МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2000

УДК 531.3

© 2000 г. Е.А. ИВАНОВА

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДАРБУ

Задача Дарбу – это задача определения величин, характеризующих ориентацию твердого тела в пространстве, по заданному вектору угловой скорости и начальному положению твердого тела. Задача Дарбу давно привлекает внимание исследователей. В работе Дарбу [1], положившей начало этим исследованиям, данная задача сведена к решению уравнения типа Риккати относительно комплексной переменной. При всей внешней простоте и привлекательности уравнения, полученного в работе Дарбу, оно практически не используется при решении конкретных задач. На практике обычно отдается предпочтение методам, основанным на непосредственном интегрировании кинематических уравнений Пуассона. Решение задачи Дарбу при произвольном векторе угловой скорости не известно, однако существует целый ряд частных случаев, допускающих построение точного решения этой задачи. Исследование условий интегрируемости задачи Дарбу можно найти в [2–4].

Следует отметить, также, работу [5], в которой показана возможность аналитического решения задачи Дарбу при аппроксимации вектора угловой скорости тригонометрическим рядом.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход к решению задачи Дарбу, в основе которого лежит понятие тензора поворота и соответствующих ему векторов левой и правой угловой скорости. Развиваемый в настоящей работе подход позволил получить следующие результаты.

В рамках предлагаемого подхода оказалось возможным отождествить задачу Дарбу с задачей определения вектор-функции по известным модулям ее производных. (Это представляется интересным, поскольку к задаче определения вектор-функции по модулям ее производных сводится целый ряд задач механики.)

Предлагаемый подход позволил свести задачу Дарбу к решению линейного дифференциального уравнения третьего порядка относительно действительной неизвестной. (Классический подход, основанный на уравнении Риккати, приводит к линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно действительной неизвестной.)

Представленное ниже исследование является развитием идей работы [6].

1. Тензор поворота. Левый и правый векторы угловой скорости. Данный пункт содержит краткое изложение известных фактов, используемых в дальнейшем. Более подробную информацию о тензоре поворота и связанных с ним понятиях можно найти в [7, 8].

Определение. Тензором поворота называется собственно ортогональный тензор, т.е. тензор, который является решением уравнений

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^T=\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{P}=\mathbf{E},\qquad \det\mathbf{P}=+1 \tag{1.1}$$

Для произвольного тензора поворота $\mathbf{P}$ и любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливы следующие тождества:

$$(\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\quad (\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{P}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{1.2}$$

Теорема о представлении тензора поворота. Пусть даны три произвольных линейно независимых вектора $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ и пусть даны три вектора $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$, которые связаны с исходными векторами посредством тензора поворота $\mathbf{P}$: $\mathbf{D}_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_i$. Тогда тензор поворота $\mathbf{P}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_1\mathbf{d}^1 + \mathbf{D}_2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}_3\mathbf{d}^3 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{d}^1$, $\mathbf{d}^2$, $\mathbf{d}^3$ – векторы базиса, взаимного к базису $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$:

$$\mathbf{d}^1 = \frac{\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3}{\mathbf{d}_1 \cdot (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3)}, \quad \mathbf{d}^2 = \frac{\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1}{\mathbf{d}_2 \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1)}, \quad \mathbf{d}^3 = \frac{\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2}{\mathbf{d}_3 \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)} \tag{1.4}$$

Доказательство теоремы основано на определении взаимного базиса ($\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}^j = \delta_i^j, \delta_i^j$ – символ Кронекера) и представлении единичного тензора в виде $\mathbf{E} = \mathbf{D}_1\mathbf{D}^1 + \mathbf{D}_2\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}_3\mathbf{D}^3$.

Определение. Тензоры $\mathbf{S}(t)$ и $\mathbf{S}_r(t)$, определяемые формулами

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad \mathbf{S}_r(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) \tag{1.5}$$

называются соответственно левым и правым тензором спина.

Определение. Сопутствующий вектор левого тензора спина и сопутствующий вектор правого тензора спина

$$\mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{S}_r(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{E} \tag{1.6}$$

называются соответственно левым и правым векторами угловой скорости.

Левая и правая угловые скорости связаны между собой соотношениями

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t), \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \tag{1.7}$$

Когда речь идет о движении абсолютно твердого тела, для левого вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ обычно используется термин "истинная угловая скорость", а правый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ принято называть "угловой скоростью в теле".

