

**МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ
НАНОРАЗМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ.
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

Е.А. Иванова, Д.А. Индейцев, Н.Ф. Морозов, Б.Н. Семенов

*Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербургский государственный университет*

Санкт-Петербург, 2005

Метод экспериментального определения изгибной жесткости нанообъектов

Идея эксперимента.

- Рассмотрим два подобных объекта: один из них — наноразмерный объект; другой — макроразмерный объект.
- Найдем собственные частоты рассматриваемых объектов $\omega_n^{(1)}$ и $\omega_n^{(2)}$ экспериментальным методом.
- Выберем геометрические размеры рассматриваемых объектов и граничные условия так, что $\frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = f(D_1, D_2) = \text{const.}$
- Если известны $\omega_n^{(1)}$, $\omega_n^{(2)}$ и изгибная жесткость макро-объекта D_2 , можно вычислить изгибную жесткость нано-объекта D_1 .

1. Кантилевер (упругий стержень)

Граничные условия:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad w'''(l) = 0.$$

Собственные частоты зависят от следующих параметров:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{D}{\rho l^4}} \Omega_n, \quad \text{где } \Omega_n \text{ зависит только от } n.$$

Рассмотрим два стержня, имеющие различные физические и геометрические характеристики. Тогда

$$\forall n : \quad \Omega_n^{(1)} = \Omega_n^{(2)}. \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_1 \rho_2 l_2^4}{D_2 \rho_1 l_1^4}}.$$

2. Прямоугольная пластина

Размеры пластины: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.

Граничные условия:

$$w|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=\pm a} = 0, \quad w|_{y=\pm b} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}|_{y=\pm b} = 0.$$

Собственные частоты зависят от следующих параметров:

$$\omega_{nm} = \sqrt{\frac{D}{\rho a^4}} \Omega_{nm}, \quad \Omega_{nm} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Рассмотрим две пластины, имеющие различные физические и геометрические характеристики, но одинаковый параметр a/b .

$$\forall n, m : \quad \Omega_{nm}^{(1)} = \Omega_{nm}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{nm}^{(1)}}{\omega_{nm}^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_1 \rho_2 a_2^4}{D_2 \rho_1 a_1^4}}.$$

3. Цилиндрическая оболочка (только изгибные деформации)

Размеры цилиндрической оболочки: R — радиус цилиндра.

Цилиндрические координаты: z , θ .

Граничные условия:

$$u_\theta(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad \varphi_z(0, t) = 0, \\ u_\theta(\pi, t) = u_\theta(-\pi, t), \quad w(\pi, t) = w(-\pi, t), \quad \varphi_z(\pi, t) = \varphi_z(-\pi, t).$$

Собственные частоты зависят от следующих параметров:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{D}{\rho R^4}} \Omega_n, \quad \text{where } \Omega_n \text{ depends on } n \text{ only.}$$

Рассмотрим две оболочки, имеющие различные физические и геометрические характеристики.

$$\forall n : \quad \Omega_n^{(1)} = \Omega_n^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_1 \rho_2 R_2^4}{D_2 \rho_1 R_1^4}}.$$

4. Цилиндр. спиральная оболочка (изгибные деформации)

Эксперименты В.Я. Принца (Новосибирск)

