МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1995

УДК 539.3:534.1

 Е. А. ИВАНОВА

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ГАМИЛЬТОНА В ЗАДАЧАХ О НИЗКОЧАСТОТНЫХ И ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ РЕЙССНЕРА

Известно, что при решении некоторых задач о вынужденных колебаниях пластин, в частности при решении задач о колебаниях пластин под действием ударных и других быстро меняющихся во времени нагрузок, необходимо учитывать инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. Поэтому важное значение приобретает решение задачи о нахождении собственных частот и собственных форм колебаний пластины в теории типа Рейсснера. Решение этой задачи осуществляется, как правило, численными методами, поскольку точное аналитическое решение удается построить только в достаточно редких случаях. Большинство численных методов основано на использовании вариационных принципов. Функционал Гамильтона в теории пластин типа Рейсснера включает в себя функции, быстро меняющиеся по пространственным координатам, что затрудняет использование этого функционала в численных процедурах. Целью работы является формулировка приближенных функционалов Гамильтона в теории пластин типа Рейсснера, из которых исключены все быстро меняющиеся по пространственным координатам функции.

В публикуемой работе проводится асимптотическое исследование задачи о свободных колебаниях пластины и показывается, что при низкочастотных и высокочастотных колебаниях функции, определяющие напряженно-деформированное состояние пластины, имеют совершенно различный характер изменения по пространственным координатам. Однако, как при низкочастотных, так и при высокочастотных свободных колебаниях, решения включают в себя быстро меняющиеся по пространственным координатам функции: при низкочастотных колебаниях это функции типа погранслоя, а при высокочастотных колебаниях это функции, проникающие во всю область пластины. Ниже будут сформулированы два функционала Гамильтона, не зависящие от быстро меняющихся по пространственным координатам функций, один из которых предназначен для решения задачи о низкочастотных свободных колебаниях, а другой — для решения задачи о высокочастотных свободных колебаниях. Данные функционалы сформулированы с определенной асимптотической точностью, а именно: низкочастотный функционал позволяет находить собственные частоты и собственные формы с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с единицей, а высокочастотный функционал позволяет находить собственные частоты с асимптотической ошибкой порядка $O(h^4)$ в сравнении с единицей и главные члены собственных форм.

Задача о низкочастотных свободных колебаниях исследовалась многими авторами. Новой является вариационная формулировка данной задачи. Следует отметить, что формулировка функционала Гамильтона в задаче о низкочастотных колебаниях аналогична формулировке функционала энергии в задаче о статическом изгибе пластины Рейсснера [1]. Поэтому при изложении задачи о низкочастотных колебаниях ограничиваемся только основными результатами.

Задача о высокочастотных свободных колебаниях пластин исследована недостаточно. Здесь следует отметить работу [1], в которой, исходя из трехмерной теории упругости, при помощи вариационно-асимптотического метода получены уравнения свободных колебаний пластин для различных частотных спектров. В отличие от [1], в публикуемой работе предпринята попытка таким образом сформулировать задачу о высокочастотных колебаниях, чтобы она стала удобной для проведения численных расчетов

[1] Результаты исследований по этой задаче будут скоро опубликованы совместно с П. А. Жилиным.

и охватывала все возможные типы граничных условий. Следует отметить также, что сформулированные ниже уравнения для высокочастотных свободных колебаний отличаются от уравнений из [1].

1. Сводка основных уравнений теории пластин типа Райсснера. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пластины с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига. Уравнения, описывающие свободные колебания пластины имеют вид [2]:

$$D\Delta\Delta\Phi + \rho h\ddot{\Phi} - \frac{\rho h^3}{12}\left(1 + \frac{2}{\Gamma(1-\mu)}\right)\Delta\ddot{\Phi} + \frac{\rho^2 h^3}{12G\Gamma}\ddot{\ddot{\Phi}} = 0 \tag{1.1}$$

$$\Delta F - \frac{12\Gamma}{h^2}F - \frac{\rho}{G}\ddot{F} = 0 \tag{1.2}$$

Поперечный прогиб w, вектор углов поворота ψ, вектор поперечных сил $\mathbf{N}$ и тензор моментов $\mathbf{M}$ вычисляются по формулам

$$w = -\Phi + \frac{h^2}{6\Gamma(1-\mu)}\Delta\Phi - \frac{\rho h^2}{12G\Gamma}\ddot{\Phi}, \quad \psi = \nabla\Phi + \nabla F \times \mathrm{n}$$

$$\mathbf{N} = D\nabla\Delta\Phi - (\rho h^3/12)\nabla\ddot{\Phi} + Gh\Gamma\nabla F \times \mathrm{n} \tag{1.3}$$

$$M = D\,[(1-\mu)\nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi \mathrm{a} + (1/2)(1-\mu)(\nabla\nabla F \times \mathrm{n} - \mathrm{n} \times \nabla\nabla F)]$$