Если тензор поворота известен, левая и правая угловые скорости вычисляются по формулам [8]

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\tfrac{1}{2}(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T)_\times, \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{P}})_\times \tag{1.8}$$

Обратная задача (задача определения тензора поворота по известному вектору угловой скорости) значительно сложнее. Эта задача известна как задача Дарбу и может быть сформулирована в двух видах, в зависимости от того, какой вектор угловой скорости известен – левый или правый.

Левая задача Дарбу формулируется так

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \tag{1.9}$$

Правая задача Дарбу имеет вид

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \tag{1.10}$$

Допустим, известен левый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Тогда, решив задачу Дарбу (1.9), можно определить тензор поворота $\mathbf{P}$, а затем, воспользовавшись 2-й формулой из (1.7), найти правый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$. Возможен и другой подход к определению тензора $\mathbf{P}$ и вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Идея альтернативного подхода заключается в том, чтобы по заданному левому вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, путем решения некоторого дифференциального уравнения, определить правый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, а затем, зная оба вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, восстановить по ним (без дополнительного интегрирования) тензор поворота $\mathbf{P}$. Сказанное можно дословно перенести на случай, когда известен правый вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ и по нему требуется определить тензор поворота $\mathbf{P}$ и левый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

С математической точки зрения левая и правая задачи Дарбу эквивалентны. Поэтому, без ограничения общности можно говорить о решении одной из сформулированных выше задач. В литературе, как правило, обсуждается правая задача Дарбу. Ниже будут приведены новые формулировки обеих задач и рассмотрены в качестве примеров две динамические задачи, одна из которых сводится к правой задаче Дарбу, а другая – к левой.

2. Представление тензора поворота через левую и правую угловые скорости. Идея представления тензора поворота через угловые скорости основана на следующих фактах и соображениях:

1. Согласно теореме о представлении тензора поворота (1.3), (1.4), для задания тензора поворота $\mathbf{P}$ достаточно знать три пары векторов $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{d}_i$, связанных между собой соотношениями $\mathbf{D}_i = \mathbf{P}\cdot\mathbf{d}_i$ (векторы d_i должны быть линейно независимы).

2. В качестве одной из пар векторов $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{d}_i$ могут быть использованы векторы левой и правой угловых скоростей, поскольку, согласно формулам (1.7), эти векторы связаны между собой соотношением $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{\Omega}$.

3. Если найдутся еще две пары векторов $\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\omega})$, $\varphi_i(\mathbf{\Omega})$, такие, что $\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{P}\cdot\varphi_i(\mathbf{\Omega})$ (векторы $\mathbf{\Omega}$, $\varphi_1(\mathbf{\Omega})$, $\varphi_2(\mathbf{\Omega})$ должны быть линейно независимы), то тензор поворота $\mathbf{P}$ можно будет представить через эти пары векторов в виде (1.3), (1.4).

Соотношений типа $\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{P}\cdot\varphi_i(\mathbf{\Omega})$ существует, вообще говоря, бесконечно много. Будем использовать наиболее простые:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}}, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})$$

Доказательство этих соотношений основано на формулах (1.7), (1.10) и тождествах (1.2):

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Omega})^{\cdot} = \dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{\Omega} + \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}} = (\mathbf{P}\times\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{\Omega} + \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Omega})\times(\mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}}) = \mathbf{P}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})$$

Исключив из рассмотрения тривиальный случай постоянного по направлению вектора $\mathbf{\Omega}$, легко показать, что векторы $\mathbf{\Omega}$, $\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}}$ линейно независимы.

Итак, нашлись три пары векторов, удовлетворяющих условию теоремы (1.3), (1.4):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{\Omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}}, \quad \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}}) \tag{2.1}$$

Следовательно, тензор поворота $\mathbf{P}$ может быть представлен в форме

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_1\mathbf{d}^1 + \mathbf{D}_2\mathbf{d}^2 + \mathbf{D}_3\mathbf{d}^3, \quad \mathbf{D}_1 = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{D}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad \mathbf{D}_3 = \boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{d}^1 = \frac{(\dot{\mathbf{\Omega}}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}})\mathbf{\Omega} - \frac{1}{2}(\Omega^2)^{\cdot}\dot{\mathbf{\Omega}}}{(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})^2}, \quad \mathbf{d}^2 = \frac{\Omega^2\dot{\mathbf{\Omega}} - \frac{1}{2}(\Omega^2)^{\cdot}\mathbf{\Omega}}{(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})^2}, \quad \mathbf{d}^3 = \frac{\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}}}{(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})^2}$$

