

УДК 531.38

© 1997 г. А.М. КРИВЦОВ

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

Рассматриваются стационарные движения несимметричного волчка, находящегося под действием упругого и вращающего моментов и имеющего неподвижную точку. Несимметрия волчка создается посредством точечной массы (дисбаланса). Выделено три независимых стационарных движения системы. Показано, что одно из движений является удобной моделью для исследования общих свойств вынужденных нелинейных колебаний, проведено его исследование в первом нелинейном приближении.

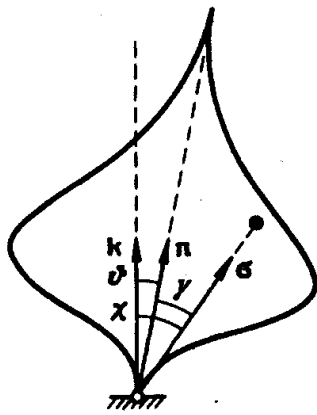
Исследована устойчивость основного стационарного движения. Для частных случаев (двигатель бесконечной мощности и отсутствие двигателя) получены простые условия устойчивости, рассмотрено расположение областей устойчивости на амплитудно-частотной характеристике системы. При отсутствии двигателя вводится понятие модифицированной частоты вращения, позволяющее обеспечить соответствие между расположением областей устойчивости и формой амплитудно-частотной характеристики.

1. Введение. Задачам динамики недеформируемого твердого тела и задачам динамики жестких роторов посвящена обширная литература, однако наблюдается определенный пробел в области, находящейся на границе между этими направлениями. Прежде всего это учет нелинейности, вносимой инерционными слагаемыми в уравнении динамики роторов. В предлагаемой работе, на примере относительно простой модели, проведено исследование влияния инерционных факторов на динамику системы. Особый интерес к стационарному движению связан с тем, что оно является естественным продолжением в нелинейную область движения, описываемого линеаризованными уравнениями динамики роторов. При этом, однако, в работе рассматриваются и значения параметров, при которых задача переходит в область динамики твердого тела (не малые амплитуды, отрицательная жесткость и т.д.).

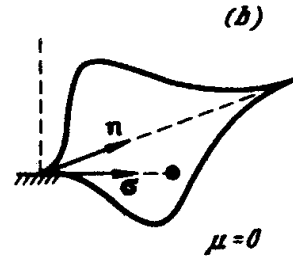
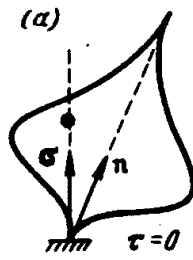
Нелинейные стационарные движения и их устойчивость для двумерного аналога предлагаемой задачи рассматривались в [1–3], где появление нелинейности связывалось со свойствами упругих элементов системы. С позиций динамики твердого тела рассматриваемое движение близко к перманентным вращениям Штауде тяжелого твердого тела [4–5] (различие состоит в форме внешнего момента). Задачи динамики центрифуг, послужившие отправной точкой для данной работы, рассматривались в [6–7].

В [8] выводится специальная форма уравнений движения симметричного твердого тела в невырождающихся переменных, допускающих наглядную интерпретацию. В данной работе уравнения движения записываются в близкой форме, предназначенной для случаев несимметричного тела.

Используется язык прямого тензорного исчисления [9–10], тензорное произведение векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} обозначается \mathbf{ab} , единичный тензор \mathbf{E} . Применение тензора поворота в динамике твердого тела описывается в [11]. Близкий к тензорному операторный способ описания вращений твердого тела рассматривается в [12]. Будут использоваться следующие сокращения: СД – стационарное движение, АЧХ – амплитудно-частотная характеристика.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Основные обозначения и формулы. 2.1. Инерционно-геометрические характеристики. Рассматриваемая система представляет собой осесимметричное твердое тело, имеющее неподвижную точку опоры (симметричный волчок), к которому жестко прикреплена точечная, вообще говоря не малая, масса (дисбаланс) – фиг. 1.

Введем орты: \mathbf{k} – вертикальной оси, \mathbf{n} – оси симметричного волчка, $\boldsymbol{\sigma}$ – направления на дисбаланс. Обозначим углы: γ – между \mathbf{n} и $\boldsymbol{\sigma}$, $|\vartheta|$ – между \mathbf{k} и \mathbf{n} , $|\chi|$ – между \mathbf{k} и $\boldsymbol{\sigma}$. Величина γ – положительна, знаки ϑ и χ определим позже. Угол γ определяет геометрию волчка, он постоянен, углы ϑ и χ – переменные. Будем использовать обозначение $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \cos \vartheta$.