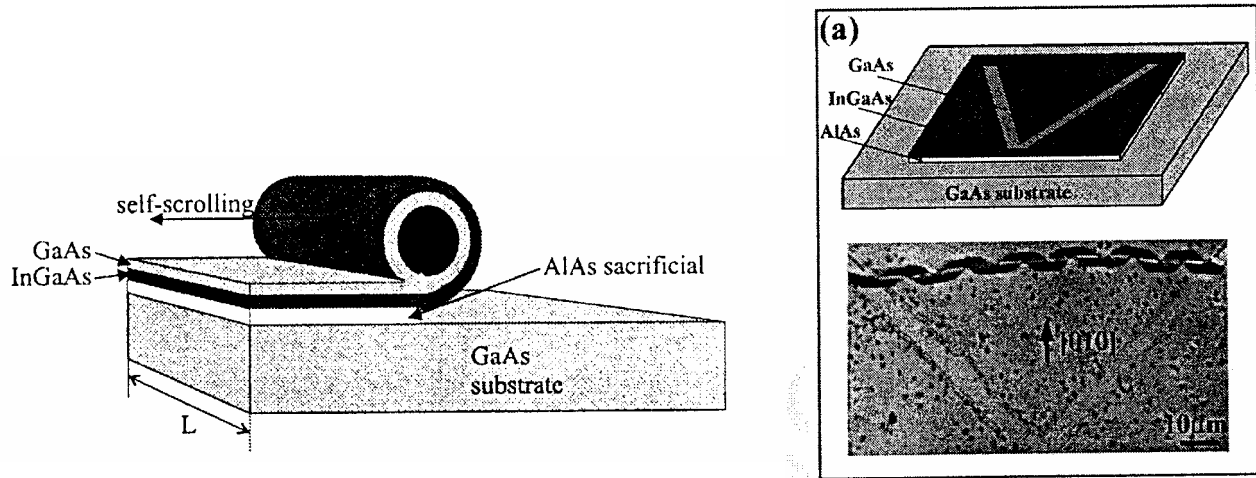


Рис. 1: Цилиндрическая оболочка и цилиндрическая спиральная оболочка.

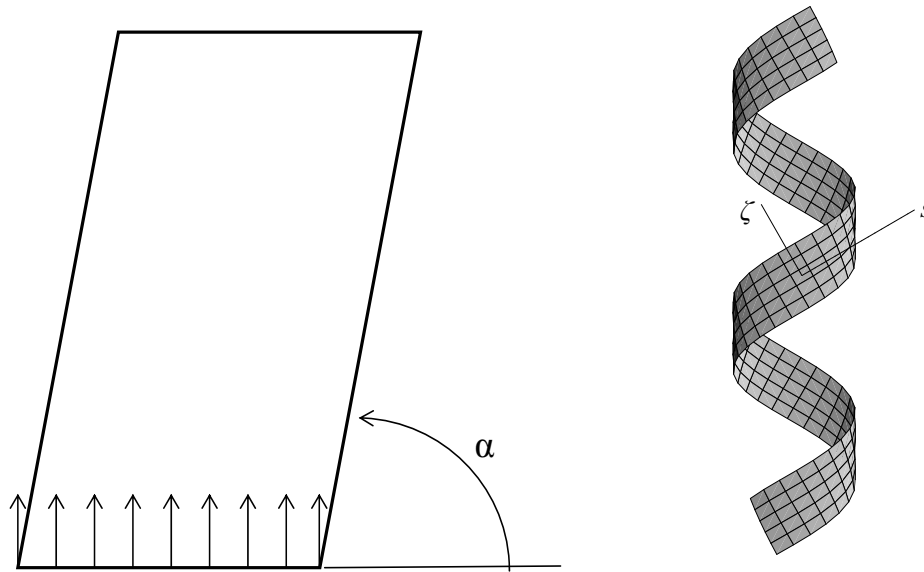


Рис. 2: Цилиндрическая спиральная оболочка.

Геометрия цилиндрической спиральной оболочки.

Спиральные координаты s , ζ и цилиндрические координаты z , φ :

$$z = R(\sin \alpha s + \cos \alpha \zeta), \quad \varphi = \cos \alpha s - \sin \alpha \zeta. \quad (1)$$

Размеры спиральной оболочки:

$$-l/2 \leq R s \leq l/2, \quad -a/2 \leq R \zeta \leq a/2. \quad (2)$$

Здесь R — радиус цилиндра, α — угол подъема витков спирали.

