаптивной и прямо полной.

Доказательство. Согласно работе [10], если система вида

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{U}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}}),\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta});$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}=\mathbf{D}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{\delta})$$

является при $\boldsymbol{\delta}=0$ глобально асимптотически устойчивой относительно некоторого множества $\mathcal{A}$, то система

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{U}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}}),\boldsymbol{\theta},\mathbf{k}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})+\mathbf{T}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\delta});$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}=\mathbf{D}(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}},\mathbf{k}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})+\mathbf{T}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\delta}),$$

для некоторых $\mathbf{k}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\mathbf{k}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\mathbf{T}_1(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $\mathbf{T}_2(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta},\hat{\boldsymbol{\theta}})$ наделена свойством УВС относительно этого множества. Очевидно, что из свойства УВС системы следует ее робастная адаптивность. Из определения этого свойства также следует полнота системы (5)–(7). ■

Представленный результат носит достаточно абстрактный характер, однако его существование позволяет наметить пути решения проблемы – огрубляющие обратные связи в канале возмущения.

Замечание 1. Отметим, что практическая реализуемость подобного решения может быть затруднена, так как требуется "мультипликативная фильтрация" возмущения $\boldsymbol{\delta}$ с использование матричных функций $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$. Однако, как показано в работе [13], если правая часть (1), (3) аффинна по вектору $\boldsymbol{\delta}$ (для свойства УВС относительно начала координат пространства состояний – $\mathcal{A}=\{0\}$), то эти матрицы можно выбрать единичными. Зависимость функций $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ от вектора неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$ также может затруднить реализацию этих законов. Кроме того, часто в практических приложениях значения неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$ – неизвестная функция времени, что также затрудняет практическую реализацию функций $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$. ■

С другой стороны, можно проанализировать условия разрешимости этой задачи, когда сигналы обратных связей $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ вводятся в другие каналы, например, в каналы управления. Продемонстрируем разрешимость этой, усложненной проблемы, анализируя задачу адаптивного управления строго пассивной системой.

Строго пассивная система. Рассмотрим модель системы вида (1)–(3):

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{G}(\mathbf{x})[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)\,\boldsymbol{\theta}+\mathbf{u}]+\mathbf{R}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\delta}; \tag{8}$$

$$\mathbf{u}=-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}+\mathbf{u}_1; \tag{9}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}=\gamma\,\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)^T\left[L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})^T+\mathbf{P}(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\delta}\right]+\mathbf{u}_2, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – функция регрессор [3], V – функция запаса системы (8); символом $L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})$ обозначена производная Ли от функции V, взятая вдоль направления векторной функции $\mathbf{f}$, обозначение $L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})$ понимается как производная Ли взятая для функции V вдоль всех столбцов матрицы $\mathbf{G}$ – ковектор; $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ – вектора внешних управлений, назначением которых будет решаться задача компенсации внешних возмущений в этой системе.

Предположим, что выполнены следующие ограничения.

Допущение 1. *Пусть для всех* $\mathbf{x}\in R^n$, $t\geq 0$ *и некоторой непрерывной функции* $\sigma:R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$ *выполнено:*

$$|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)|^2\leq\sigma(|\mathbf{x}|). \quad ■$$

Допущение 2. *Существует гладкая положительно определенная и собственная функция запаса* $V:R^n\to R$, *такая, что*

$$L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})\leq-\alpha(|\mathbf{x}|) \text{ для всех } \mathbf{x}\in R^n,$$

где α *– положительно определенная функция.* ■

Допущение 3. *Существует непрерывная функция* $\kappa:R_{\geq 0}\to R_{\geq 0}$, *такая, что для всех* $\mathbf{x}\in R^n$ *выполнено неравенство*

$$|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2\leq\kappa(|\mathbf{x}|)|L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})|^2. \quad ■$$

Допущение 4. *Пусть существует положительная константа* χ, *такая, что для всех* $\mathbf{x}\in R^n$ *выполнено неравенство:*

$$|\mathbf{P}(\mathbf{x})|\leq\chi. \quad ■$$

Первое из введенных допущений устанавливает весьма общую оценку сверху для функции регрессора. Согласно второму допущению и лемме Якубовича-Калмана-Попова, при $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta},\mathbf{u}=0$ система (8) является строго пассивной по выходу:

$$\mathbf{y}=L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x}). \tag{11}$$

Третье допущение определяет условие, при котором с использованием управления можно компенсировать влияние внешнего возмущения в правой части (8). Четвертое допущение носит технический характер и может быть ослаблено.