Запишем тензор инерции симметричного волчка относительно неподвижной точки в виде $\boldsymbol{\theta} = \theta_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) + \theta_3 \mathbf{nn}$, где θ_{12} – экваториальный, θ_3 – осевой моменты инерции. Отметим, что для них выполняется неравенство $\theta_3 < 2\theta_{12}$. Будем также использовать $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{12} - \theta_3$ – гироскопический момент инерции. Будем разделять вытянутый $\theta > 0$ ($\theta_3 < \theta_{12}$) и сплюснутый $\theta < 0$ ($\theta_3 > \theta_{12}$) волчки.

Инерционные свойства дисбаланса определяются его моментом инерции: $\theta_* \stackrel{\text{def}}{=} m_* \rho^2$, где m_* – масса дисбаланса, ρ – расстояние от неподвижной точки до дисбаланса.

Инерционно-геометрические характеристики системы определяются 4-мя параметрами, например, θ_{12} , θ_3 , θ_* , γ . При переходе к безразмерным величинам число параметров можно уменьшить до трех.

2.2. Кинетический момент системы. Получим векторные формулы для кинетического момента системы.

Так как орт \mathbf{n} жестко связан с волчком, то $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость волчка. Умножая это соотношение векторно на \mathbf{n} получим следующую формулу для угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \Omega \mathbf{n}, \quad \Omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.1)$$

Величину Ω будем называть угловой скоростью собственного вращения.

Используя (2.1) можно получить простую формулу для \mathbf{K}_0 – кинетического момента симметричного волчка:

$$\mathbf{K}_0 = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\theta_{12}(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) + \theta_3 \mathbf{nn}) \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}) + \Omega \mathbf{n} = \theta_{12} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \theta_3 \Omega \mathbf{n} \quad (2.2)$$

Эта формула, в несколько других обозначениях, была получена в [8]. Кинетический момент дисбаланса имеет вид

$$\mathbf{K}_* = \rho \boldsymbol{\sigma} \times (m_* \rho \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = \theta_* \boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.3)$$

Суммируя (2.2) и (2.3) получаем формулу для \mathbf{K} – полного кинетического момента несимметричного волчка относительно неподвижной точки

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_* = \theta_{12} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \theta_* \boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \theta_3 \Omega \mathbf{n} \quad (2.4)$$

2.3. Внешние воздействия. Будем считать, что волчок находится под воздействием внешнего упругого момента $\mathbf{M}_e = C \mathbf{n} \times \mathbf{k}$. Для краткости ограничимся случаем, когда жесткость C является константой (не зависит от ϑ). Результаты могут быть относительно легко обобщены на случай произвольной зависимости C (ϑ). Будем рассматривать как положительные значения C (восстанавливающий момент), так и отрицательные (опрокидывающий момент). Знаки C и θ определяют 4 типа волчков с принципиально различным поведением.

Будем считать, что на волчок действует момент двигателя \mathbf{M}_d . Далее везде под \mathbf{M}_d будем понимать либо мертвый момент $\mathbf{M}_d = M_d \mathbf{k}$, либо следующий момент $\mathbf{M}_d = M_d \mathbf{n}$. Для удобства будем пользоваться единой записью $\mathbf{M}_d = M_1 \mathbf{k} + M_2 \mathbf{n}$, где каждый из M_1 , M_2 равен либо M_d , либо 0, в зависимости от того, какой из типов моментов рассматривается. Величина M_d является функцией скорости вращения волчка, конкретный вид которой будет обсуждаться позже.

Таким образом суммарный внешний момент, действующий на систему, имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_d = C \mathbf{n} \times \mathbf{k} + M_1 \mathbf{k} + M_2 \mathbf{n} \quad (2.5)$$

2.4. Уравнение динамики. Запишем уравнение баланса кинетического момента системы

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в (2.6) получим векторное дифференциальное уравнение движения системы

$$\theta_{12} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} + \theta_* \boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{\sigma}} + \theta_3 (\Omega \mathbf{n})' + C \mathbf{k} \times \mathbf{n} - M_1 \mathbf{k} - M_2 \mathbf{n} = 0 \quad (2.7)$$

Для получения полной системы уравнений к нему следует добавить кинематические уравнения, определяющие связь параметров \mathbf{n} , $\boldsymbol{\sigma}$, Ω ; M_1 , M_2 . Однако при рассмотрении СД (стационарного движения) этого практически не требуется.