Уравнения классической теории оболочек.

$$\nabla \cdot \underline{T} = \rho \ddot{\underline{u}}, \quad \nabla \cdot \underline{M} + \underline{T}_\times = 0. \quad (3)$$

$$\underline{\varphi} = -\underline{n} \times (\nabla \underline{u}) \cdot \underline{n}, \quad \underline{T} = \underline{T} \cdot \underline{a} + \underline{N} \underline{n}. \quad (4)$$

$$\underline{T} \cdot \underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{M} \cdot \underline{b}) \underline{c} = {}^4 \underline{A} \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \underline{M}^T = {}^4 \underline{C} \cdot \underline{\kappa}. \quad (5)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left((\nabla \underline{u}) \cdot \underline{a} + \underline{a} \cdot (\nabla \underline{u})^T \right), \quad \underline{\kappa} = (\nabla \underline{\varphi}) \cdot \underline{a} + \frac{1}{2} \left((\nabla \underline{u}) \cdot \underline{c} \right) \underline{b}. \quad (6)$$

Здесь \underline{T} , \underline{M} — тензоры усилий и моментов, ρ — поверхностная плотность массы, \underline{u} , $\underline{\varphi}$ — векторы перемещений и поворотов, $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\kappa}$ — тензоры деформации, ${}^4 \underline{A}$, ${}^4 \underline{C}$ — тензоры жесткости, \underline{a} — единичный тензор в касательной плоскости, \underline{n} — нормаль к поверхности, $\underline{b} = -\nabla \underline{n}$, $\underline{c} = -\underline{a} \times \underline{n}$.

Приближенные уравнения динамики тонкой оболочки.

Предположим, что

$$\underline{\varepsilon} = 0. \quad (7)$$

Уравнение движения:

$$\left(\sin^2 \alpha \frac{\partial^4}{\partial s^4} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial s^2 \partial \zeta^2} \right) \left[\frac{D}{\rho R^4} (\tilde{\Delta} + 1)^2 w + \ddot{w} \right] - \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \tilde{\Delta} \ddot{w} = 0. \quad (8)$$

Уравнение совместности деформаций:

$$\sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \zeta} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (9)$$

Здесь w — перемещение вдоль \underline{n} , D — изгибная жесткость.

Решение уравнения движения, удовлетворяющее уравнению совместности деформаций:

$$w(s, \zeta, t) = W(s, \zeta) e^{i\omega t}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
W = & \sum_{j=1}^3 [(A_j^s(p_j s + q_j \zeta) + B_j^s) \sin[\lambda_j(\cos \alpha s - \sin \alpha \zeta)] + \\
& + (A_j^c(p_j s + q_j \zeta) + B_j^c) \cos[\lambda_j(\cos \alpha s - \sin \alpha \zeta)]], \\
p_j = & \sin \alpha - \beta_j, \quad q_j = \cos \alpha + \beta_j,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\beta_j = \frac{2 \cos 2\alpha \Omega^2}{9 \cos \alpha (\lambda_j^4 + (\Omega^2 - 1)\lambda_j^2 + 2\Omega^2)}.$$

$A_j^s, B_j^s, A_j^c, B_j^c$ — константы, λ_j — корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 - 2\lambda^4 + (1 - \Omega^2)\lambda^2 - \frac{4}{3}\Omega^2 = 0, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho R^4}{D}} \omega. \tag{12}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
\underline{u} \left(\frac{l}{2R}, \frac{a}{2R}, t \right) = 0, \quad \underline{u} \left(-\frac{l}{2R}, \frac{a}{2R}, t \right) = 0, \\
\underline{u} \left(\frac{l}{2R}, -\frac{a}{2R}, t \right) = 0, \quad \underline{u} \left(-\frac{l}{2R}, -\frac{a}{2R}, t \right) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Обсуждение результатов.

Собственные частоты зависят от трех параметров:

$$\Omega_n = \Omega_n \left(\alpha, \frac{l}{R}, \frac{a}{R} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{14}$$

Рассмотрим две оболочки, имеющие различные физические и геометрические характеристики, но одинаковые параметры $\alpha, l/R, a/R$. Тогда

$$\forall n : \quad \Omega_n^{(1)} = \Omega_n^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_1 \rho_2 R_2^4}{D_2 \rho_1 R_1^4}}. \tag{15}$$

Акустические и оптические методы измерения собственных частот нанобъектов

И.А. Соколов (Физико-технический институт РАН
им. А.Ф. Иоффе, С.-Петербург)