Эту модель можно интерпретировать следующим образом. При $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$, $\boldsymbol{\delta}=0$ система (8) – (10) является адаптивной (см. лемму 3). С появлением внешнего возмущения $\boldsymbol{\delta}\neq 0$, в правой части системы (8) и в измерениях вектора выхода (11) (возмущение $\boldsymbol{\delta}$ влияет на динамику изменения $\hat{\boldsymbol{\theta}}$), это свойство в общем случае оказывается утерянным. Требуется предложить законы обратной связи $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$, обеспечивающие замкнутой системе свойство робастной адаптивности.

Лемма 3. *Пусть для всех* $t\geq 0$ $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\boldsymbol{\delta}\equiv 0$. *Тогда система (8) – (10) является адаптивной.*

Доказательство. Рассмотрим для этой системы следующую функцию Ляпунова:

$$U(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}})=V(\mathbf{x})+0.5\gamma^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})^T(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}), \tag{12}$$

полная производная по времени которой примет вид:

$$\dot{U}=L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})+L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})-\left[L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^T\leq-\alpha(|\mathbf{x}|).$$

Из этого неравенства сразу, в силу свойств функции U, следует полнота системы и асимптотическая устойчивость множества $\mathcal{A}$. ■

Теперь рассмотрим случай, когда в системе (8) – (10) внешнее возмущение $\boldsymbol{\delta}\neq 0$. Будем искать функции управления $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, обеспечивающие системе (8) – (10)

свойства робастной адаптивности. Для решения данной задачи воспользуемся функцией Ляпунова вида

$$W(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}})=V(\mathbf{x})+0.5\gamma^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Производная функции W в силу уравнений системы (8) – (10) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{W}&\le-\alpha(|\mathbf{x}|)+L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}+L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\theta}+\mathbf{u}_1]-\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\boldsymbol{\omega}^T(\mathbf{x},t)\mathbf{P}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}+\gamma^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{u}_2\le\\&\le-\alpha(|\mathbf{x}|)+0.5\beta|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2+0.5\beta^{-1}|\boldsymbol{\delta}|^2+L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})\mathbf{u}_1+0.5\beta|L_{\mathbf{G}}V|^2|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)|^2+\\&+0.5\beta^{-1}|\boldsymbol{\theta}|^2+0.5\beta|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x},t)|^2\left(|\mathbf{P}(\mathbf{x})||\hat{\boldsymbol{\theta}}|\right)^2+0.5\beta^{-1}|\boldsymbol{\delta}|^2+\gamma^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{u}_2\le\\&\le-\alpha(|\mathbf{x}|)+0.5\beta|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2+\beta^{-1}|\boldsymbol{\delta}|^2+L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})\mathbf{u}_1+0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)|L_{\mathbf{G}}V|^2+\\&\quad+0.5\beta^{-1}|\boldsymbol{\theta}|^2+0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)\chi^2|\hat{\boldsymbol{\theta}}|^2+\gamma^{-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T\mathbf{u}_2,\end{aligned}\tag{13}$$

где β – некоторое положительное число.

Основываясь на (13), проанализируем свойства системы (8) – (10) в зависимости от характера влияния возмущения $\boldsymbol{\delta}$ и вида принятых управлений $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$.

Лемма 4. *Пусть выполнены допущения 1 – 4, при этом существует* $c>0$, *такое, что* $\forall s\ \ \sigma(s)\ge c$ *и*

$$\mathbf{u}_1=-0.5\beta[\kappa(|\mathbf{x}|)+\sigma(|\mathbf{x}|)]L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})^T,\tag{14}$$

$$\mathbf{u}_2=-\gamma\beta\chi^2\sigma(|\mathbf{x}|)\hat{\boldsymbol{\theta}}.\tag{15}$$

Тогда система (8) – (10) будет робастно-адаптивной по расширенному входу $(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\theta})$.