3. Стационарные движения. 3.1. Три варианта стационарных движений. Будем искать СД в виде перманентных вращений

$$\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \omega \mathbf{k}, \quad \dot{\omega} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь ω имеет смысл угловой скорости прецессии. Из (3.1) сразу получаем

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\sigma} = \omega \mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}, \quad \eta = \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0, \quad \Omega = \dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega \eta \quad (3.2)$$

Введем разложения \mathbf{n} , $\boldsymbol{\sigma}$ на вертикальную и горизонтальную составляющие

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\epsilon} + \eta \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \mu \mathbf{k}; \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

Подставим (3.2) в (2.7). Вертикальная составляющая уравнения даст $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, а горизонтальная приведет к основному уравнению СД:

$$(\theta \eta - C/\omega_2) \boldsymbol{\epsilon} + \theta_* \mu \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (3.3)$$

Отметим, что все скалярные величины, входящие в (3.3) постоянны, а векторы $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\tau}$ совершают равномерное вращение.

Рассмотрим уравнение (3.3). Оно имеет 3 различных решения, характеризующиеся, соответственно, соотношениями

$$\boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mu = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (3.4)$$

Эти решения определяют 3 варианта СД.

Первые два из них особые. Им соответствуют такие движения волчка, при которых силы инерции дисбаланса не создают момента относительно неподвижной точки (фиг. 2). Из (3.3) для этих вариантов СД получаем

$$\theta\eta = C/\omega^2 \Leftrightarrow \omega^2 = C/(\theta \cos \vartheta) \quad (3.5)$$

Для 2-го варианта соотношение (3.5) определяет амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), 1-й же вариант может реализовываться только при фиксированных значениях угла нутации: $|\vartheta| = |\gamma|$ или $|\vartheta| = \pi - |\gamma|$. СД 1 и 2 при малых ϑ могут реализовываться лишь при специальных значениях γ , поэтому в данной работе они подробно исследоваться не будут.

Рассмотрим теперь основной, 3-й вариант СД. Ему соответствует движение волчка типа вынужденных колебаний. Согласно (3.4) векторы ϵ и τ коллинеарны, а стало быть векторы \mathbf{k} , \mathbf{n} , σ лежат в одной плоскости. В этом случае становится возможным ввести знаки для углов ϑ и χ . Сделаем это при следующих ограничениях: $|\vartheta| < \gamma < \pi/2$, $|\chi| < \pi/2$. При этом мы мало потеряем в общности, но значительно упростим рассуждения.

Итак, будем считать: $\vartheta > 0$, если векторы \mathbf{n} и σ лежат по одну сторону от \mathbf{k} , и $\vartheta < 0$, если по разные. Знаки ϑ соответствуют колебаниям системы в фазе или противофазе с вынуждающей силой (силой инерции дисбаланса). Углы χ и γ будем считать положительными. Теперь будет выполняться формула связи углов $\chi = \gamma + \vartheta$. Введем параметры

$$\epsilon = \sin \vartheta, \quad \tau = \sin \chi, \quad \alpha = \sin \gamma, \quad \eta = \cos \vartheta, \quad \mu = \cos \chi, \quad \beta = \cos \gamma \quad (3.6)$$

Параметры η , μ уже вводились ранее. Используя формулу связи углов, можно получить различные формулы связи параметров (3.6), например $\tau = \beta\epsilon + \alpha\eta$, $\mu = \beta\eta - \alpha\epsilon$. В силу параллельности векторов ϵ и τ , используя обозначения (3.6), получим скалярный аналог основного уравнения СД (3.3):

$$\theta\epsilon\eta + \theta_*\tau\mu = C\epsilon/\omega^2 \quad (3.7)$$

Выразив в (3.7) ϵ , η , τ , μ через ϑ придем к уравнению, определяющему неявную АЧХ. Выделение в явном виде зависимости ϑ от ω слишком сложно, на практике удобнее пользоваться обратной зависимостью – частоты от амплитуды

$$\omega^2 = \frac{C\epsilon}{\theta\epsilon\eta + \theta_*\tau\mu} = \frac{2C \sin \vartheta}{\theta \sin 2\vartheta + \theta_* \sin 2(\vartheta + \gamma)} \quad (3.8)$$

Если положить в (3.7) или (3.8) $\theta_* = 0$, то получим уравнение скелетной кривой. Сравнивая его с АЧХ (3.5), видно, что они совпадают. Таким образом получается следующий результат: АЧХ 1-го варианта СД представляет собой точку (при $\vartheta = \gamma$) на АЧХ 2-го варианта СД, последняя, в свою очередь, совпадает со скелетной кривой для 3-го (основного) варианта. Подобное взаимодействие различных стационарных движений, видимо, играет большую роль при формировании не малых амплитуд.