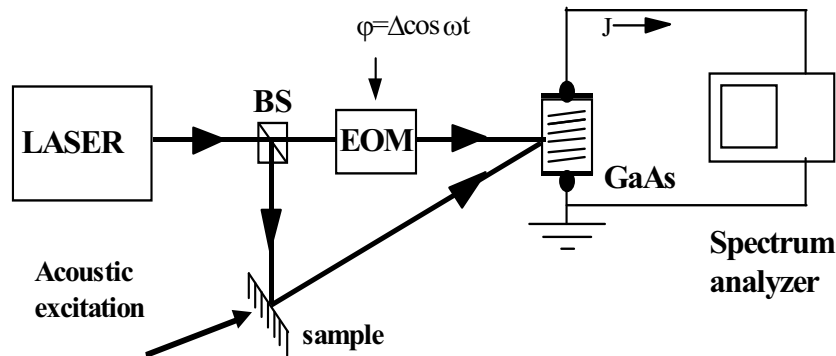


Рис. 3: Экспериментальная установка интерферометра с адаптивным фотоприемником.

- Ограниченный частотный диапазон.
- Луч лазера — пятно определенного диаметра (не точка).
- Луч лазера фокусируется с некоторой ошибкой.
- Частоты какого объекта измеряются?

Вывод: Невозможно измерять собственные частоты нано-объектов. Можно измерять собственные частоты нано-объектов на микро-подложке.

Задачи механики:

- При каком соотношении между размерами нано-объекта и подложки мы сможем получить информацию о нано-объекте?
- Какие условия соединения нано-объекта с подложкой и соединения подложки с рамкой прибора оптимальны?
- Определение механических характеристик нано-объекта по собственным частотам системы нано-объект – подложка.

Две цилиндрические оболочки (изгибные деформации)

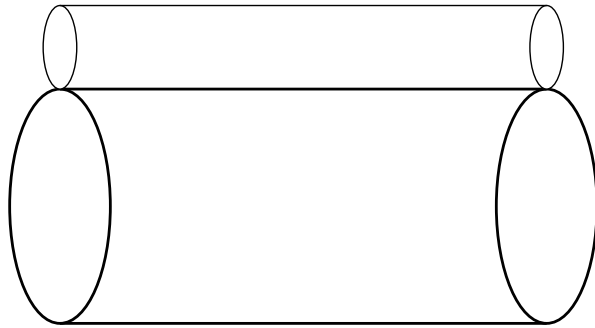


Рис. 4: Цилиндрические оболочки.

ρ_1, D_1, R_1 — физические и геометр. характеристики нано-цилиндра.
 ρ_2, D_2, R_2 — физические и геометр. характеристики микро-цилиндра.

Постановка задачи

Кинематические условия соединения оболочек:

$$w^{(1)}|_{\theta=0} = w^{(2)}|_{\theta=0}, \quad u_{\theta}^{(1)}|_{\theta=0} = -u_{\theta}^{(2)}|_{\theta=0}, \quad \varphi_z^{(1)}|_{\theta=0} = \varphi_z^{(2)}|_{\theta=0}.$$

Силые условия соединения оболочек:

$$T_{\theta r}^{(1)}|_{\theta=0} = T_{\theta r}^{(2)}|_{\theta=0}, \quad T_{\theta\theta}^{(1)}|_{\theta=0} = -T_{\theta\theta}^{(2)}|_{\theta=0}, \quad M_{\theta z}^{(1)}|_{\theta=0} = M_{\theta z}^{(2)}|_{\theta=0}.$$

Условия замкнутости оболочек:

$$w^{(k)}|_{\theta=0} = w^{(k)}|_{\theta=2\pi}, \quad u_{\theta}^{(k)}|_{\theta=0} = u_{\theta}^{(k)}|_{\theta=2\pi}, \quad \varphi_z^{(k)}|_{\theta=0} = \varphi_z^{(k)}|_{\theta=2\pi}.$$

Решение задачи

$$w^{(k)}(\theta, t) = W^{(k)}(\theta) e^{i\omega t}, \quad W^{(k)}(\theta) = \sum_{j=1}^3 [A_j^{(k)} \sin(\lambda_{(k)j}\theta) + B_j^{(k)} \cos(\lambda_{(k)j}\theta)].$$

