

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. Е.А. ИВАНОВА

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Исследуются свободные колебания прямоугольных пластин с частотами, принадлежащими высокочастотным спектрам. Проводится сравнение результатов, полученных по точной теории Рейсснера и по приближенной теории высокочастотных свободных колебаний, содержащей только медленно меняющиеся по пространственным координатам функции.

Известно, что при решении некоторых задач динамики пластин, в частности при решении задач о вынужденных колебаниях под действием ударных нагрузок, игнорировать высокочастотные колебания, обусловленные учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига, нельзя. Вместе с тем, высокочастотные колебания в настоящее время изучены сравнительно мало, и их дальнейшее исследование представляет интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения.

В [1] проведен асимптотический анализ уравнений свободных колебаний пластин с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига, в результате которого установлено, что при колебаниях с частотами, принадлежащими высокочастотным спектрам, решение включает в себя быстро меняющиеся по пространственным координатам функции, проникающие во всю область пластины. Наличие подобного рода функций делает точные уравнения теории пластин Рейсснера практически не пригодными для численного решения задач. В [1] предложена приближенная формулировка задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины, содержащая только медленно меняющиеся по пространственным координатам функции. Асимптотическая точность этой постановки задачи –  $O(h)$  в сравнении с единицей при определении собственных форм и  $O(h^4)$  в сравнении с единицей при определении собственных частот. (Такое различие в точности вычисления собственных форм и собственных частот вызвано тем, что асимптотически главные члены всех собственных частот совпадают и равны известной величине, а приближенная теория определяет первый поправочный член в асимптотическом разложении собственных частот.)

Асимптотическая точность теории, безусловно, является ее важной характеристикой. Однако для оценки теории с точки зрения ее практической значимости важна не только, и даже не столько, асимптотическая, сколько реальная точность этой теории. (Под реальной точностью здесь понимается относительное отличие значения величины, вычисленной по приближенной теории, от значения той же величины, вычисленной по точной теории, при данном конкретном значении малого параметра.) Настоящая работа посвящена исследованию реальной точности предложенной в [1] приближенной теории высокочастотных свободных колебаний, и в этом смысле она является непосредственным продолжением [1].

Цель данной работы заключается в том, чтобы определить область применимости предложенной в [1] теории; обратить внимание на те проблемы, которые могут возникнуть при проведении расчетов высокочастотных колебаний как по приближенной, так и по точной теории Рейсснера.

Исследование проводится на примере задач, имеющих точное аналитическое решение (прямоугольные пластины, две противоположные стороны которых шарнирно оперты), что позволяет практически полностью исключить ошибки вычислений. Рассматриваются пластины различной толщины при всех возможных в теории Рейсснера типах граничных условий.

**1. Сводка основных уравнений, описывающих свободные колебания пластины в теории типа Рейсснера.** Уравнения движения имеют вид [2]:

$$D\Delta\Delta\Phi + \rho h\ddot{\Phi} - \frac{\rho h^3}{12} \left(1 + \frac{2}{\Gamma(1-\mu)}\right) \Delta\ddot{\Phi} + \frac{\rho^2 h^3}{12G\Gamma} (\ddot{\ddot{\Phi}}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta F - \frac{12\Gamma}{h^2} F - \frac{\rho}{G} \ddot{F} = 0 \quad (1.2)$$

Поперечный прогиб  $w$ , вектор углов поворота  $\Psi$ , вектор поперечных сил  $\mathbf{N}$  и тензор моментов  $\mathbf{M}$  вычисляются по формулам

$$w = -\Phi + \frac{h^2}{6\Gamma(1-\mu)} \Delta\Phi - \frac{\rho h^2}{12G\Gamma} \ddot{\Phi}, \quad \Psi = \nabla\Phi + \nabla F \times \mathbf{n}$$

$$\mathbf{N} = D\nabla\Delta\Phi - \frac{\rho h^3}{12} \nabla\ddot{\Phi} + Gh\Gamma \nabla F \times \mathbf{n} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{M} = D \left[ (1-\mu) \nabla\nabla\Phi + \mu\Delta\Phi \mathbf{a} + \frac{1-\mu}{2} (\nabla\nabla F \times \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \nabla\nabla F) \right]$$

Здесь  $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$  – жесткость на изгиб,  $Gh\Gamma$  – жесткость на сдвиг,  $G = E/[2(1+\mu)]$ ,  $\Gamma$  – коэффициент поперечного сдвига,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – объемная плотность массы,  $h$  – толщина пластины,  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к плоскости пластины,  $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{nn}$ ,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор.

Теория Рейсснера позволяет удовлетворить трем условиям на контуре и, следовательно, здесь возможны восемь различных типов граничных условий. Перечислим эти условия.