Отметим, что до сих пор все результаты были точными, предположения о малости углов не использовались. Единственное введенное выше ограничение на углы может быть легко устранено при помощи дополнительных определений, формула (3.8) при этом не изменится. Исследование АЧХ при произвольных амплитудах представляет собой чрезвычайно обширную область исследования. Поэтому в следующем параграфе ограничимся рассмотрением случая, имеющего наибольший практический интерес – случая малых (но все же нелинейных) колебаний.

3.2. Резонансная зависимость. Будем считать дисбаланс малым¹ $\theta_* \ll \theta$. Кроме того, примем, что величины γ , $\pi/2 - \gamma$, θ_3/θ , θ_{12}/θ не малы. Тогда в системе имеется 2 независимых малых параметра: инерционный – θ_*/θ и кинематический – ϵ . Выделим 2

¹ Здесь и далее, записывая $x \ll y$, будем подразумевать $|x| \ll |y|$.

случая: малые $-\varepsilon \sim \theta_*/\theta$ и большие $-\varepsilon \gg \theta_*/\theta$ амплитуды. При этом в обоих случаях все же будем считать $\varepsilon \ll 1$.

Случай малых амплитуд приводит к обычной линейной задаче. Так, уравнение (3.7) в первом приближении дает классическую зависимость

$$\varepsilon = \frac{\theta_* \alpha \beta \omega^2}{\theta(C/\theta - \omega^2)}$$

При $C/\theta > 0$ это резонансная зависимость для линейной системы с собственной частотой $\omega_p \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{C/\theta}$. При $C/\theta < 0$ резонанс в системе отсутствует.

В работе будем рассматривать 2-й случай – больших амплитуд. Он может реализовываться только в околорезонансной области, что возможно только при $C/\theta > 0$, т.е. для двух типов волчков: вытянутый с восстанавливающим моментом и сплюснутый с опрокидывающим моментом. Разложим входящие в уравнение (3.8) величины в ряд по малым параметрам и, учитывая, что $\theta\varepsilon \gg \theta_*$, сохраним первые два порядка малости

$$\omega^2 = \frac{C\varepsilon}{\theta\varepsilon\eta + \theta_*\tau\varepsilon} \approx \frac{C\varepsilon}{\theta\varepsilon(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2) + \theta_*\alpha\beta} = \frac{C}{\theta} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \theta_*\alpha\beta/(\theta\varepsilon)} \approx \frac{C}{\theta} \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{\theta_*\alpha\beta}{\theta\varepsilon} \right)$$

В результате получим соотношение

$$x = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{p}{\varepsilon}; \quad x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = \frac{\theta}{C} \omega^2, \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\theta_*\alpha\beta}{\theta} \quad (3.9)$$

Это уравнение есть частный случай (при $k = 1/2$) универсальной АЧХ:

$$x = 1 + k\varepsilon^2 - p/\varepsilon \quad (3.10)$$

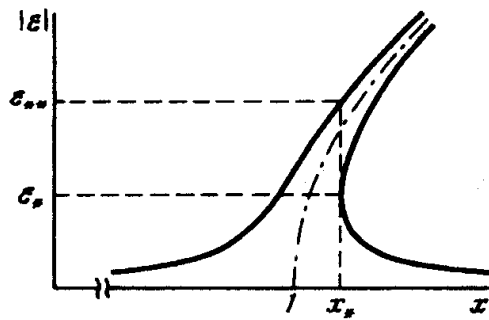
реализующейся вблизи резонанса для колебательных систем, имеющих малую кубическую нелинейность. В частности, уравнением (3.10) описывается АЧХ осциллятора Дуффинга [13]. Отметим, однако, что в рассматриваемой системе, в отличие от системы с одной степенью свободы, для получения зависимости (3.10) не требуется использование приближенных методов осреднения – в этом смысле гироскопические системы являются более удобной моделью для исследования вынужденных нелинейных колебаний.