Доказательство. Запишем неравенство (13) с учетом управлений, предложенных в лемме:

$$\begin{aligned}\dot{W}&\le-\alpha(|\mathbf{x}|)+0.5\beta|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2+\beta^{-1}|\boldsymbol{\delta}|^2-0.5\beta[\kappa(|\mathbf{x}|)+\sigma(|\mathbf{x}|)]|L_{\mathbf{G}}V|^2+\\&\quad+0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)|L_{\mathbf{G}}V|^2-0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)\chi^2|\hat{\boldsymbol{\theta}}|^2+0.5\beta^{-1}|\boldsymbol{\theta}|^2.\end{aligned}$$

По условию допущения 3, верно неравенство

$$|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2-\kappa(|\mathbf{x}|)|L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})|^2\le0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{W}&\le-\alpha(|\mathbf{x}|)-0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)\chi^2|\hat{\boldsymbol{\theta}}|^2+\sigma_1(|\boldsymbol{\theta}|)+\sigma_2(|\boldsymbol{\delta}|)\le\\&\le-\alpha(|\mathbf{x}|)-0.5\beta c\chi^2|\hat{\boldsymbol{\theta}}|^2+\sigma_1(|\boldsymbol{\theta}|)+\sigma_2(|\boldsymbol{\delta}|),\end{aligned}$$

где $\sigma_1(s)=0.5\beta^{=-1}s^2$, $\sigma_2(s)=0.5\beta s^2$ и $\tilde{\alpha},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in\mathcal{K}_\infty$. Из этого неравенства и свойств функции W следует свойство полноты адаптивной системы [8]. Для доказательства утверждения этой леммы можно воспользоваться результатом леммы 1. ■

Раскроем физическое содержание предложенных управлений $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Закон управления $\mathbf{u}_1$ обеспечивает робастные свойства системы (8) по отношению к вектору внешних возмущений $\boldsymbol{\delta}$, в то время как управление $\mathbf{u}_2$ гарантирует аналогичные свойства системе (10). Отметим, что асимптотическая устойчивость начала координат в полученной системе возможна только при следующих условиях: $\boldsymbol{\theta}(t)\to0$, $\boldsymbol{\delta}(t)\to0$ при $t\to+\infty$. Если эти сигналы остаются просто ограниченными с течением времени, то и вектор состояния системы $(\mathbf{x},\hat{\boldsymbol{\theta}})$ останется ограниченным.

Замечание 2. С уменьшением величины параметра β будет уменьшаться и амплитуда внутренних огрубляющих управлений $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, что в свою очередь будет приводить к увеличению влияния на качество переходных процессов в системе вектора внешних возмущений $\boldsymbol{\delta}$ вектора неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta}$. ■

Замечание 3. Полученная система отвечает всем требованиям, предъявляемым к робастно-адаптивным системам, так как при нулевом расширенном возмущении $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\delta}$ система выходит на множество $\mathcal{A}$. Этот результат не противоречит теореме 1, хотя изначально законы управления $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ вводились по отличным от обоснованных в теореме каналам. Выше уже отмечалось (см. замечание 1), что робастофицирующие обратные связи в канале возмущения практически сложно реализуемы, синтез же таких обратных связей по другим каналам приводит к снижению качества переходных процессов в проектируемой системе, в частности свойство робастной адаптивности удалось доказать только для расширенного вектора состояний. ■

Рассмотрим теперь другой интересный случай.

Лемма 5. *Пусть выполнены допущения 1 – 4, при этом* $\sigma\in\mathcal{K}$. *Тогда система*

(8) – (10), (14), (15) будет интегрально робастно-адаптивной по расширенному входу $(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\theta})$ *Кроме того, если* $\alpha(s)>0.25|\boldsymbol{\theta}|^2\beta\chi^2\sigma(s)$, *то система будет адаптивной при* $\boldsymbol{\delta}(t)\equiv 0$, $\forall t\geq 0$.

Доказательство. Пусть сначала $\boldsymbol{\delta}(t)\neq 0$. Запишем неравенство (13) с учетом управлений (14), (15):

$$\dot{W}\leq -\alpha(|\mathbf{x}|)+0.5\beta|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2+\beta^{-1}|\boldsymbol{\delta}|^2-0.5\beta[\kappa(|\mathbf{x}|)+\sigma(|\mathbf{x}|)]|L_{\mathbf{G}}V|^2+$$
$$+0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)|L_{\mathbf{G}}V|^2-0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)\chi^2\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|^2+0.5\beta^{-1}|\boldsymbol{\theta}|^2.$$

По условию допущения 3, верно неравенство

$$|L_{\mathbf{R}}V(\mathbf{x})|^2-\kappa(|\mathbf{x}|)|L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})|^2\leq 0,$$