1. Жесткая заделка

$$w|_c = 0, \quad \Psi_v|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \quad (1.4)$$

2. Скользящая заделка

$$N_v|_c = 0, \quad \Psi_v|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \quad (1.5)$$

3. Усиленный свободный край

$$N_v|_c = 0, \quad M_v|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \quad (1.6)$$

4. Свободный край

$$N_v|_c = 0, \quad M_v|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \quad (1.7)$$

5. Ослабленная жесткая заделка

$$w|_c = 0, \quad \Psi_v|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \quad (1.8)$$

6. Ослабленная скользящая заделка

$$N_v|_c = 0, \quad \Psi_v|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \quad (1.9)$$

7. Стесненное шарнирное опирание

$$w|_c = 0, \quad M_v|_c = 0, \quad \Psi_\tau|_c = 0 \quad (1.10)$$

8. Свободное шарнирное опирание

$$w|_c = 0, \quad M_v|_c = 0, \quad M_\tau|_c = 0 \quad (1.11)$$

Здесь  $\Psi_v$  и  $\Psi_\tau$  – углы поворота вокруг касательной и нормали к контуру пластины,  $N_v$  – перерезывающая сила,  $M_v$  – изгибающий момент,  $M_\tau$  – крутящий момент.

В теории пластин Рейсснера существует три спектра собственных частот, для которых справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\omega_i^{(1)} = h\omega_{1i}^{(1)} + h^2\omega_{2i}^{(1)} + \dots \quad (1.12)$$

$$\omega_i^{(2)} = \sqrt{12G\Gamma/(\rho h^2)} + \omega_{0i}^{(2)} + \dots, \quad \omega_i^{(3)} = \sqrt{12G\Gamma/(\rho h^2)} + \omega_{0i}^{(3)} + \dots$$

Первый спектр из (1.12) – это низкочастотный изгибный спектр (он существует и в теории Кирхгофа), второй и третий спектры из (1.12) – это высокочастотные сдвиговой и изгибный спектры, наличие которых обусловлено учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига (эти спектры в теории Кирхгофа отсутствуют).

Ниже будут обсуждаться только колебания с частотами, принадлежащими второму и третьему спектрам из (1.12), и под "высокими" будут подразумеваться частоты, высокие в асимптотическом смысле, т.е. принадлежащие высокочастотным спектрам. Обсуждение специфики колебаний при частотах с большими порядковыми номерами из низкочастотного спектра выходит за рамки данной работы.

**2. Формулировка задачи о высокочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера без учета быстро меняющихся функций.** Ниже приведены основные уравнения приближенной теории высокочастотных свободных колебаний, предложенной в [1]. Уравнения движения имеют вид

$$\Delta F - \frac{12\Gamma}{h^2} F - \frac{\rho}{G} \ddot{F} = 0 \quad (2.1)$$

$$\left( \Gamma + \frac{2}{1-\mu} \right) \Delta \Phi - \frac{12\Gamma}{h^2} \Phi - \frac{\rho}{G} \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.2)$$

Поскольку данная теория имеет четвертый порядок по пространственным координатам, она позволяет удовлетворить только двум условиям на контуре, и, следовательно, в ней существует четыре различных типа граничных условий. Ниже приведены формулировки этих граничных условий с указанием того, каким граничным условиям точной теории Рейсснера они соответствуют.

1. Жесткая заделка (1.4), скользящая заделка (1.5), усиленный свободный край (1.6):

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \right|_c = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial v} \right|_c = 0 \quad (2.3)$$

2. Свободный край (1.7), ослабленная жесткая заделка (1.8), ослабленная скользящая заделка (1.9):

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \right|_c = 0 \quad (2.4)$$

$$D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \tau} + \left( \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \right) \right] - \left( \frac{\rho h^3}{12} \ddot{F} + Gh\Gamma F \right) \Big|_c = 0$$

3. Стесненное шарнирное опирание (1.10):

$$D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial \tau} - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right) \right] + \left( \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Phi} + Gh\Gamma \Phi \right) \Big|_c = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial v} \right|_c = 0 \quad (2.5)$$

4. Свободное шарнирное опирание (1.11):

$$D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial \tau} - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right) \right] + \left( \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Phi} + Gh\Gamma \dot{\Phi} \right) \Big|_c = 0$$

$$D(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \tau} + \left( \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \right) \right] - \left( \frac{\rho h^3}{12} \ddot{F} + Gh\Gamma \dot{F} \right) \Big|_c = 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $v, \tau$  – локальная система координат, введенная на контуре пластины,  $R(\tau)$  – радиус кривизны контура в данной точке.

Вектор углов поворота  $\Psi$  и вектор поперечных сил  $\mathbf{N}$  выражаются через потенциалы  $F$  и  $\Phi$  по формулам

$$\Psi = \nabla \Phi + \nabla F \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{N} = Gh\Gamma(\nabla \Phi + \nabla F \times \mathbf{n}) \quad (2.7)$$

Поперечный прогиб и тензор моментов асимптотически малы в сравнении с вектором углов поворота и вектором поперечных сил ( $w \sim h^2 \Psi$ ,  $\mathbf{M} \sim h^2 \mathbf{N}$ ) и в рамках данной приближенной теории не определяются.