Здесь ω — собственные частоты, $A_j^{(k)}, B_j^{(k)}$ — константы, $\lambda_{(k)j}$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda_{(k)}^6 - 2\lambda_{(k)}^4 + (1 - \Omega_{(k)}^2)\lambda_{(k)}^2 - \Omega_{(k)}^2 = 0, \quad \Omega_{(k)} = \sqrt{\frac{\rho_k R_k^4}{D_k}} \omega.$$

Выберем $\Omega_{(2)}$ в качестве основной переменной. Тогда коэффициенты в частотном уравнении будут зависеть только от R_1/R_2 , ρ_1/ρ_2 и D_1/D_2 . Следовательно, собственные частоты имеют следующий вид:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{D_2}{\rho_2 R_2^4}} \Omega_{(2)n}, \quad \Omega_{(2)n} = \Omega_{(2)n} \left(\frac{R_1}{R_2}, \frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{D_1}{D_2} \right).$$

Обсуждение

Рассмотрим две системы цилиндрических оболочек, имеющие различные физические и геометрические характеристики, но одинаковые граничные условия и одинаковые параметры

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_3}{\rho_4}, \quad \frac{D_1}{D_2} = \frac{D_3}{D_4}$$

Первая система состоит из нано-оболочки (параметры R_1, ρ_1, D_1) и микро-оболочки (параметры R_2, ρ_2, D_2).

Вторая система — из микро-оболочки (параметры R_3, ρ_3, D_3) и макро-оболочки (параметры R_4, ρ_4, D_4).

$\omega_n^{(1)}$ — собственные частоты первой системы.

$\omega_n^{(2)}$ — собственные частоты второй системы.

Тогда $\omega_n^{(1)}/\omega_n^{(2)}$ не зависит от номера n :
$$\frac{\omega_n^{(1)}}{\omega_n^{(2)}} = \sqrt{\frac{D_2 \rho_4 R_4^4}{D_4 \rho_2 R_2^4}}.$$

Асимптотические оценки

Обозначим $\omega_n^{(0)}$ — собственные частоты микро-оболочки (без нано-оболочки). Показано, что:

$$\omega_n^{(1)} = \omega_n^{(0)} + \varepsilon \tilde{\omega}_n, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1 R_1^2}{\rho_2 R_2^2}, \quad \delta_n = \frac{\omega_n^{(1)} - \omega_n^{(0)}}{\omega_n^{(1)}} \cdot 100\% \sim \varepsilon \cdot 100\%.$$

Точность измерения собственных частот: $10^{-4}\%$.

Атомный силовой микроскоп

А.В. Анкудинов, А.Н. Титков (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе)

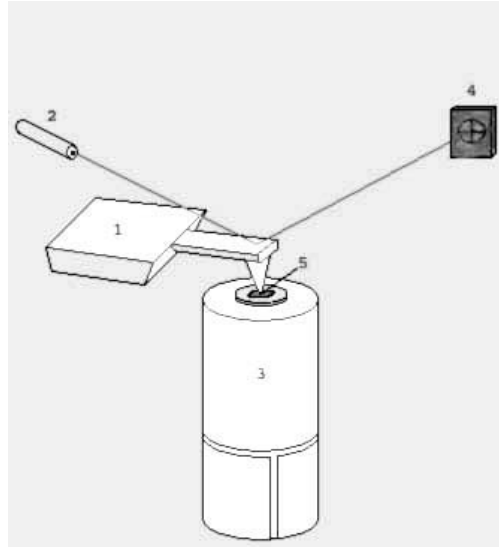


Рис. 5: Атомный силовой микроскоп.

- Ограниченный частотный диапазон.
- Игла кантилевера имеет конечный радиус кривизны (не ноль).
- Влияние подложки на собственные частоты нано-объекта.
- Игла кантилевера воздействует на нано-объект.

Вывод: В принципе, использование АСМ позволяет измерять собственные частоты нано-объектов. Фактически, с помощью АСМ измеряются частоты системы нано-объект – кантилевер.

Задачи механики:

- Определение механических свойств нано-объекта по частотам системы нано-объект – кантилевер.
- Можно ли выделить собственные частоты нано-объекта из спектра системы нано-объект – кантилевер?