Рассмотрим подробнее зависимость (3.10). Величину k будем называть коэффициентом нелинейности, p – коэффициентом интенсивности. Напомним, что зависимость (3.10) справедлива при $p \ll \varepsilon \ll 1$. На фиг. 3 изображена АЧХ системы – зависимость $|\varepsilon|$ (модуля амплитуды) от x (квадрата безразмерной частоты), соответствующая соотношению (3.9). Штрихпунктирной линией изображена скелетная кривая: $x = 1 + k\varepsilon^2$. АЧХ имеет две ветви, левую и правую, характеризующиеся разными знаками ε , расположенные по разные стороны от скелетной кривой и асимптотически стремящиеся к ней при росте ε . В данном случае $k > 0$ – АЧХ жесткая.

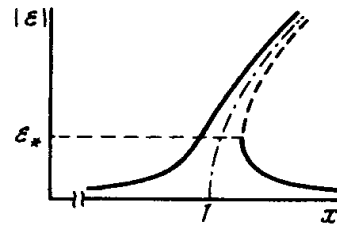
Специфической особенностью нелинейной АЧХ является наличие у зависимости $\varepsilon(x)$ точки бифуркации – в ней $d\varepsilon/dx$ обращается в бесконечность. Продифференцировав (3.10) найдем координаты точки бифуркации (ε_1, x_*) :

$$\varepsilon_1 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}p/k}, \quad \varepsilon_* \stackrel{\text{def}}{=} |\varepsilon_1|, \quad x_* = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2kp^2}$$

При $k = 1/2$ формулы упростятся $\varepsilon_1 = -p^{1/3}$, $x_* = 1 + \frac{3}{2}p^{2/3}$. При достижении системой точки бифуркации возможен скачкообразный переход на другую ветвь АЧХ с резким возрастанием амплитуды до значения ε_2 (на фиг. 3 обозначено $\varepsilon_{**} \stackrel{\text{def}}{=} |\varepsilon_2|$). Определение ε_2 , согласно (3.10), требует решения кубического уравнения $k\varepsilon_2^3 + (1 - x_*)\varepsilon_2 - p = 0$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Это уравнение удастся решить точно, если воспользоваться тем, что $x_* = x(\epsilon_1)$. Тогда оно приводится к виду $\epsilon_2^3 - 3\epsilon_1^2\epsilon_2 + 2\epsilon_1^3 = 0$, для которого несложно получить полное решение: кратный корень $\epsilon_2 = \epsilon_1$ и корень $\epsilon_2 = -2\epsilon_1$, дающий искомое значение ϵ_2 . Таким образом, приходим к замечательному результату – при перескоке на верхнюю ветвь происходит увеличение амплитуды ровно в 2 раза, независимо от значений параметров k, p . Отметим, что подобное удвоение амплитуды будет иметь место во всех системах, имеющих АЧХ (3.10), в том числе и в системе Дуффинга. Несмотря на простоту и универсальность этого факта, автору не удалось найти упоминаний о нем в литературе.

Обратимся к фиг. 3. Участок ветви АЧХ, содержащей точку бифуркации, расположенный выше этой точки, будем называть участком с обратным наклоном. Сказанное выше о возникновении переходных режимов будет строго справедливо только в том случае, если единственной неустойчивой областью на АЧХ является участок с обратным наклоном. Однако известно [1], что прямой связи между точками бифуркации и точками смены устойчивости, вообще говоря, нет. Представляется достаточно естественным, что подобная связь должна существовать при наличии двигателя, жестко задающего частоту вращения ω (а стало быть x). В случае же двигателя конечной мощности или при отсутствии двигателя этот вопрос становится более чем спорным. Предполагаемое условие устойчивости, при котором на АЧХ (3.9) неустойчивым остается участок с обратным наклоном и только он, может быть записано в виде

$$\epsilon/\epsilon_1 < 1 \Leftrightarrow \theta\epsilon^3 + \theta_*\alpha\beta > 0 \quad (3.11)$$

В следующих параграфах будут определены критерии устойчивости СД и сравним их с условием (3.11).