**3. Свободные колебания прямоугольной пластины, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам.** Рассмотрим пластину, занимающую область  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . На сторонах  $y = \pm b$  выполнены условия стесненного шарнирного опирания (1.10), а на сторонах  $x = \pm a$  – произвольные граничные условия. Рассматриваются колебания, симметричные относительно осей  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Собственные формы, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.10) на сторонах  $y = \pm b$ , имеют вид

$$\Phi_n(x, y) = [C_{1n} \cos(\lambda_{1n}x) + G_{2n} \cos(\lambda_{2n}x)] \cos(\mu_n y)$$

$$F_n(x, y) = C_{3n} \sin(\delta_n x) \sin(\mu_n y)$$

$$\mu_n = (2n-1)\pi/(2b), \quad \lambda_{1n} = \sqrt{A_n - B_n}, \quad \lambda_{2n} = \sqrt{A_n + B_n} \quad (3.1)$$

$$\delta_n = \sqrt{\rho \omega_n^2 / G - 12\Gamma / h^2 - \mu_n^2}, \quad A_n = [1 + \Gamma(1-\mu)/2] \rho \omega_n^2 / (2G\Gamma) - \mu_n^2$$

$$B_n = \sqrt{\rho h / D + ([1 - \Gamma(1-\mu)/2] \rho \omega_n^2 / (2G\Gamma))^2}$$

Удовлетворение граничным условиям на сторонах  $x = \pm a$  сводит задачу к решению системы линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$ ,  $C_{3n}$ . Из условия равенства нулю определителя этой системы получается уравнение для определения собственных частот. Были рассмотрены все возможные в теории Рейсснера типы граничных условий и для каждого из них получены частотные уравнения.

Рассмотрим решение обсуждаемой задачи по приближенной теории высокочастотных свободных колебаний [1]. Легко показать, что собственные формы, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (2.1), (2.2) и условиям стесненного шарнирного опирания (2.5) на сторонах  $y = \pm b$ , имеют вид

$$\Phi_n(x, y) = C_{1n} \cos(\lambda_{1n}x) \cos(\mu_n y), \quad F_n(x, y) = C_{3n} \sin(\delta_n x) \sin(\mu_n y) \quad (3.2)$$

$$\lambda_{1n} = \sqrt{\frac{\rho}{G} \frac{\omega_{0n}}{\Gamma + 2/(1-\mu)} - \mu_n^2}, \quad \delta_n = \sqrt{\frac{\rho}{G} \omega_{0n} - \mu_n^2}, \quad \omega_{0n} = \omega_n^2 - \frac{12G\Gamma}{\rho h^2}$$

В результате проведенного асимптотического анализа установлено, что частотные

уравнения и собственные формы, найденные по данной приближенной теории, при всех типах граничных условий следуют из точных частотных уравнений и собственных форм с асимптотической ошибкой порядка  $O(h)$  в сравнении с единицей (точными считаются частотные уравнения и формы колебаний, найденные по теории Рейсснера).

**4. Свободные колебания прямоугольной пластины. Сравнительный анализ численных результатов, полученных по точной теории Рейсснера и по приближенной теории высокочастотных свободных колебаний.** Численное исследование проведено на примере задачи, рассмотренной в п. 3. Вычисления проводились для пластины размером  $a = b = 1$  м,  $h = 0,1$  м и  $h = 0,04$  м при следующих значениях упругих и инерционных констант:  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu = 0,25$ ,  $\Gamma = 5/6$ ,  $\rho = 7,951 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Кратко сформулируем основные результаты.

1. Вычислены первые 10 собственных частот из высокочастотных спектров. Вычисления проводились по теории Рейсснера и по приближенной теории при всех возможных в теории Рейсснера типах граничных условий (толщина пластины 0,1 м и 0,04 м).

2. Вычислены реальные погрешности, возникающие при использовании приближенной теории. Вычисления проводились также для всех типов граничных условий при толщинах пластин 0,1 м и 0,04 м.

3. В случае задания на сторонах  $x = \pm a$  условий свободного края проведено более подробное исследование. Для пластин толщиной 0,2 м; 0,3 м; 0,4 м и 0,5 м вычислены первые 10 собственных частот, а также реальные погрешности, допускаемые при их вычислении приближенной теорией. Для пластин толщиной 0,1 м проведено вычисление первых 33-х собственных частот и соответствующих реальных погрешностей, возникающих при использовании приближенной теории.

4. Вычислены собственные формы, соответствующие первым 10-ти собственным частотам. Вычисления проводились по точной и приближенной теориям для всех типов граничных условий при толщине пластины 0,1 м. В случае условий свободного края собственные формы вычислены и при толщине пластины 0,04 м.