Здесь h — толщина пластины, $D = Eh^2/[12(1-\mu^2)]$ — жесткость на изгиб, $Gh\Gamma$ — жесткость на сдвиг, $G = \frac{1}{2}E/(1+\mu)$ Γ — коэффициент поперечного сдвига, μ — коэффициент Пуассона, ρ — объемная плотность массы, n — вектор единичной нормали к плоскости пластины, $a = \mathrm{E} - \mathrm{nn}$, E — единичный тензор.

Поперечный прогиб, вектор углов поворота, вектор поперечных сил и тензор моментов связаны с перемещениями и напряжениями в трехмерной теории упругости следующим образом [3]:

$$hw = \langle \mathrm{u}\cdot\mathrm{n}\rangle, \quad h^3\psi = \langle \mathrm{u}z\rangle, \quad \mathbf{N} = \langle \mathrm{a}\cdot\tau\cdot\mathrm{n}\rangle \tag{1.4}$$

$$\mathbf{M} = \langle \mathrm{a}\cdot\tau\cdot\mathrm{a}z\rangle, \quad \langle f\rangle = \int_{-h/2}^{h/2} f\,dz$$

где u и τ — вектор перемещений и тензор напряжений в трехмерной теории.

Кинематические граничные условия имеют вид

$$w|_c = 0, \quad \nu\cdot\psi|_c = 0, \quad \tau\cdot\psi|_c = 0 \tag{1.5}$$

Силовые граничные условия записываются в форме

$$\nu\cdot\mathbf{N}|_c = 0, \quad \nu\cdot\mathbf{M}\cdot\nu|_c = 0, \quad \nu\cdot\mathbf{M}\cdot\tau|_c = 0 \tag{1.6}$$

Здесь ν, τ — векторы единичной внешней нормали и единичной касательной к контуру пластины, причем векторы ν, τ, n образуют правую тройку.

Известно [4], что в теории пластин типа Рейсснера существует три спектра собственных частот, для которых справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\omega^2_{(1)i} = h^2\omega^{(1)}_{2,i} + h^3\omega^{(1)}_{3,i} + \ldots \tag{1.7}$$

$$\omega^2_{(2)i} = 12G\Gamma/(\rho h^2) + \omega^{(2)}_{0,i} + \ldots, \quad \omega^2_{(3)i} = 12G\Gamma/(\rho h^2) + \omega^{(3)}_{0,i} + \ldots$$

где первый спектр из (1.7) характеризует низкочастотные изгибные колебания, второй и третий спектры из (1.7) характеризуют высокочастотные сдвиговые и изгибные колебания.

2. Низкочастотные свободные колебания. При низкочастотных свободных колебаниях функции Φ и F обладают такими же свойствами, как и при статическом изгибе пластины. Функция Φ описывает проникающие во всю область решения и является медленно меняющейся по пространственным координатам функцией. С асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с главным членом уравнение (1.1) совпадает с уравнением для поперечного прогиба в теории Кирхгофа:

$$D\Delta\Delta\Phi + \rho h\ddot{\Phi} = 0 \tag{2.1}$$

Функция F представляет собой функцию типа погранслоя, быстро убывающую при удалении от границы и медленно меняющуюся вдоль контура пластины. Показано [2], что погранслойный потенциал F с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с главным членом может быть представлен в виде

$$F(\nu, \tau) = f(\tau)\left[1 - \frac{\nu}{2R}\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right), \quad \delta = \sqrt{12\Gamma} \quad (\nu < 0) \tag{2.2}$$

Здесь ν, τ — локальная система координат, введенная на контуре пластины; R — радиус кривизны контура в данной точке. Заметим, что формула (2.2) справедлива, когда $h/R \ll 1$. Для функций F и Φ при низкочастотных свободных колебаниях справедливо асимптотическое соотношение: $F \sim h^2\Phi$.

Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины при низкочастотных колебаниях, имеют асимптотические представления, в точности совпадающие с теми, которые имеют место при статическом изгибе пластины

$$w = -\Phi, \ \psi = \nabla\Phi - \frac{\delta}{h}f(\tau)\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)\tau$$

$$\mathrm{N} = D\nabla\Delta\Phi + Gh\Gamma\left[\left(-\frac{\delta}{h}\left(1 - \frac{\nu}{2R}\right) + \frac{1}{2R}\right)f(\tau)\tau + \right.$$

$$\left. + \left(\left(1 - \frac{\nu}{2R}\right)f'(\tau) + \frac{\nu R'}{2R^2}f(\tau)\right)\nu\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right) \tag{2.3}$$

$$\mathrm{M} = D\left[(1-\mu)\nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi \mathrm{a}\right] + \left[D(1-\mu)\frac{\delta}{h}f'(\tau)(\nu\nu - \tau\tau) - \right.$$

$$\left. - Gh\Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2R} - \frac{2h}{R\delta}\right)f(\tau)(\nu\tau + \tau\nu)\right]\exp\left(\frac{\delta}{h}\nu\right)$$

Кинематические граничные условия будут

$$-\Phi|_c = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\bigg|_c = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\bigg|_c - \frac{\delta}{h}f(\tau) = 0 \tag{2.4}$$

Силовые граничные условия имеют вид

$$D\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial\nu}\bigg|_c + Gh\Gamma f'(\tau) = 0$$

$$D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} + \frac{\mu}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)\bigg|_c + D(1-\mu)\frac{\delta}{h}f'(\tau) = 0 \tag{2.5}$$

$$D(1-\mu)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau}\bigg|_c - Gh\Gamma\left(1 - \frac{2h}{R\delta}\right)f(\tau) = 0$$

Граничные условия (2.4), (2.5) имеют такой же физический смысл, как и условия (1.5), (1.6) соответственно.

---

[2] См. примечание на с. 181.

Уравнения (2.1), (2.2) в совокупности с граничными условиями (2.4), (2.5) представляют собой приближенную формулировку задачи о низкочастотных свободных колебаниях, позволяющую находить собственные частоты, а также все физические величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, с асимптотической ошибкой порядка $O(h^2)$ в сравнении с главным членом.

3. Высокочастотные свободные колебания. При высокочастотных свободных колебаниях свойства функций Φ и F существенным образом отличаются от тех, которые имели место при низкочастотных колебаниях и статическом изгибе. Функция F уже не обладает свойством погранслойности, а является медленно меняющейся по пространственным координатам функцией. Это связано с тем, что главные члены второго и третьего слагаемых в уравнении (1.2) взаимно уничтожаются. В приближенной постановке задачи уравнение (1.2) остается без изменений. Важной особенностью высокочастотных свободных колебаний является то обстоятельство, что функции F и Φ имеют одинаковый асимптотический порядок: $F \sim \Phi$. Проникающий потенциал Φ при высокочастотных колебаниях имеет несколько иную структуру, чем при низкочастотных, а именно: кроме медленно меняющейся по пространственным координатам функции он включает в себя еще и быстро меняющуюся функцию, которой не было при низкочастотных колебаниях и статическом изгибе. Далее, для быстро меняющейся части проникающего потенциала будет введено обозначение φ, а для медленно меняющейся части будет использоваться то же обозначение, что и для самого проникающего потенциала. Это представляется удобным, поскольку для функций φ и Φ справедливо следующее асимптотическое соотношение: $\varphi \sim h^2\Phi$. На первый взгляд может показаться, что функцию φ вообще можно не учитывать, так как она мала по сравнению с Φ, однако это не совсем так. Дело в том, что функция φ может оказывать влияние на главные члены некоторых физических величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины, поскольку эти физические величины зависят не только от самого проникающего потенциала, но и от его производных до третьего порядка включительно. Проведем рассуждения, позволяющие из уравнения (1.1) получить приближенные уравнения для медленно меняющейся составляющей проникающего потенциала Φ и для быстро меняющейся составляющей проникающего потенциала φ. Будем исходить из предположения, что для функций Φ и φ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\partial\Phi/\partial x \backsim \partial\Phi/\partial y \backsim \Phi, \quad \partial\varphi/\partial x \backsim \partial\varphi/\partial y \backsim h^{-1}\varphi$$

$$\ddot{\Phi} = [-12G\Gamma/(\rho h^2) + O(1)]\,\Phi, \quad \ddot{\varphi} = [-12G\Gamma/(\rho h^2) + O(1)]\,\varphi$$