следовательно,

$$\dot{W}\leq -\alpha(|\mathbf{x}|)-0.5\beta\sigma(|\mathbf{x}|)\chi^2\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|^2+\sigma_1(|\boldsymbol{\theta}|)+\sigma_2(|\boldsymbol{\delta}|)\leq -\alpha(|\mathbf{x}|)+\sigma_1(|\boldsymbol{\theta}|)+\sigma_2(|\boldsymbol{\delta}|),$$

где $\sigma_1(s)=0.5\beta^{=-1}s^2$, $\sigma_2(s)=0.5\beta s^2$ и $\tilde{\alpha},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in\mathcal{K}_\infty$. Из этого неравенства и свойств функции W следует свойство полноты адаптивной системы [8]. Для доказательства свойства интегральной робастно-адаптивности можно воспользоваться результатом леммы 2.

Рассмотрим теперь случай $\boldsymbol{\delta}(t)\equiv 0$, $\forall t\geq 0$. Обоснуем свойство адаптивности полученной системы, с этой целью проанализируем полную производную по времени от функции Ляпунова (12):

$$\dot{U}=L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})-0.5\beta[\kappa(|\mathbf{x}|)+\sigma(|\mathbf{x}|)]|L_{\mathbf{G}}V(\mathbf{x})|^2+\beta\chi^2\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\sigma(|\mathbf{x}|)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$\leq -\alpha(|\mathbf{x}|)+\beta\chi^2\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T\sigma(|\mathbf{x}|)\hat{\boldsymbol{\theta}}=-\alpha(|\mathbf{x}|)+\beta\chi^2\sigma(|\mathbf{x}|)\left[|\boldsymbol{\theta}|\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|-\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|^2\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в последнем неравенстве является квадратичной формой по $\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|$, при этом для всех $|\boldsymbol{\theta}|\leq\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|$ эта квадратичная форма неположительна. При $|\boldsymbol{\theta}|>\left|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right|$ эта функция достигает своего максимального значения $0.25|\boldsymbol{\theta}|^2$. В этом случае, если выполнены условия леммы и

$$\alpha(|\mathbf{x}|)>0.25|\boldsymbol{\theta}|^2\beta\chi^2\sigma(|\mathbf{x}|),$$

то система будет наделена свойством адаптивности. ■

Пример. Рассмотрим следующую модель адаптивной системы:

$$\dot{x}=-x+\theta x+u+r\delta,\ r\geq 0;$$
$$u=-\hat{\theta}x+u_1;$$
$$\dot{\hat{\theta}}=\gamma x^2+p\delta+u_2,\ p\geq 0.$$

Все обозначения совпадают с введенными ранее, требуется робастно-адаптивно стабилизировать систему по x в присутствии внешнего возмущения δ.

Условия допущения 2 здесь выполнены для функции запаса

$$V\left(x,\hat{\theta}\right)=0.5x^2$$

и $\alpha(s)=s^2$, $\alpha\in\mathcal{K}_\infty$. Графики интегральных кривых при $u_1=u_2=\delta\equiv 0$ для всех $t\geq 0$ представлены на рис. 1 (при моделировании значение параметра $\gamma=1$).

С появлением внешнего возмущения, например, гармонического:

$$\delta(t)=\sin(t)$$

при $r=p=1$ и $u_1=u_2\equiv 0$ эта система теряет свойство устойчивости. Графики интегральных кривых представлены на рис. 2.

Отметим, что для этой системы выполнены условия допущения 1 при $\omega(t,x)=x$ и $\sigma(s)=\alpha(s)$; функцию κ из допущения 3 можно выбрать $\kappa(s)=2r^2$, а $\chi=p$ в допущении 4. То есть система отвечает всем введенным в работе допущениям.

В соответствии с результатом леммы 5 можно выбрать следующие законы управления при $\beta=0.5$:

$$u_1=-0.5\left[r^2+x^2\right]x,$$
$$u_2=-\gamma\ 0.5px^2\hat{\theta}.$$

Интегральные кривые для этого случая представлены на рис. 3.

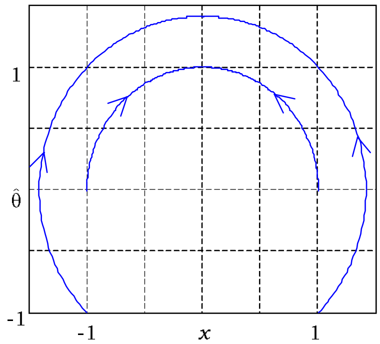

Рис. 1. Интегральные кривые для случая $u_1 = u_2 = \delta \equiv 0$.