5. Для тех собственных форм, при вычислении которых приближенная теория допускает наибольшие погрешности, построены графики зависимости углов поворота  $\Psi_x$  и  $\Psi_y$  от координаты  $x$ .

Перейдем к подробному анализу полученных результатов.

В табл. 1–4 приведены значения первых пяти собственных частот из высокочастотных спектров для пластин толщиной 0,1 м при всех возможных в теории Рейсснера типах граничных условий, вычисленных по теории Рейсснера и по приближенной теории, а также относительные погрешности  $\delta$ , допускаемые приближенной теорией, и относительные погрешности  $\Delta$ , возникающие при аппроксимации собственной частоты ее асимптотически главным членом:

$$\delta = \frac{|\omega_R - \omega|}{\omega_R} \cdot 100\%, \quad \Delta = \frac{\omega_R - \sqrt{12G\Gamma / (\rho h^2)}}{\omega_R} \cdot 100\%$$

Здесь  $\omega_R$  – частота, вычисленная по теории Рейсснера,  $\omega$  – частота, вычисленная по приближенной теории. Значение погрешности  $\Delta$  представляет интерес по следующей причине. Характерной особенностью высокочастотных спектров является то, что асимптотически главные члены всех собственных частот, принадлежащих этим спектрам, совпадают, причем относительное отличие частот от главного члена их асимптотических разложений достаточно мало (о чем свидетельствуют значения  $\Delta$ , приведенные в табл. 1–4). В связи с этим, тот факт, что погрешности  $\delta$ , допускаемые приближенной теорией, малы, сам по себе еще ни о чем не говорит. Погрешности  $\delta$  должны быть не просто малы, они должны быть много меньше погрешностей  $\Delta$ : только в этом случае можно утверждать, что предложенная в [1] приближенная теория обладает достаточно высокой реальной точностью.

Таблица 1

$N$	$\omega_R$	$\Delta$	$\omega$	$\delta$	$S$
жесткая заделка					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103293,758	0,493	103291,188	0,002488	$b$
3	103919,750	1,092	103919,750	0	$s$
4	103980,492	1,150	103980,523	0,000030	$s$
5	104602,156	1,737	104598,508	0,003488	$s$
скользящая заделка					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103290,617	0,490	103291,188	0,000553	$b$
3	103919,750	1,092	103919,750	0	$s$
4	103979,859	1,149	103980,523	0,000639	$s$
5	104598,352	1,734	104598,508	0,000149	$s$
усиленный свободный край					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103323,344	0,521	103291,188	0,031122	$b$
3	103919,750	1,092	103919,750	0	$s$
4	103987,688	1,157	103980,523	0,006890	$s$
5	104646,703	1,779	104598,508	0,046055	$s$

Таблица 2

$N$	$\omega_R$	$\Delta$	$\omega$	$\delta$	$S$
свободный край					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103230,133	0,431	103227,633	0,002420	$b$
3	103465,258	0,658	103416,852	0,046780	$s$
4	103919,750	1,104	103919,750	0	$s$
5	104544,000	1,712	104420,227	0,118390	$s$
ослабленная жесткая заделка					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103226,945	0,430	103227,633	0,000660	$b$
3	103416,859	0,615	103416,852	0,000007	$s$
4	103919,750	1,104	103919,750	0	$s$
5	104420,227	1,591	104420,227	0	$s$
ослабленная скользящая заделка					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103226,945	0,430	103227,633	0,000660	$b$
3	103416,852	0,615	103416,852	0	$s$
4	103919,750	1,104	103919,750	0	$s$
5	104420,227	1,591	104420,227	0	$s$

Таблица 3

$N$	$\omega_R$	$\Delta$	$\omega$	$\delta$	$S$
стесненное шарнирное опирание					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103416,852	0,611	103416,852	0	$s$
3	103665,891	0,850	103668,602	0	$b$
4	103919,750	1,092	103919,750	0	$s$
5	104420,277	1,566	104420,277	0	$s$

$n$	$\omega_n$	$\Delta$	$\omega$	$\delta$	$S$
свободное шарнирное опирание					
1	102911,492	0,123	102911,492	0	$s$
2	103038,063	0,246	103038,063	0	$s$
3	103294,836	0,494	103291,359	0,003366	$b$
4	103790,852	0,970	103792,211	0,001309	$b$
5	103816,555	0,994	103804,844	0,011280	$s$

Результаты, приведенные в таблицах 1–4, позволяют сделать вывод, что при всех типах граничных условий реальная точность вычисления собственных частот по приближенной теории при  $h = 0,1$  м достаточно высока. (Поэтому нет смысла приводить соответствующие результаты для более тонких пластин.) Точность вычисления собственных частот различается в зависимости от типа граничных условий на сторонах  $x = \pm a$  и наибольшие погрешности допускаются в случае условий свободного края. Поэтому для более глубокого исследования был выбран именно этот тип граничных условий. В табл. 5 и 6 приведены результаты вычисления более высоких собственных частот (с 6-й по 25-ю) для пластины толщиной 0,1 м и результаты вычисления первых пяти собственных частот для более толстых пластин (толщиной 0,2 м, 0,3 м, 0,4 м и 0,5 м).