Подставив в уравнение (1.1) выражение для проникающего потенциала в виде суммы $\Phi + \varphi$ и сохранив в нем только асимптотически главные члены, получим

$$GhA(\Phi) + DB(\varphi) = 0$$

$$A(\Phi) = \left(\Gamma + \frac{2}{1-\mu}\right)\Delta\Phi - \frac{12\Gamma}{h^2}\Phi - \frac{\rho}{G}\ddot{\Phi} \tag{3.1}$$

$$B(\varphi) = \Delta\left[\Delta\varphi + \frac{12}{h^2}\left(1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2}\right)\varphi\right]$$

Заметим, что уравнение (3.1) содержит в себе очевидное противоречие. С одной стороны, функция $A(\Phi)$ является медленно меняющейся функцией, так как она зависит от медленно меняющейся функции Φ, а функция $B(\varphi)$ является быстро меняющейся функцией, так как она зависит от быстро меняющейся функции φ. С другой стороны, согласно уравнению (3.1), функции $A(\Phi)$ и $B(\varphi)$ равны друг другу с точностью до постоянного множителя. Таким образом получается, что функции $A(\Phi)$ и $B(\varphi)$ должны быть одновременно и быстро и медленно меняющимися функциями. Единственной функцией, обладающей таким свойством, является функция, тождественно равная нулю. Поэтому можно утверждать, что уравнение (3.1) фактически представляет собой два уравнения

$$A(\Phi) = 0, \quad B(\varphi) = 0 \tag{3.2}$$

Первое уравнение из системы (3.2) имеет вид

$$\left(\Gamma + \frac{2}{1-\mu}\right)\Delta\Phi - \frac{12\Gamma}{h^2}\Phi - \frac{\rho}{G}\ddot{\Phi} = 0 \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) позволяет находить асимптотически главный член медленно меняющейся части проникающего потенциала. Заметим, что уравнение (3.3) для функции Φ совпадает с уравнением (1.2) для функции F с точностью до числового коэффициента при первом слагаемом, и поэтому для функции Φ справедливо все, что было сказано ранее относительно особенностей поведения функции F при высокочастотных колебаниях.

Второе уравнение из системы (3.2) имеет вид

$$\Delta z(\varphi) = 0, \quad z(\varphi) = \Delta\varphi + \frac{12}{h^2}\left(1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2}\right)\varphi \tag{3.4}$$

Решением уравнения вида $\Delta z = 0$ является медленно меняющаяся функция. Поскольку здесь $z(\varphi)$ изменяется быстро, можно исключить из рассмотрения все решения уравнения $\Delta z = 0$, кроме одного: $z \equiv 0$. В этом случае уравнение для φ принимает вид

$$\Delta\varphi + \frac{12}{h^2}\left(1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2}\right)\varphi = 0 \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) позволяет находить асимптотически главный член быстро меняющейся части проникающего потенциала. Заметим, что в отличие от низкочастотных колебаний, при высокочастотных колебаниях быстро меняющаяся функция не является функцией типа погранслоя, а проникает во всю область пластины.

Величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины при высокочастотных колебаниях имеют следующие асимптотические представления:

$$\begin{gathered}
w = -\tfrac{1}{12}h^2\Delta\Phi - (1 + 2/[\Gamma(1-\mu)])\,\varphi \\
\psi = \nabla\Phi + \nabla F \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{N} = Gh\Gamma(\nabla\Phi + \nabla F \times \mathbf{n}) \\
\mathbf{M} = D\,[(1-\mu)\nabla\nabla(\Phi + \varphi) + \mu\Delta(\Phi + \varphi)\,\mathbf{a} + \\
+ \tfrac{1}{2}(1-\mu)(\nabla\nabla F \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \nabla\nabla F)]
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Прежде чем перейти к формулировке граничных условий, следует обратить внимание на еще одно важное свойство функции φ. Рассмотрим какое-нибудь граничное условие, зависящее от φ, например $w\,|_c = 0$. Очевидно, функция не может быстро изменяться на границе пластины, поскольку остальные слагаемые в обсуждаемом граничном условии изменяются медленно. Аналогичное рассуждение можно провести и для любого другого граничного условия, зависящего от φ. Кроме того, очевидно, что функция φ, в общем случае, не равна нулю на контуре пластины, поскольку тогда она обратилась бы в ноль во всей области. В создавшейся ситуации представляется наиболее естественным следующий вывод: на границе пластины функция φ теряет свойство быстрой изменяемости по пространственным координатам и становится медленно меняющейся вдоль контура пластины функцией. Подчеркнем, что функция φ медленно меняется только на границе пластины; во внутренних точках области, сколь угодно близких к границе, это уже быстро меняющаяся во всех направлениях функция. Таким образом, справедливо следующее утверждение: при дифференцировании по касательной к контуру на границе области функция φ не меняет своего асимптотического порядка $\partial\varphi/\partial\tau|_c \sim \varphi$.