Путем несложных преобразований выражение для тензора поворота (2.2) можно привести к виду, "симметричному" относительно угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{P} = A\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Omega} + B(\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Omega})^{\cdot} + C\dot{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{\Omega}} + D(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}})(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}}) \tag{2.3}$$

Скалярные коэффициенты A, B, C, D вычисляются по формулам

$$A = \dot{\mathbf{\Omega}}\cdot\dot{\mathbf{\Omega}}D = \dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}D, \quad B = -\tfrac{1}{2}(\Omega^2)^{\cdot}D = -\tfrac{1}{2}(\omega^2)^{\cdot}D \tag{2.4}$$

$$C = \Omega^2 D = \omega^2 D, \quad D = 1/(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})^2 = 1/(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}})^2$$

В традиционной постановке задача Дарбу – это задача определения тензора поворота по одному из векторов угловой скорости (левому или правому). Она решается путем интегрирования соответствующей системы дифференциальных уравнений. Выше было показано, что если известны оба вектора угловой скорости, тензор поворота определяется без дополнительного интегрирования, согласно формулам (2.3), (2.4). Исходя из этого факта, задача Дарбу может быть переформулирована следующим образом.

Левая задача Дарбу: определить правый вектор угловой скорости по известному левому.

Правая задача Дарбу: определить левый вектор угловой скорости по известному правому.

Эти формулировки положены в основу нового подхода к решению задачи Дарбу, развиваемого в настоящей работе.

3. Скалярные уравнения, связывающие левую и правую угловые скорости. Этот пункт играет вспомогательную роль. Здесь приведены скалярные соотношения, необходимые для дальнейших построений. Вывод данных соотношений основан на уравнениях (1.9), (1.10) и (2.1).

Алгебраическим следствием уравнений (2.1) являются скалярные соотношения

$$\omega^2 = \Omega^2, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}, \quad (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})^2 = (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}})^2 \tag{3.1}$$

Для получения скалярных соотношений, содержащих вторые производные угловых скоростей, необходимо продифференцировать второе уравнение из (2.1). Преобразовав результат дифференцирования с учетом (1.9), (1.10) и третьего уравнения из (2.1), придем к векторным уравнениям

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P} \cdot (\ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}), \quad \ddot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{P} \cdot \ddot{\boldsymbol{\Omega}} \tag{3.2}$$

Алгебраическим следствием уравнений (2.1), (3.2) являются скалярные соотношения:

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\omega}} = (\ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}})^2, \quad \ddot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) = \ddot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}})^2 \tag{3.3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\Omega}} = (\ddot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})^2, \quad \ddot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = \ddot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) - (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}})^2 \tag{3.4}$$

$$(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \ddot{\boldsymbol{\omega}}) = (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \ddot{\boldsymbol{\Omega}}) \tag{3.5}$$

При выводе соотношений (3.1)–(3.5) использовались тождества (1.2).

Замечание. Полученные скалярные соотношения позволяют отождествить задачу Дарбу с задачей определения вектор-функции по ее модулю и модулям ее первой и второй производных.

Допустим, известен левый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Тогда, согласно первым двум формулам из (3.1) и первой формуле из (3.4), известны модули производных правого вектора угловой скорости

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \varphi_1(t), \quad |\dot{\boldsymbol{\Omega}}| = \varphi_2(t), \quad |\ddot{\boldsymbol{\Omega}}| = \varphi_3(t) \tag{3.6}$$

Следовательно, левая задача Дарбу может быть сформулирована следующим образом: определить правый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, если известны модули его производных (3.6).

Аналогично, если известен правый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, то, согласно первым двум формулам из (3.1) и первой формуле из (3.3), известны модули производных левого вектора угловой скорости

$$|\boldsymbol{\omega}| = f_1(t), \quad |\dot{\boldsymbol{\omega}}| = f_2(t), \quad |\ddot{\boldsymbol{\omega}}| = f_3(t) \tag{3.7}$$

и правая задача Дарбу формулируется так: определить левый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, если известны модули его производных (3.7).