Отметим некоторые общие закономерности, характерные для высокочастотных спектров  $S$  и их аппроксимации приближенной теорией.

1. Частоты изгибного  $b$  спектра являются более высокими, чем частоты сдвигового спектра. (Вычисления показали, что при всех типах граничных условий на сторонах  $x = \pm a$  только две частоты из первых 10-ти принадлежат изгибному спектру.)

2. Частоты, принадлежащие изгибному спектру, как правило, вычисляются менее точно, чем частоты, принадлежащие сдвиговому спектру. Это представляется вполне естественным, поскольку в приближенной теории уравнение, отвечающее за сдвиговые колебания, является точным, а уравнение, отвечающее за изгибные колебания – приближенным.

3. В отличие от низкочастотных колебаний, где при использовании приближенных теорий получаются завышенные значения собственных частот, при высокочастотных колебаниях подобного явления не наблюдается.

4. При высокочастотных колебаниях не наблюдается также и стабильного возрастания относительной погрешности с ростом номера частоты. Разумеется, более низкие частоты в среднем вычисляются точнее, чем более высокие. Однако для высокочастотных колебаний обычной является и такая ситуация, когда какая-то частота с большим порядковым номером вычисляется более точно, чем многие частоты с меньшими порядковыми номерами, и наоборот, какая-то частота с меньшим порядковым номером вычисляется менее точно, чем многие частоты с большими порядковыми номерами.

5. При вычислении собственных частот с большими порядковыми номерами имеет место следующая закономерность: большинство частот определяется приближенной теорией с достаточно высокой точностью, однако встречаются и такие частоты (их немного), погрешности вычисления которых весьма значительны. Например, в случае условий свободного края на сторонах  $x = \pm a$  при толщине пластины 0,1 м (табл. 5), из первых 25-ти частот плохо вычисляются только три: 14-я, 22-я и 25-я. На вопрос о том, почему некоторые частоты вычисляются плохо, сейчас с полной уверенностью ответить невозможно. Может быть, приближенная теория не пригодна для вычисления таких высоких частот (и в этом случае не понятно, почему все остальные частоты вычисляются с достаточно высокой точностью). Более вероятно (и автор склоняется

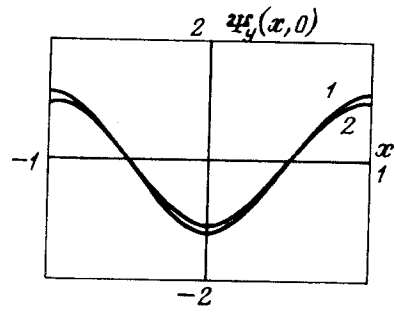
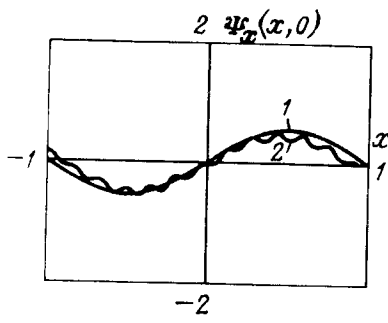
Таблица 5

$N$	$\omega_R$	$\Delta$	$\omega$	$\delta$	$S$
6	104923,086	2,080	104918,320	0,004540	<i>s</i>
7	105106,242	2,209	104980,414	0,119710	<i>b</i>
8	105907,477	3,038	105907,477	0	<i>s</i>
9	106005,859	3,134	105907,469	0,092810	<i>s</i>
10	106500,523	3,615	106398,602	0,095690	<i>s</i>
11	106658,109	3,768	106704,406	0,043	<i>b</i>
12	107363,789	4,455	107374,117	0,010	<i>s</i>
13	107963,133	5,038	107858,570	0,097	<i>s</i>
14	108184,828	5,254	113338,445	4,764	<i>b</i>
15	108320,070	5,385	108400,984	0,075	<i>b</i>
16	108821,000	5,873	108821,000	0	<i>s</i>
17	109040,453	6,086	110071,414	0,945	<i>b</i>
18	109368,594	6,405	109299,039	0,064	<i>s</i>
19	110018,156	7,037	110248,891	0,210	<i>s</i>
20	110697,523	7,698	110720,766	0,021	<i>s</i>
21	110762,344	7,761	110720,766	0,038	<i>s</i>
22	110879,008	7,875	108340,852	2,289	<i>s</i>
23	112076,461	9,040	111658,523	0,373	<i>s</i>
24	112351,570	9,308	113510,813	1,032	<i>s</i>
25	112368,102	9,324	118069,609	5,074	<i>b</i>