Кинематические граничные условия имеют вид

$$-\tfrac{1}{12}h^2\Delta\Phi - (1 + 2/[\Gamma(1-\mu)])\,\varphi|_c = 0$$

$$\partial\Phi/\partial\nu + \partial F/\partial\tau|_c = 0, \qquad \partial\Phi/\partial\tau - \partial F/\partial\nu|_c = 0 \tag{3.7}$$

Силовые граничные условия запишем так

$$Gh\Gamma\,(\partial\Phi/\partial\nu + \partial F/\partial\tau)|_c = 0 \tag{3.8}$$

$$D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\nu\partial\tau} - \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)\right] + D\left[\Delta\Phi - \frac{12}{h^2}\left(1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2}\right)\varphi\right]\Big|_c = 0$$

$$D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu\partial\tau} + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial\nu} + \frac{\partial^2 F}{\partial\tau^2}\right)\right] - \left(\frac{\rho h^3}{12}\ddot{F} + Gh\Gamma F\right)\Big|_c = 0$$

Граничные условия (3.7), (3.8) имеют такой же физический смысл, как и условия (1.5), (1.6) соответственно.

Уравнения (1.2), (3.3), (3.5) в совокупности с граничными условиями (3.7), (3.8) представляют собой приближенную формулировку задачи о высокочастотных свободных колебаниях, позволяющую находить главные члены всех физических величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины, а также собственные частоты с асимптотической ошибкой $O(h^4)$ в сравнении с главным членом (напомним, что асимптотически главные члены всех собственных частот одинаковы и равны $\sqrt{12G\Gamma/(\rho h^2)}$).

Как уже отмечалось выше, функция φ представляет собой быстро меняющуюся по пространственным координатам функцию, проникающую во всю область пластины. Это означает, что представленная здесь постановка задачи о высокочастотных колебаниях практически не пригодна для численной реализации. В связи с этим становится актуальным вопрос о том, можно ли сформулировать задачу о высокочастотных колебаниях без учета функции φ? Прежде чем ответить на этот вопрос, обратим внимание на следующее обстоятельство: вектор углов поворота ψ и вектор поперечных сил $\mathbf{N}$, которые, как видно из формул (3.6), не зависят от функции φ, на два порядка больше, чем поперечный прогиб w и тензор моментов $\mathbf{M}$ соответственно. Этот факт позволяет утверждать, что напряженно-деформированное состояние пластины характеризуется, главным образом, вектором углов поворота и вектором поперечных сил, а поперечный прогиб и тензор моментов играют второстепенную роль. Поэтому формулировка задачи о высокочастотных колебаниях при исключенной функции φ в принципе имеет смысл.

Итак, исключим из системы уравнений для высокочастотных колебаний уравнение (3.5). При этом порядок системы дифференциальных уравнений по пространственным координатам понижается с 6-го до 4-го, и следовательно, три граничных условия исходной постановки задачи необходимо заменить двумя, не зависящими от функции φ. Прежде всего отметим, что одним из трех граничных условий исходной постановки задачи является либо третье условие из (3.7), либо третье условие из (3.8); эти условия не зависят от φ и поэтому всегда остаются без изменения. Два других граничных условия исходной постановки задачи заменяются одним в соответствии со следующим правилом: второе условие из (3.7) и первое условие из (3.8) тождественны друг другу и поэтому в случае одновременного задания этих условий нет необходимости выбирать одно из них, заметим, что при данных граничных условиях функция φ тождественно равна нулю;