Отождествление задачи Дарбу и задачи определения вектор-функции по модулям ее производных представляется интересным, поскольку к последней сводится целый ряд задач механики. В качестве примера приведем следующую задачу: определить вектор положения материальной точки $\mathbf{R}(t)$, если модуль этого вектора, а также модули скорости и ускорения точки являются заданными функциями времени

$$|\mathbf{R}(t)| = r(t), \quad |\dot{\mathbf{R}}(t)| = v(t), \quad |\ddot{\mathbf{R}}(t)| = w(t) \tag{3.8}$$

4. Задача определения вектор-функции по ее скалярным характеристикам. Рассмотрим произвольную вектор-функцию $\mathbf{R}(t)$. Будем предполагать, что вектор $\mathbf{R}(t)$ не постоянен по направлению. Тогда векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{R}(t)\times\dot{\mathbf{R}}(t) \tag{4.1}$$

линейно независимы и их можно использовать в качестве базиса. Представим вектор $\ddot{\mathbf{R}}(t)$ в виде разложения по базису (4.1):

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = -a(t)\dot{\mathbf{R}}(t) - b(t)\mathbf{R}(t) + c(t)\mathbf{R}(t)\times\dot{\mathbf{R}}(t) \tag{4.2}$$

Координаты вектора $\ddot{\mathbf{R}}(t)$ в базисе (4.2) вычисляются по формулам

$$a(t) = -\ddot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}^2 = -(\ln|\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}|)^{\cdot} \tag{4.3}$$

$$b(t) = -\ddot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}^1 = \frac{(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})\cdot(\dot{\mathbf{R}}\times\ddot{\mathbf{R}})}{(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})^2}, \quad c(t) = \ddot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{e}^3 = \frac{\ddot{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})}{(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})^2}$$

Если скалярные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – известны, уравнение (4.2) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами относительно вектор-функции $\mathbf{R}(t)$. Если коэффициент $c(t)$ тождественно равен нулю, то уравнение превращается в линейное. Если $c(t) \neq 0$, уравнение (4.2) может быть приведено к линейному относительно вектора $\mathbf{R}(t)$ уравнению третьего порядка. Для осуществления этого преобразования нужно: (*1*) продифференцировать уравнение (4.2); (*2*) умножить уравнение (4.2) векторно на $\mathbf{R}(t)$; (*3*) сложить полученные уравнения и уравнение (4.2), предварительно домножив их на соответствующие скалярные коэффициенты. В результате получится уравнение

$$\dddot{\mathbf{R}}(t) + A(t)\ddot{\mathbf{R}}(t) + B(t)\dot{\mathbf{R}}(t) + C(t)\mathbf{R}(t) = 0 \tag{4.4}$$

коэффициенты которого выражаются через коэффициенты (4.3) по формулам

$$A(t) = 2a(t) - [\ln c(t)]^{\cdot}, \quad B(t) = \dot{a}(t) + a(t)(a(t) - [\ln c(t)]^{\cdot}) + b(t) + c^2(t)R^2(t)$$

$$C(t) = \dot{b}(t) + b(t)(a(t) - [\ln c(t)]^{\cdot}) - (1/2)c^2(t)[R^2(t)]^{\cdot} \tag{4.5}$$

Вывод: если известны скалярные функции вектора (4.3), по этим функциям можно восстановить сам вектор путем решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (4.2) или линейного дифференциального уравнения третьего порядка (4.4).

Замечание. Уравнения (4.2), (4.4) позволяют восстановить неизвестную вектор-функцию $\mathbf{R}(t)$ по заданным модулям ее производных.

Для доказательства этого утверждения достаточно привести формулы, выражающие скалярные коэффициенты (4.3) через функции $|\mathbf{R}|, |\dot{\mathbf{R}}|, |\ddot{\mathbf{R}}|$:

$$a(t) = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(R^2 v^2 - \frac{1}{4}[(R^2)^{\cdot}]^2\right)\right)^{\cdot}, \quad b(t) = \frac{1/4(R^2)^{\cdot}(v^2)^{\cdot} - 1/2(R^2)^{\cdot\cdot}v^2 + v^4}{R^2v^2 - 1/4[(R^2)^{\cdot}]^2}$$

$$c^2(t) = \frac{w^2 + 1/2\,a(t)(v^2)^{\cdot} + b(t)[1/2(R^2)^{\cdot\cdot} - v^2]}{R^2v^2 - 1/4[(R^2)^{\cdot}]^2}, \quad v^2 = \dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{R}}, \quad w^2 = \ddot{\mathbf{R}}\cdot\ddot{\mathbf{R}} \tag{4.6}$$