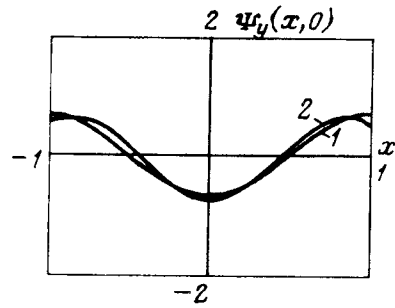
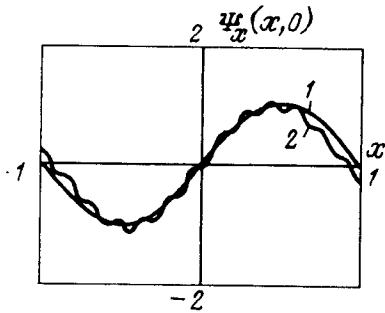
Таблица 6

$N$	$\omega_R$	$\Delta$	$\omega$	$\delta$	$S$
$h = 0,2$					
1	51645,371	0,49	51645,371	0	<i>s</i>
2	52225,285	1,62	52272,488	0,09	<i>b</i>
3	52390,117	1,94	52645,168	0,49	<i>s</i>
4	53448,188	4,00	55536,676	3,91	<i>s</i>
5	53626,332	4,35	53626,332	0	<i>s</i>
$h = 0,3$					
1	34639,914	1,10	34639,914	0	<i>s</i>
2	35504,234	3,63	35568,137	0,38	<i>b</i>
3	35764,320	4,39	36113,617	0,98	<i>s</i>
4	37329,172	8,95	40211,961	7,72	<i>s</i>
5	37529,492	9,54	37529,492	0	<i>s</i>
$h = 0,4$					
1	26198,504	1,95	26198,504	0	<i>s</i>
2	27304,615	6,26	27414,049	0,40	<i>b</i>
3	27623,482	7,50	28118,164	1,79	<i>s</i>
4	29526,547	14,91	33218,063	12,50	<i>s</i>
5	29914,891	16,42	29914,891	0	<i>b</i>
$h = 0,5$					
1	21181,492	3,04	21181,492	0	<i>s</i>
2	22643,225	10,15	22667,689	0,11	<i>b</i>
3	23961,994	16,56	23514,361	1,87	<i>s</i>
4	25635,811	24,71	25635,811	0	<i>s</i>
5	27135,977	31,86	29644,014	9,24	<i>b</i>

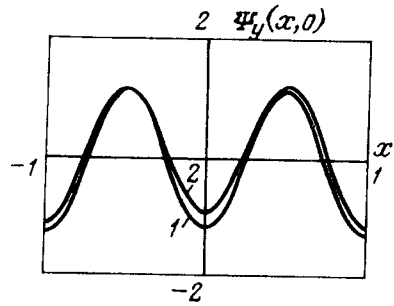
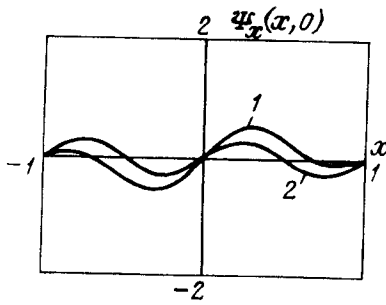




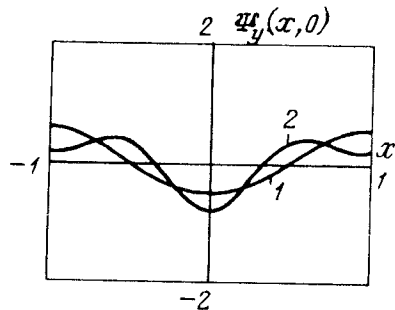
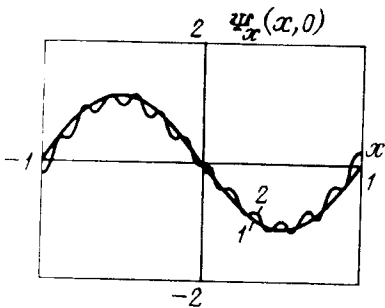
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

именно к этой точке зрения), что 14-я, 22-я и 25-я частоты не принадлежат высокочастотным спектрам, а являются очень высокими частотами из низкочастотного спектра, и тогда частоты с соответствующими номерами, вычисленные по приближенной теории, на самом деле соответствуют другим, более высоким частотам из высокочастотных спектров.

6. При вычислении собственных частот для более толстых пластин (табл. 6) наблюдается такая же закономерность, которая имела место при вычислении частот с большими порядковыми номерами. В то время как большинство частот вычисляется хорошо, встречаются и такие частоты, погрешности вычисления которых недопустимо велики. Причина этого явления также заключается либо в том, что при таких больших толщинах пластин приближенная теория не работает, либо в том, что в рассматриваемый частотный диапазон попадают частоты из низкочастотного спектра. Второе представляется автору более вероятным.