4. Исследования устойчивости. 4.1. Кинематические соотношения. Для исследования устойчивости СД требуется иметь полную систему уравнений движения. Уравнение (2.7), как указывалось выше, использует избыточный набор параметров: $\mathbf{n}, \sigma, \Omega; M_1, M_2$, поэтому для замыкания системы уравнений требуются дополнительные кинематические соотношения. На данном этапе удобно ввести неизбыточный, 3-параметрический набор обобщенных координат, через которые будут выражены все остальные параметры. В качестве основных обобщенных координат возьмем 2-параметрический вектор \mathbf{n} , определяющий направление оси идеального волчка, и угол φ , определяющий поворот системы вокруг этой оси.

В качестве отсчетного положения волчка выберем некоторое положение, характеризующееся вертикальным направлением оси ($\mathbf{n} = \mathbf{k}$). Для задания текущего положения воспользуемся тензором поворота \mathbf{P} , определяющим поворот волчка по отношению к отсчетному положению. Представим тензор поворота \mathbf{P} в виде композиции двух поворотов: наклона $\mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ (поворота от \mathbf{k} и \mathbf{n} вокруг оси, лежащей в горизонтальной плоскости) и собственного поворота $\mathbf{P}(\varphi\mathbf{n})$ (поворота вокруг \mathbf{n} на угол φ):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\varphi\mathbf{n}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$$

Тензор наклона является алгебраической функцией вектора \mathbf{n} :

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \mathbf{E} - \frac{1}{1 + \eta} (\mathbf{n} + \mathbf{k})(\mathbf{n} + \mathbf{k}) + 2\mathbf{n}\mathbf{k} \quad (4.1)$$

Отметим, что то же положение волчка может быть достигнуто поворотом $\mathbf{P}(\varphi\mathbf{k})$ на угол φ вокруг вертикальной оси с последующим наклоном

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{P}(\varphi\mathbf{k}) \quad (4.2)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, соответствующая тензору поворота \mathbf{P} , определяется из решения уравнения Пуассона $\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$. Используя представление (4.2) можно получить

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1 + \eta} (\mathbf{n} + \mathbf{k}) \times \dot{\mathbf{n}} + \dot{\varphi}\mathbf{n} \quad (4.3)$$

Откуда для угловой скорости собственного вращения получим

$$\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{1 + \eta} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}) + \dot{\varphi} \quad (4.4)$$

Более подробно операции с тензором поворота описаны в [11].

Отметим, что обычно под термином "угол собственного поворота" понимают один из углов Эйлера, поэтому выпишем формулы, связывающие введенные выше углы с углами Эйлера (последние, для отличия, снабжены индексом e) $\varphi = \varphi_e + \psi_e$, $|\vartheta| = \vartheta_e$. Под угловой скоростью собственного вращения обычно понимают величину $\dot{\varphi}_e$. Введенная выше величина Ω связана с ней соотношением $\Omega = \dot{\varphi}_e + \eta\dot{\psi}_e$. Величина Ω является инвариантной характеристикой движения, этим она выгодно отличается от $\dot{\varphi}_e$, которая зависит от направления орта \mathbf{k} . Кроме того, можно показать, что Ω значительно лучше отвечает интуитивному представлению о собственном вращении.

4.2. Варьирование уравнений движения. Для исследования устойчивости рассмотрим малые колебания в окрестности основного стационарного решения. Для этого проведем варьирование нелинейного уравнения динамики (2.7). Результат варьирования можно представить в следующей обобщенной форме:

$$\mathbf{A}_2 \cdot \delta\ddot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega}\mathbf{A}_1 \cdot \delta\dot{\mathbf{n}} + \omega^2 \mathbf{A}_0 \cdot \delta\mathbf{n} + \mathbf{B}_2 \cdot \delta\ddot{\boldsymbol{\sigma}} + \omega^2 \mathbf{B}_0 \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} + \omega\mathbf{C}_1 \delta\dot{\Omega} + \omega^2 \mathbf{C}_0 \delta\Omega - \delta\mathbf{M}_d = 0 \quad (4.5)$$

Здесь δ – символ вариации; $\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s$ – тензорные коэффициенты при вариациях. Входящие в коэффициенты величины полагаются удовлетворяющими уравнениям СД, что приводит к их значительному упрощению. Полученные коэффициенты зависят от времени: входящие в них векторы вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}$. Чтобы получить уравнения с постоянными коэффициентами введем относительную безразмерную производную ($\dot{}$):

$$\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}' + \mathbf{k} \times \mathbf{a}), \quad \dot{b} = \omega b'$$