5. Векторные формулировки задачи Дарбу. Здесь задача Дарбу трактуется как задача определения одного из векторов угловой скорости, когда другой вектор угловой скорости известен. Ниже предлагаются две формулировки левой задачи Дарбу, одна из которых базируется на нелинейном уравнении второго порядка типа (4.2), другая – на линейном уравнении третьего порядка типа (4.4), и две аналогичные формулировки правой задачи Дарбу. Предлагаемые формулировки справедливы только для не постоянных по направлению векторов угловых скоростей.

Левая задача Дарбу (задача определения правого вектора угловой скорости по известному левому).

Формулировка I. Задача Коши для определения правого вектора угловой скорости имеет вид

$$\ddot{\mathbf{\Omega}} + a(\boldsymbol{\omega})\dot{\mathbf{\Omega}} + b(\boldsymbol{\omega})\mathbf{\Omega} = c(\boldsymbol{\omega})\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}} \tag{5.1}$$

$$\mathbf{\Omega}(0) = \mathbf{P}_0^T\cdot\boldsymbol{\omega}_0, \quad \dot{\mathbf{\Omega}}(0) = \mathbf{P}_0^T\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \tag{5.2}$$

Коэффициенты $a(\boldsymbol{\omega})$, $b(\boldsymbol{\omega})$, $c(\boldsymbol{\omega})$ вычисляются в соответствии с формулами (4.3) и скалярными соотношениями между угловыми скоростями (3.1), (3.4), (3.5):

$$a(\boldsymbol{\omega}) = -(\ln|\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}}|)^{\cdot}, \quad b(\boldsymbol{\omega}) = \frac{(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}})\cdot(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\ddot{\boldsymbol{\omega}})}{(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}})^2}, \quad c(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\ddot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}})}{(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}})^2} - 1 \tag{5.3}$$

Формулировка II является следствием формулировки I. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dddot{\mathbf{\Omega}} + A(\boldsymbol{\omega})\ddot{\mathbf{\Omega}} + B(\boldsymbol{\omega})\dot{\mathbf{\Omega}} + C(\boldsymbol{\omega})\mathbf{\Omega} = 0 \tag{5.4}$$

В качестве начальных условий используются дифференциальное уравнение (5.1) при $t = 0$ и начальные условия (5.2). Коэффициенты $A(\boldsymbol{\omega})$, $B(\boldsymbol{\omega})$, $C(\boldsymbol{\omega})$ выражаются через $a(\boldsymbol{\omega})$, $b(\boldsymbol{\omega})$, $c(\boldsymbol{\omega})$ по формулам (4.5).

Правая задача Дарбу (задача определения левого вектора угловой скорости по известному правому).

Формулировка I. Задача Коши для определения левого вектора угловой скорости имеет вид

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} + a(\mathbf{\Omega})\dot{\boldsymbol{\omega}} + b(\mathbf{\Omega})\boldsymbol{\omega} = c(\mathbf{\Omega})\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{P}_0\cdot\mathbf{\Omega}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}(0) = \mathbf{P}_0\cdot\dot{\mathbf{\Omega}}_0 \tag{5.6}$$

Коэффициенты $a(\mathbf{\Omega})$, $b(\mathbf{\Omega})$, $c(\mathbf{\Omega})$ вычисляются в соответствии с формулами (4.3) и скалярными соотношениями между угловыми скоростями (3.1), (3.3), (3.5):

$$a(\mathbf{\Omega}) = -(\ln|\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}}|)^{\cdot}, \quad b(\mathbf{\Omega}) = \frac{(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})\cdot(\dot{\mathbf{\Omega}}\times\ddot{\mathbf{\Omega}})}{(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})^2}, \quad c(\mathbf{\Omega}) = \frac{\ddot{\mathbf{\Omega}}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})}{(\mathbf{\Omega}\times\dot{\mathbf{\Omega}})^2} + 1 \tag{5.7}$$

Формулировка II является следствием формулировки I. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dddot{\boldsymbol{\omega}} + A(\mathbf{\Omega})\ddot{\boldsymbol{\omega}} + B(\mathbf{\Omega})\dot{\boldsymbol{\omega}} + C(\mathbf{\Omega})\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{5.8}$$

В качестве начальных условий используются дифференциальное уравнение (5.5) при $t = 0$ и начальные условия (5.6). Коэффициенты $A(\mathbf{\Omega})$, $B(\mathbf{\Omega})$, $C(\mathbf{\Omega})$ выражаются через $a(\mathbf{\Omega})$, $b(\mathbf{\Omega})$, $c(\mathbf{\Omega})$ по формулам (4.5).