в случае одновременного задания первого и второго условия из (3.7) следует выбрать второе условие, так как оно не зависит от φ, а первое — зависит;

в случае одновременного задания первого и второго условий из (3.8) следует выбрать первое условие, так как оно не зависит от φ, а второе — зависит;

первое условие из (3.7) и второе условие из (3.8) оба зависят от φ, и поэтому в случае одновременного задания этих условий, независящее от φ граничное условие представляет собой комбинацию первого условия из (3.7) и второго условия из (3.8)

$$D(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\nu\partial\tau}-\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)\right]+\left(\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\Phi}+Gh\Gamma\Phi\right)\Big|_c=0 \qquad (3.9)$$

Граничные условия в задаче без учета функции φ имеют следующий физический смысл. Третье условие из (3.7) выражает равенство нулю угла поворота вокруг нормали к контуру пластины $\tau\cdot\psi$. Второе условие из (3.7) и первое условие из (3.8) эквивалентны и выражают равенство нулю угла поворота вокруг касательной к контуру пластины $\nu\cdot\psi$. Третье условие из (3.8) выражает равенство нулю крутящего момента $\nu\cdot\mathbf{M}\cdot\tau$. Условие (3.9) выражает равенство нулю приведенного изгибающего момента $\nu\cdot\mathbf{M}\cdot\nu-Gh\Gamma w$.

4. Соотношения ортогональности. В результате проведенного исследования приближенных уравнений и граничных условий в задачах о низкочастотных и высокочастотных колебаниях были доказаны соотношения ортогональности собственных форм колебаний пластины. Низкочастотные формы колебаний удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int\limits_{(\Delta S)}\rho h\Phi_i\Phi_j dS=0 \quad (i\neq j) \qquad (4.1)$$

Высокочастотные формы колебаний удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int\limits_{(\Delta S)}\frac{\rho h^3}{12}\left[\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}+\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}-\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}-\frac{\partial F_j}{\partial x}\right)\right]\times$$
$$\times\, dS=0 \quad (i\neq j) \qquad (4.2)$$

Собственная форма, соответствующая низкой собственной частоте, (с индексом i) и собственная форма, соответствующая высокой собственной частоте, (с индексом j) удовлетворяют следующему соотношению ортогональности:

$$\int\limits_{(\Delta S)}\frac{\rho h^3}{12}\left[\Phi_i\Delta\Phi_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}-\frac{\partial F_j}{\partial x}\right)\right]dS=0 \qquad (4.3)$$

5. Вариационные формулировки задач о низкочастотных и высокочастотных свободных колебаниях. Ниже будут приведены вариационные формулировки предложенных в публикуемой работе постановок задач о низкочастотных и высокочастотных свободных колебаниях. Функционал Гамильтона, отвечающий задаче о низкочастотных колебаниях по своей структуре существенно отличается от известных функционалов Гамильтона в теории пластин. Отличие заключается в том, что некоторые слагаемые входят в функционал не в виде интеграла по площади, как это обычно бывает, а в виде интеграла по контуру. Именно этот прием преобразования интеграла по площади от функций типа погранслоя в контурный интеграл с дальнейшей подстановкой в него выражения (2.2) для погранслойного потенциала позволил исключить из низкочастотного функционала Гамильтона быстро меняющиеся по пространственным координатам функции. Следует отметить, что приведенный здесь низкочастотный функционал Гамильтона по своей структуре аналогичен функционалу потенциальной энергии в задаче о статическом изгибе пластины, и поэтому здесь не будут более подробно обсуждаться идеи, лежащие в основе создания низкочастотного функционала Гамильтона. Функционал Гамильтона, отвечающий задаче о высокочастотных колебаниях, соответствует постановке задачи без учета быстро меняющейся по пространственным координатам функции φ. Высокочастотный функционал Гамильтона имеет обычную для функционалов Гамильтона структуру. Следует отметить, что приведенные ниже функционалы не являются строгим асимптотическим следствием функционала Гамильтона, имеющего место в теории пластин типа Рейсснера, в том смысле, что в них сохранены некоторые члены порядка $O(h^2)$ в сравнении с единицей, в то время как другие слагаемые такого же асимптотического порядка отброшены.