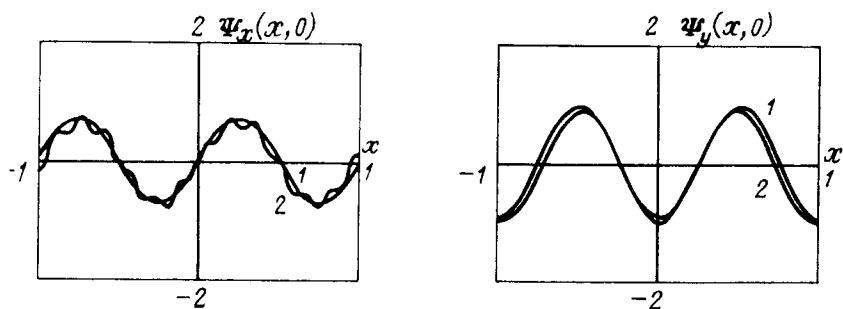
Кратко остановимся на результатах вычисления собственных форм. Исследование точности вычисления собственных форм по приближенной теории проводилось следующим образом. Для всех типов граничных условий были получены аналитические выражения для потенциалов  $F(x, y)$  и  $\Phi(x, y)$  по точной и приближенной теориям. Затем было проведено сравнение собственных форм, представленных функциями  $F(x, y)$  и  $\Phi(x, y)$ , в результате которого обнаружилось, что большинство собственных форм, вычисленных по приближенной теории, практически точно совпадают с соответствующими собственными формами, вычисленными по точной теории Рейсснера. Практически, погрешности вычисления собственных форм оказались заметными только в случае задания на сторонах  $x = \pm a$  условий свободного края. Поэтому дальнейшее обсуждение относится именно к этому типу граничных условий ( $h = 0,1$  м). На фиг. 1–6 представлены первые 10 собственных форм колебаний свободной на сторонах  $x = \pm a$  пластины (за исключением нулевых собственных форм, а также тех собственных форм, аналитические выражения которых в точной и приближенной теориях полностью совпадают). Фиг. 1: 3-я форма, фиг. 2: 5-я форма, фиг. 3: 6-я форма, фиг. 4: 7-я форма, фиг. 5: 9-я форма, фиг. 6: 10-я форма. На графиках изображены зависимости углов поворота  $\Psi_x$  и  $\Psi_y$  от координаты  $x$  (зависимость от координаты  $y$  не представляет интереса, так как здесь совпадение точное). Совпадение собственных форм, вычисленных по приближенной (кривые 1) и точной (кривые 2) теориям, наблюдается достаточно хорошее, что позволяет сделать вывод о том, что предложенная в [1] приближенная теория обладает высокой точностью и при вычислении собственных форм. Последнее утверждение верно для подавляющего большинства собственных форм. Вместе с тем, в исключительных ситуациях различие между собственными формами, вычисленными по точной и приближенной теориям, может оказаться сколь угодно большим. Подчеркнем, что такие ситуации встречаются крайне редко: среди всех собственных форм, найденных в ходе проведенного исследования (было вычислено по 10 собственных форм для каждого из восьми типов граничных условий), несовпадение точной и приближенной теории имело место только в одном случае – при вычислении 7-й собственной формы, когда на сторонах  $x = \pm a$  выполнены условия ослабленной жесткой заделки (1.8) (графики зависимости углов поворота  $\Psi_x$  и  $\Psi_y$  от координаты  $x$  изображены на фиг. 7). Несмотря на то, что абсолютное несовпадение точной и приближенной собственных форм происходит крайне редко, это явление, по всей видимости, не является случайным и поэтому заслуживает подробного обсуждения.

Приведем результаты вычисления 6-й и 7-й собственных форм (на сторонах  $x = \pm a$  – условия (1.8),  $h = 0,1$  м) по теории Рейсснера (они обозначены индексом  $R$ ) и по приближенной теории (без индекса).

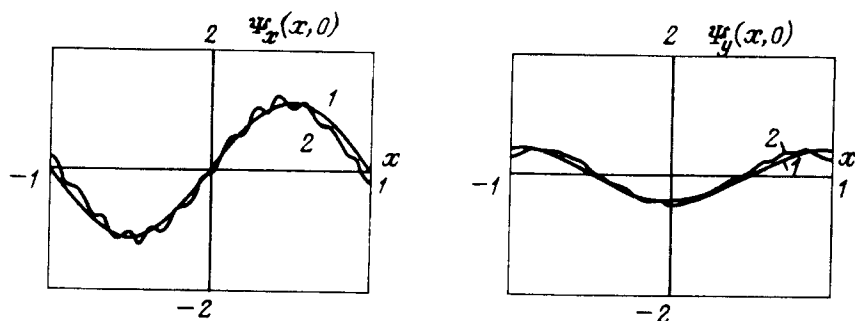
Шестая (сдвиговая) форма:

$$\omega^R = 104918,313, \quad \Phi^R(x, y) = 0, \quad F^R(x, y) = 0,190 \sin(6,28x) \sin(1,57y)$$