Вариации $\delta\boldsymbol{\sigma}$, $\delta\Omega$, $\delta\mathbf{M}_d$ выразим через вариации основных обобщенных координат $\delta\mathbf{n}$, $\delta\varphi$. Выражение для $\delta\Omega$ находится непосредственно варьированием (4.4). При нахождении вариации $\delta\mathbf{M}_d$ будем считать, что величина момента двигателя является функцией $\dot{\varphi}$: $M_d = M(\dot{\varphi})$ (отметим, что для СД выполняется $\dot{\varphi} = \omega$). Для нахождения $\delta\boldsymbol{\sigma}$ удобно использовать аналогию между варьированием и дифференцированием. Так, вариация орта $\boldsymbol{\sigma}$ может быть получена в виде $\delta\boldsymbol{\sigma} = \delta\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\sigma}$, где вектор $\delta\boldsymbol{\xi}$ служит при варьировании аналогом угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{P}$, что позволяет для него использовать формулу, аналогичную (4.3):

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{1 + \eta} (\mathbf{n} + \mathbf{k}) \times \delta\mathbf{n} + \mathbf{n}\delta\varphi$$

В результате, после проведения указанных преобразований и подстановок, уравнение (4.5) примет вид

$$a_2 \cdot \delta n'' + a_1 \cdot \delta n' + a_0 \delta n + c_2 \delta \varphi'' + c_1 \delta \varphi' + c_0 \delta \varphi = 0 \quad (4.6)$$

где коэффициенты a_s, c_s связаны с A_s, B_s, C_s линейными соотношениями. Для получения системы дифференциальных уравнений возмущенного движения в стандартном виде соберем все неизвестные в один 3-х параметрический вектор $\delta \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \delta \epsilon + k \delta \varphi$ (ϵ – горизонтальная составляющая n). Вариации δn и $\delta \varphi$ могут быть выражены через $\delta \zeta$ по формулам $\delta n = (E - kn/\eta) \delta \zeta$, $\delta \varphi = k \cdot \delta \zeta$. Подставив эти выражения в (4.6), получим

$$p_2 \cdot \delta \zeta'' + p_1 \cdot \delta \zeta' + p_0 \cdot \delta \zeta = 0 \quad (4.7)$$

где p_s связаны с a_s, c_s линейными зависимостями.

Соотношение (4.7) и представляет собой искомую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными (для относительной производной) коэффициентами. Подставив в систему решение в виде $\zeta = \zeta_0 e^{\lambda t}$ (t – безразмерное время), получим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0)$$

Следуя изложенной методике можно получить цепочку формул, определяющих $\Delta(\lambda)$ через коэффициенты A_s, B_s, C_s . Практическое осуществление алгоритма достаточно сложно из-за громоздкости коэффициентов, однако рекуррентный характер формул делает их удобными при использовании компьютера. При решении данной задачи использовалась компьютерная система аналитических вычислений REDUCE [14], для проведения расчетов была написана специальная библиотека подпрограмм, позволяющих осуществлять тензорно-векторные операции в символьном виде. Приведем, наконец, окончательную формулу для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} (\theta + \theta_* + \theta_3) \lambda^2 + \theta \epsilon^2 + \theta_* \left(\frac{\alpha \mu}{\epsilon} + \tau^2 \right) - \left(2\theta \eta + 2\theta_* \mu \frac{\tau - \alpha}{\epsilon} + \theta_3 \right) \lambda & & \\ (2\theta \eta^2 + 2\theta_* \mu^2 + \theta_3) \lambda & \left(\theta \eta + \theta_* \mu \frac{\tau - \alpha}{\epsilon} + \theta_3 \right) \lambda^2 + \theta_* \frac{\alpha \mu}{\epsilon} & \\ 2(\theta \epsilon \eta + \theta_* \tau \mu) \lambda & \left(\theta \epsilon + \theta_* \tau \frac{\tau - \alpha}{\epsilon} + \theta_3 \frac{1 - \eta}{\epsilon} \right) \lambda^2 & \\ (-2\theta_* \alpha \mu + \theta_3 \epsilon) \lambda & & \\ (\theta_* \alpha \mu - \theta_3 \epsilon) \lambda^2 + \frac{M'_2}{\omega} \epsilon \lambda - \theta_* \alpha \mu & & \\ (\theta_* \alpha \tau + \theta_3 \eta) \lambda^2 - \left(\frac{M'_1}{\omega} + \frac{M'_2}{\omega} \eta \right) \lambda & & \end{vmatrix}$$

Определитель записан с точностью до постоянного множителя, штрихом обозначена производная по ω . Отметим, что определитель получен в максимально общей постановке – для не малых амплитуд и дисбалансов при двигателе произвольной мощности. Однако, исследование характеристического определителя оказывается, вообще говоря, задачей значительно более сложной, чем его получение. В общей постановке здесь добиться аналитических результатов вряд ли возможно. Но зато полученное

выражение для характеристического определителя позволяет исследовать множество интересных частных случаев, к рассмотрению одного из которых мы сейчас и перейдем.