Низкочастотный функционал Гамильтона задан на множестве функций $\Phi(x, y), f(\tau)$, удовлетворяющих следующим условиям:

функции $\Phi(x, y)$ определены, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{S} = S + C$;

функции $f(\tau)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на кривой C;

функции $\Phi(x, y), f(\tau)$ удовлетворяют кинематическим граничным условиям (2.4), если таковые имеются

$$\int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\int_{(\Delta S)} \Bigg[\frac{1}{2}\rho h\dot{\Phi}^2 - D\left(\frac{1}{2}(\Delta\Phi)^2 + (1-\mu)\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\right]\right)\Bigg] dS - \int_C \Bigg[D(1-\mu)\frac{\delta}{h}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}f'(\tau) + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}f(\tau)\right) + Gh\Gamma\left(\frac{\delta}{2h} - \frac{1}{R}\right)f^2(\tau)\Bigg] dC\Bigg] dt \tag{5.1}$$

Уравнениями Эйлера для низкочастотного функционала Гамильтона (5.1) являются дифференциальное уравнение для проникающего потенциала (2.1) и силовые граничные условия (2.5).

Высокочастотный функционал Гамильтона задан на множестве функций $\Phi(x, y)$, $F(x, y)$, удовлетворяющих следующим условиям:

функции $\Phi(x, y)$, $F(x, y)$ определены, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\bar{S} = S + C$;

функции $\Phi(x, y)$, $F(x, y)$ удовлетворяют кинематическим граничным условиям (второму и третьему условиям из (3.7)), если таковые имеются

$$\int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{(\Delta S)} \Bigg[\frac{1}{2}\frac{\rho h^3}{12}\left[\left(\frac{\partial\dot{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\dot{\Phi}}{\partial y} - \frac{\partial\dot{F}}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{1}{2}Gh\Gamma\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{1}{2}D\left[\left(1 + \frac{\Gamma(1-\mu)}{2}\right)(\Delta\Phi)^2 + \frac{1-\mu}{2}(\Delta F)^2\right] - D(1-\mu)\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\right]\Bigg] dS\, dt \tag{5.2}$$

Уравнениями Эйлера для высокочастотного функционала Гамильтона (5.2) являются дифференциальные уравнения (1.2) и (3.3) и граничные условия: третье условие из (3.8) и условие (3.9).

6. Обсуждение физического смысла полученных результатов. С физической точки зрения представляется достаточно очевидным тот факт, что высокочастотные колебания обусловлены сдвиговыми эффектами. О том же свидетельствуют и приведенные в работе асимптотические оценки. В самом деле, при низкочастотных колебаниях вектор углов поворота $\psi = -\nabla w + \gamma$ фактически определяется поперечным прогибом w, а вектор деформации поперечного сдвига γ вносит незначительные поправки: $\gamma \sim h\psi$ вблизи границы и $\gamma \sim h^2\psi$ внутри области. При высокочастотных колебаниях ситуация меняется на противоположную: вектор углов поворота ψ фактически совпадает с вектором деформации поперечного сдвига γ, а поперечный прогиб w вносит незначительные поправки: $\psi \sim \gamma$, $\nabla w \sim h\psi$. Поскольку природа возникновения высокочастотных сдвиговых и высокочастотных изгибных колебаний одинакова, что подтверждается в частности тем, что главные члены асимптотических разложений собственных частот в сдвиговом и изгибном спектрах совпадают, представляется естественным, что уравнения сдвиговых и изгибных колебаний должны быть похожи. Именно так обстоит дело в предлагаемой постановке задачи о высокочастотных колебаниях: уравнение (3.3), характеризующее изгибные колебания, практически совпадает с уравнением (1.2), характеризующим сдвиговые колебания.