Кантилевер и нано-стержень

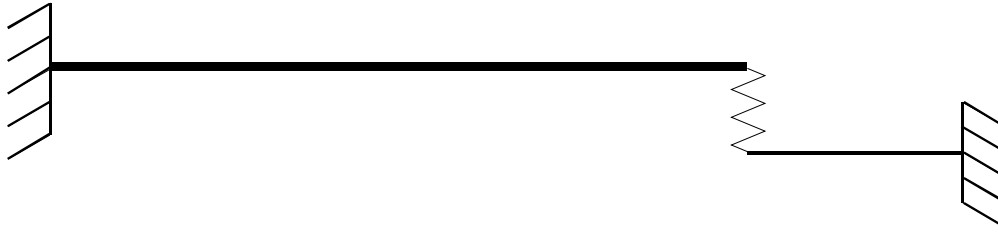


Рис. 6: Кантилевер (слева) и нано-стержень (справа).

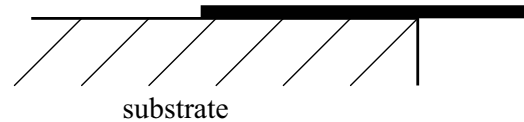
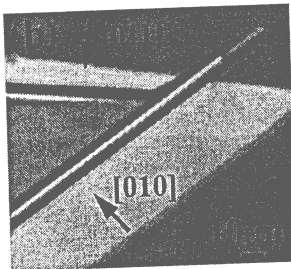


Рис. 7: Эксперименты В.Я. Принца (Новосибирск).

Свободные колебания системы

Кантилевер:

$$D_1 u^{IV} + \rho_1 \ddot{u} = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(L_1) = 0.$$

Нано-стержень:

$$D_2 v^{IV} + \rho_2 \ddot{v} = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(L_2) = 0.$$

Взаимодействие кантилевера и нано-стержня:

$$D_1 u'''(L_1) = C(u(L_1) - v(L_2)), \quad D_2 v'''(L_2) = -C(u(L_1) - v(L_2)).$$

Обозначения: $\lambda^2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{D_1}}\omega$, $\mu^2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{D_2}}\omega$. Частотное уравнение:

$$\begin{aligned} & [1 + \cos(\lambda L_1)\text{ch}(\lambda L_1)](1 + \cos(\mu L_2)\text{ch}(\mu L_2) + \\ & + \frac{C}{D_2\mu^3}[\sin(\mu L_2)\text{ch}(\mu L_2) - \cos(\mu L_2)\text{sh}(\mu L_2)]) + \\ & + \frac{C}{D_1\lambda^3}[\sin(\lambda L_1)\text{ch}(\lambda L_1) - \cos(\lambda L_1)\text{sh}(\lambda L_1)](1 + \cos(\mu L_2)\text{ch}(\mu L_2)) = 0. \end{aligned}$$

Вынужденные колебания системы

$$u(0) = A \sin(\Omega t), \quad A = \text{const.}$$

Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= [P_1 \cos(\lambda_* x_1) + P_2 \sin(\lambda_* x_1) + P_3 \text{ch}(\lambda_* x_1) + P_4 \text{sh}(\lambda_* x_1)] \sin(\Omega t), \\ v &= [Q_1 \cos(\mu_* x_2) + Q_2 \sin(\mu_* x_2) + Q_3 \text{ch}(\mu_* x_2) + Q_4 \text{sh}(\mu_* x_2)] \sin(\Omega t), \end{aligned}$$

где $\lambda_*^2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{D_1}}\Omega$, $\mu_*^2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{D_2}}\Omega$.

Эффект динамического демпфирования колебаний:

$$u(L_1, t) = 0.$$

Уравнение для определения Ω :

$$1 + \cos(\mu_* L_2)\text{ch}(\mu_* L_2) + \frac{C}{D_2\mu_*^3}[\sin(\mu_* L_2)\text{ch}(\mu_* L_2) - \cos(\mu_* L_2)\text{sh}(\mu_* L_2)] = 0.$$

Следующее соотношение имеет место: $\frac{C}{D_1\lambda^3} \ll \frac{C}{D_2\mu^3}$.

Следовательно, Ω_n очень близки к частотам нано-стержня.