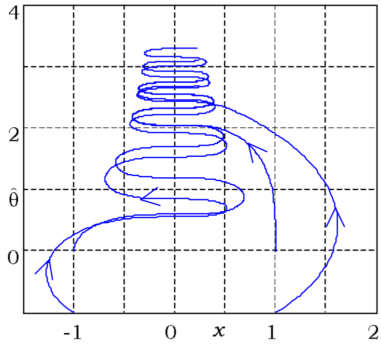

Рис. 2. Интегральные кривые для случая $u_1 = u_2 \equiv 0$, $\delta(t) = \sin(t)$.

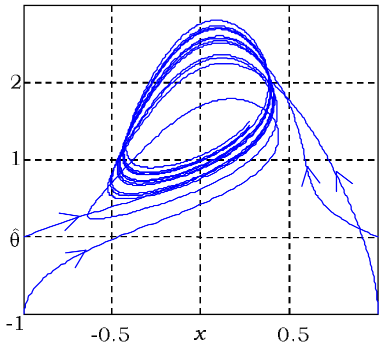

Рис. 3. Интегральные кривые УВС системы.

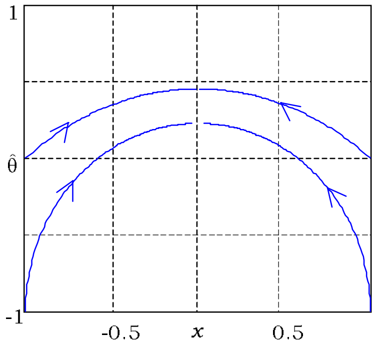

Рис. 4. Интегральные кривые УВС системы при $p = 0$.

В этом примере при отсутствии возмущений полученная система будет наделена свойством адаптивности. Интегральные кривые, иллюстрирующие этот вывод, приведены на рис. 4.

Заключение. В работе обосновано возможное направление синтеза робастно-адаптивных систем управления: введение обратных связей в каналы возмущений. Предложен новый класс огрубленных алгоритмов скоростного градиента, рассмотренное решение при определенных условиях гарантирует свойство адаптивности системы в отсутствии возмущения и предельную ограниченность траекторий в присутствии сигнала $\boldsymbol{\delta}$. Работоспособность полученного решения проиллюстрирована на примере компьютерного моделирования.

Литература.

1. Воронов К.В., Королева О.И., Никифоров В.О. Алгоритмы робастного управления неопределенными динамическими объектами с функциональными неопределенностями // Международная конференция "Нелинейные науки на рубеже тысячелетий". СПб: СПбГИТМО, 1999. С.105
2. Воронов К.В., Королева О.И., Никифоров В.О. Робастное управление нелинейными объектами с функциональными неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2001, Ч2.
3. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами //Сер. “Анализ и синтез нелинейных систем”. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
4. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. СПб. 2001. – 259 с.
5. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движений по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987 – 263 с.
6. Фомин В.Н., Фрадков А.Л. Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.:Наука, 1981. – 447 с.
7. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990. – 286 с.
8. Angeli D., Sontag E. Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations //Systems and Control Letters, № 38, 1999, pp. 209 – 217.
9. Krichman M., Sontag E.D., Wang Y. Input-Output-to-State Stability // to be submitted.
10. Lin Y. Input-to-State Stability with Respect to Noncompact sets // In proc/ of 13th IFAC Triennial World Congress, San Francisco, 1996.
1. Lyn Y., Sontag E., Wang Y. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability //

SIAM Journal on Control and Optimization, № 34, 1996, pp. 124 – 160.
12. Polushin I. G. On the output feedback robust stabilization of passive nonlinear systems //Proc. 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney (CDC`2000), Australia, December 12–15, 2000. P. 2934–2935.
13. Sontag E.D. Further facts about input-to-state stabilization // Report 88-15, SYCON – Rutgers Center of System and Control, Dec. 1988.
14. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Trans. Aut. Contr., vol. 34, 1989, pp. 435 – 443.
15. Sontag E.D. On the input-to-state stability property // European Journal of Control, vol. 1, 1995, pp. 24 – 36.