Итак, если остановиться на предположении, что уравнение изгибных колебаний похоже на уравнение сдвиговых колебаний, получится, что порядок системы уравнений по пространственным координатам понижается. Это означает, что осталась не учтенной еще одна какая-то функция. Поскольку уже есть уравнения для сдвиговых и изгибных колебаний, уравнение для этой третьей функции, видимо, должно представлять собой уравнение статики. В предлагаемой постановке задачи это действительно так: уравнение (3.5) для функции φ не содержит производных по времени. Из физических соображений ясно, что эта третья функция характеризует изгибные эффекты и поэтому не должна играть важной роли в задаче о высокочастотных колебаниях. В пользу последнего утверждения говорит и тот факт, что, как видно из уравнения (3.5), обсуждаемая функция быстро изменяется по пространственным координатам и при этом проникает во всю область пластины. Если бы оказалось, что подобная функция имеет первостепенное значение в задаче о высокочастотных колебаниях, это поставило бы под сомнение применимость теории пластин для решения данной задачи. Итак, то обстоятельство, что задача о высокочастотных колебаниях допускает формулировку без учета быстро меняющихся функций, с физической точки зрения представляется вполне закономерным. Граничные условия в предлагаемой постановке задачи без учета быстро меняющихся функций также заслуживают того, чтобы сказать о них несколько слов. Прежде всего, следует отметить, что в данной задаче существует четыре возможных граничных условия, причем, что очень важно с физической точки зрения, два из них имеют смысл кинематических: $\psi_\nu|_c = 0$ (угол поворота вокруг касательной), $\psi_\tau|_c = 0$ (угол поворота вокруг нормали), а два другие имеют смысл силовых: $M_\nu^*|_c = 0$ (приведенный изгибающий момент), $M_\tau|_c = 0$ (крутящий момент). Это хорошо согласуется с тем, как обычно бывает в задачах теории упругости.

Заметим, что при переходе от исходной постановки задачи в теории типа Рейсснера к обсуждаемой приближенной постановке, смысл кинематических и силовых граничных условий несколько изменяется. В приближенной постановке задачи условия $\psi_\nu|_c = 0$ и $N_\nu|_c = 0$ эквивалентны, так как имеет место равенство $N = Gh\Gamma\psi$, и поэтому силовое граничное условие $N_\nu|_c = 0$ в обсуждаемой задаче приобретает смысл кинематического. Изначально кинематическое граничное условие $w|_c = 0$ в приближенной постановке задачи исчезает, а поперечный прогиб попадает в условие $M_\nu^*|_c = 0$, так как $M_\nu^* = M_\nu - Gh\Gamma w$, т. е. становится частью силового граничного условия. Заметим, что определенная симметрия задачи о высокочастотных колебаниях без учета быстро меняющихся функций не ограничивается сходством уравнений (1.2) и (3.3). Сходство наблюдается, также, и среди граничных условий. В самом деле, условие $\psi_\nu|_c = 0$ получается из условия $\psi_\tau|_c = 0$, а условие $M_\nu^*|_c = 0$ получается из условия $M_\tau|_c = 0$ путем замены Φ на F и F на $-\Phi$. Наличие подобной симметрии также говорит в пользу правильности предлагаемой постановки задачи, хотя последнее утверждение основано уже не столько на физических, сколько на эстетических представлениях.

7. Результаты решения тестовых задач. В связи с тем, что строго доказать приводимые в публикуемой работе формулы в общем случае не удалось, хотя в частных ситуациях такие доказательства возможны, естественно возникает вопрос о надежности полученных результатов. В подобной ситуации существует только один весомый аргумент в пользу полученных уравнений — это решение тестовых задач. Были построены точные решения задач о свободных колебаниях круглой пластины при всех возможных типах граничных условий. Показано, что решения данных задач в приближенных постановках асимптотически следуют из решений по точной теории (сравнивались как частоты, так и формы колебаний). Были, также, построены точные решения задач о свободных колебаниях прямоугольной пластины, две противоположные стороны которой шарнирно оперты, а на двух других заданы любые граничные условия (рассмотрены все возможные типы граничных условий). Показано, что частотные уравнения, полученные в приближенных постановках задач, асимптотически следуют из частотных уравнений, полученных по точной теории. Кроме того, для указанных выше прямоугольных пластин проводились вычисления первых 10 собственных частот в низкочастотном спектре и первых 10 собственных частот в высокочастотных спектрах (для всех типов граничных условий), а также соответствующих этим частотам форм колебаний для некоторых типов граничных условий. Рассматривались пластины относительной толщины $h = 0{,}04$ и $h = 0{,}1$. Сравнение результатов вычислений по приближенным и точной теориям показали, что при всех типах граничных условий достигается достаточно высокая точность.

Автор благодарит П. А. Жилина за обсуждения работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин//ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 6. С. 1319—1322.

2. Вибрации в технике. Т. I. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

3. *Жилин П. А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин// Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 48—64.

4. *Жилин П. А., Ильичева Т. П.* Спектры и формы колебаний прямоугольного параллелепипеда, полученные на основе трехмерной теории упругости и теории пластин//Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 94—103.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
26.VII.1993