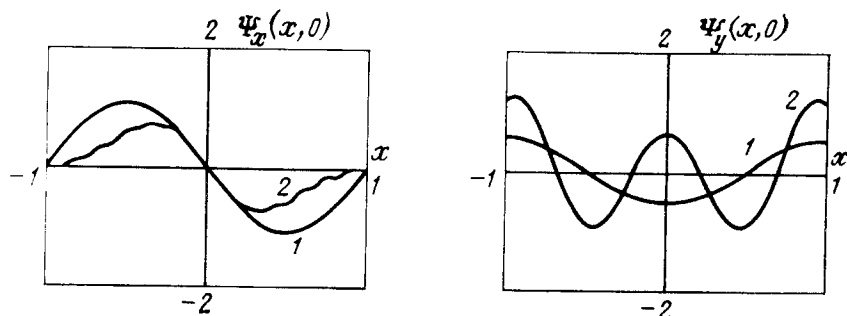
$$\omega = 104918,320, \quad \Phi(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,190 \sin(6,28x) \sin(1,57y)$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Седьмая (изгибная) форма:

$$\omega^7 = 105093,930, \quad F^R(x, y) = -0,147 \sin(6,56x) \sin(1,57y)$$

$$\Phi^{\tilde{}}(x, y) = [0,186 \cos(3,26x) + 0,0005 \cos(40,39x)] \cos(1,57y)$$

$$\omega = 104980,414, \quad F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = 0,350 \cos(3,14x) \cos(1,57y)$$

Обсуждая причины плохого вычисления 7-й формы колебаний, следует обратить внимание на два обстоятельства.

Погрешность вычисления 7-й собственной частоты по приближенной теории  $\delta = 0,108\%$  не слишком велика в том смысле, что есть частоты, при вычислении которых приближенная теория допускает такие же погрешности, и тем не менее формы

приближенной теории вычисляются достаточно хорошо. Поэтому можно с уверенностью утверждать, что причина столь значительного отличия точной и приближенной собственных форм никак не связана с точностью вычисления собственной частоты.

Значения 6-й и 7-й собственных частот очень близки и, что еще более важно, значения соответствующих этим частотам величин  $\lambda_1^R$  и  $\delta^R$  также достаточно близки. Последнее означает, что функции  $\Phi_n^R = C_{1n} \cos(\lambda_{1n}^R x) \cos(\mu_n y)$ ,  $F_n^R = C_{3n} \sin(\delta^R x) \sin(\mu_n y)$  для 7-й формы колебаний отличаются от соответствующих функций для 6-й формы колебаний по сути дела только значениями коэффициентов  $C_1$  и  $C_3$ : в случае 6-й (сдвиговой) формы  $C_1$  должен быть малым, а в случае 7-й (изгибной) формы, наоборот, малым должен быть  $C_3$ . На основании изложенных выше фактов можно с большой долей уверенности утверждать, что причиной некачественного вычисления 7-й формы колебаний является совокупность таких обстоятельств, как близость 6-й и 7-й собственных частот и "похожесть" соответствующих им собственных форм. При этом, однако, остается не ясным, что же на самом деле происходит: дает сбой приближенная теория, или при расчете по точной теории Рейсснера вычислительные ошибки приводят к неправильному определению собственной формы.

**5. Заключение.** Предложенная в [1] приближенная теория высокочастотных свободных колебаний удобна с точки зрения численной реализации, т.к. она не содержит быстро меняющихся по пространственным координатам функций. Эта теория позволяет с высокой точностью вычислять собственные частоты и соответствующие им формы колебаний, в том числе и для очень толстых пластин: при этом с ростом номера частоты в спектре точность данной теории уменьшается незначительно.

Вместе с тем, предложенная в [1] теория не решает всех проблем, связанных с задачей о высокочастотных свободных колебаниях.

Во-первых, эта теория не позволяет находить собственные частоты из низкочастотного спектра, численные значения которых близки к частотам из высокочастотных спектров.

Во-вторых, остается открытым вопрос о возможной потере точности при вычислении собственных форм в случае, когда сдвиговая и изгибная частоты оказываются очень близкими.

Автор благодарит П.А. Жилина и Ю.Г. Исполова за обсуждение работы и полезные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова Е.А. Приближенные функционалы Гамильтона в задачах о низкочастотных и высокочастотных свободных колебаниях пластины Рейсснера // Изв. АН. МТТ. 1995. № 4. С. 181–190.
2. Вибрации в технике. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
28.IX.1995