6. Сравнительный анализ предлагаемой и классической постановок задачи Дарбу. Уравнение типа Риккати относительно комплексной неизвестной, к которому сводится задача Дарбу в классической постановке (см. [9]), имеет вид

$$\dot{z} = -\frac{\Omega_2 - i\Omega_1}{2} - i\Omega_3 z + \frac{\Omega_2 + i\Omega_1}{2}z^2 \tag{6.1}$$

Замена переменных $u = \exp(-\int (\Omega_2 + i\Omega_1)/z\,dt/2)$ позволяет свести уравнение (6.1) к линейному уравнению второго порядка

$$\ddot{u} + (a + ib)\dot{u} + cu = 0 \tag{6.2}$$

$$a = -(\ln\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2})^{\cdot}, \quad b = \Omega_3 + \frac{\Omega_1\dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_1\Omega_2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}, \quad c = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{4}$$

Линейное уравнение второго порядка (6.2) относительно комплексной неизвестной $u = x + iy$ эквивалентно линейной системе четвертого порядка относительно действительных неизвестных x, y:

$$\ddot{x} + a\dot{x} - b\dot{y} + cx = 0, \quad \ddot{y} + a\dot{y} + b\dot{x} + cy = 0 \tag{6.3}$$

Предложенная в настоящей работе формулировка задачи Дарбу представляет собой линейное уравнение третьего порядка относительно неизвестной вектор-функции. Это уравнение имеет такую структуру, что при переходе к координатной записи оно распадается на три независимых скалярных уравнения, отличающихся друг от друга только обозначением неизвестной функции, так что если известно решение одного из этих уравнений, то известно и решение двух других:

$$\begin{aligned}
&\dddot{\omega}_x + A(\mathbf{\Omega})\ddot{\omega}_x + B(\mathbf{\Omega})\dot{\omega}_x + C(\mathbf{\Omega})\omega_x = 0\\
&\dddot{\omega}_y + A(\mathbf{\Omega})\ddot{\omega}_y + B(\mathbf{\Omega})\dot{\omega}_y + C(\mathbf{\Omega})\omega_y = 0\\
&\dddot{\omega}_z + A(\mathbf{\Omega})\ddot{\omega}_z + B(\mathbf{\Omega})\dot{\omega}_z + C(\mathbf{\Omega})\omega_z = 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Вывод. Предложенный выше подход к решению задачи Дарбу позволяет свести ее к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка, в то время как подход, основанный на уравнении Риккати, приводит к системе линейных дифференциальных уравнений, порядок которой на единицу выше.

7. Задача о вращении шара при наличии вязкого трения. Рассматривается твердое тело с шаровым тензором инерции $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{E}$, закрепленное в центре масс с помощью сферического шарнира. Взаимодействие тела с окружающей средой моделируется действием на тело момента линейного вязкого трения

$$\mathbf{M}_{vf} = -\mathbf{K}_{vf} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_{vf} = k_3\mathbf{nn} + k_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \tag{7.1}$$

Тензор вязкого трения $\mathbf{K}_{vf}$ характеризуется постоянными коэффициентами k_{12}, k_3, зависящими от свойств окружающей среды и поверхности тела, и направлением оси изотропии $\mathbf{n}$, жестко связанной с телом ($\mathbf{P}$ – тензор поворота тела, $\mathbf{n}_0$ – начальное направление вектора $\mathbf{n}$). Согласно второму закону динамики Эйлера, уравнение движения тела имеет вид

$$\theta\dot{\boldsymbol{\omega}} = -[k_3\mathbf{nn} + k_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn})] \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \tag{7.2}$$

Домножив уравнение (7.2) слева на $\mathbf{P}^T$ и проведя несложные преобразования, получим уравнение относительно правого вектора угловой скорости

$$\theta\dot{\mathbf{\Omega}} = -[k_3\mathbf{n}_0\mathbf{n}_0 + k_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{n}_0\mathbf{n}_0)] \cdot \mathbf{\Omega} \tag{7.3}$$

Решение уравнения (7.3) имеет вид

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_0)\mathbf{n}_0 e^{-\frac{k_3}{\theta}t} + [\mathbf{\Omega}_0 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{\Omega}_0)\mathbf{n}_0]e^{-\frac{k_{12}}{\theta}t} \tag{7.4}$$

После того, как правый вектор угловой скорости определен, динамическая задача сводится к задаче Дарбу. Воспользовавшись формулировкой II правой задачи Дарбу и выражением (7.4) для правой угловой скорости, получим уравнение для левой угловой скорости

$$\ddot{\omega}+2\frac{k_3+k_{12}}{\theta}\dot{\omega}+\left[\frac{k_3^2+3k_3k_{12}+k_{12}^2}{\theta^2}+\Omega^2\right]\dot{\omega}+\left[\frac{k_3k_{12}(k_3+k_{12})}{\theta^3}-\frac{1}{2}(\Omega^2)^{\cdot}\right]\omega=0 \qquad (7.5)$$

$$\Omega^2=(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{\Omega}_0)^2 e^{-\frac{2k_3}{\theta}t}+[\mathbf{\Omega}_0-(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{\Omega}_0)\mathbf{n}_0]^2 e^{-\frac{2k_{12}}{\theta}t}$$

Уравнение (7.5) имеет точное аналитическое решение, которое может быть представлено в виде равномерно сходящегося ряда, коэффициенты которого связаны между собой рекуррентными соотношениями. Решение уравнения (7.5) можно найти в [10], где обсуждаемая задача рассмотрена в более общей постановке (тензор инерции тела – трансверсально-изотропный).

8. Задача о вращении шара под действием постоянного момента. Рассматривается шар с тензором инерции $\mathbf{\theta}=\theta\mathbf{E}$. Центр масс шара неподвижен. На шар действует постоянный по величине и направлению момент $\mathbf{M}$. Уравнение движения шара

$$\theta\dot{\boldsymbol{\omega}}=\mathbf{M} \qquad (8.1)$$

легко интегрируется, в результате чего определяется левый вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega}=\theta^{-1}\mathbf{M}t+\boldsymbol{\omega}_0 \qquad (8.2)$$

и динамическая задача сводится к задаче Дарбу. Воспользовавшись формулировкой II левой задачи Дарбу, с учетом выражения для левой угловой скорости (8.2), получим уравнение для определения правой угловой скорости

$$\ddot{\mathbf{\Omega}}+(\theta^{-2}M^2t^2+2\theta^{-1}\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_0t+\omega_0^2)\dot{\mathbf{\Omega}}-(\theta^{-2}M^2t+\theta^{-1}\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_0)\mathbf{\Omega}=0 \qquad (8.3)$$

Уравнение (8.3) допускает точное аналитическое решение, которое выражается через гипергеометрические функции. Подробное обсуждение этого решения выходит за рамки данной работы.

Автор благодарит П.А. Жилина и А.М. Кривцова за обсуждение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Darboux G.* Lecons sur la théorie générale des surfaces. T. I. Chap. II. Paris, 1887.
2. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970. 317 с.
3. *Коленова В.И., Морозов В.М.* О применимости методов теории приводимости к некоторым задачам динамики гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 8–14.
4. *Сачков Г.П., Харламов Ю.М.* Об интегрируемости кинематических уравнений вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 11–15.
5. *Соколов С.В.* Об одной аппроксимации решения кинематических уравнений движения твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 4. С. 16–23.
6. *Иванова Е.А.* Использование прямого тензорного исчисления при решении задачи Дарбу. СПб.: СПб ГТУ, 1998, 11 с. Деп. в ВИНИТИ 24.04.98, № 1358–В98.
7. *Жилин П.А.* Тензор поворота в описании кинематики твердого тела. Механика и процессы управления // Тр. СПбГТУ. 1992. № 443. С. 100–121.
8. *Zhilin P.A.* A new approach to the analysis of free rotation of rigid bodies // ZAMM. 1996. V. 76. № 4. P. 187–204.
9. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
10. *Иванова Е.А.* Свободное вращение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде. Механика и процессы управления // Тр. СПбГТУ. 1997. № 467. С. 61–69.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
15.06.1998