4.3. Условия устойчивости. Рассмотрим характеристический определитель в двух предельных случаях: двигатель бесконечной мощности и отсутствие двигателя.

Эти случаи являются консервативными, поэтому результаты, полученные на основании исследования возмущенных уравнений первого приближения, дают, вообще говоря, лишь необходимые условия устойчивости (по Ляпунову). Для получения достаточных условий есть два пути. Во-первых, можно пытаться их получить, оставаясь в рамках консервативной модели, рассматривая более точные уравнения возмущенного движения. Однако результаты, полученные таким способом, все равно будут структурно неустойчивы – они могут разрушиться при добавлении малых неконсервативных возмущений. Во-вторых, можно ввести в систему малую диссипацию, что позволит ограничиться уравнениями первого приближения. Однако любой диссипативный фактор внесет в систему специфические для него эффекты, которые могут помешать выделить свойства, характерные для основной (консервативной) системы. Таким образом, именно исследование устойчивости консервативной системы по уравнениям первого приближения позволяет выделить основные тенденции, характерные собственно для консервативной системы.

Введем обозначение $L \stackrel{\text{def}}{=} M'_d(\omega)$ – параметр, характеризующий мощность двигателя. Будем рассматривать предельные значения: $L = \infty$ (двигатель бесконечной мощности) и $L = 0$ (отсутствие двигателя). В этих случаях определение характеристического показателя λ сводится к решению биквадратного уравнения. Под условием устойчивости будем понимать равенство нулю вещественной части λ . Используем введенные в параграфе 3.2 малые параметры. При малых амплитудах ($\epsilon \sim \theta_*/\theta$) условия устойчивости носят тривиальный характер, при больших ($\epsilon \gg \theta_*/\theta$) они приводят к следующим неравенствам

$$L = \infty: \quad \theta\epsilon^3 + \theta_*\alpha\beta > 0$$

$$L = 0 \quad \theta(4\theta + \theta_3)\epsilon^3 + \theta_3\theta_*\alpha\beta > 0$$

Отметим, что эти условия справедливы как для мертвого, так и для следящего моментов двигателя.

Сравним полученные условия устойчивости с предполагаемыми на основании формы АЧХ – формула (3.11). Для $L = \infty$ условия совпадают, критическим значением модуля амплитуды является ϵ_* . Таким образом, в этом случае АЧХ прекрасно описывает движение, см. фиг. 4 (пунктиром обозначена неустойчивая область). Однако для $L = 0$ условия различаются, в качестве критического значения $|\epsilon|$ выступает

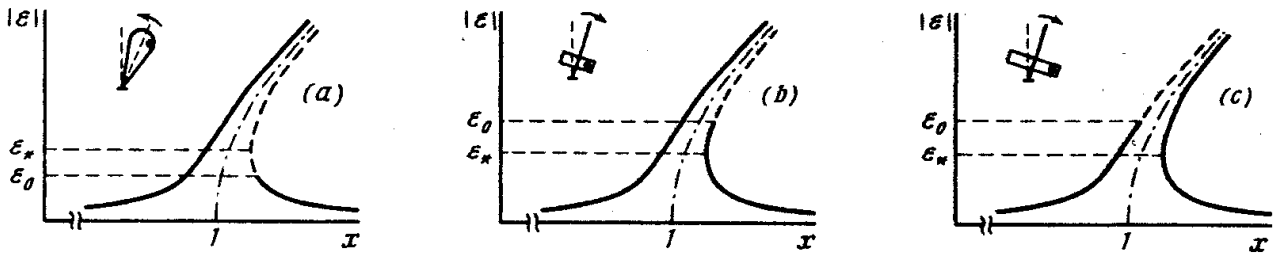
$$\epsilon_0 = \sqrt[3]{\frac{\theta_3}{|4\theta_{12} - 3\theta_3|} \epsilon_*}$$

Рассмотрим отдельно 3 варианта значений θ_3, θ_{12} .

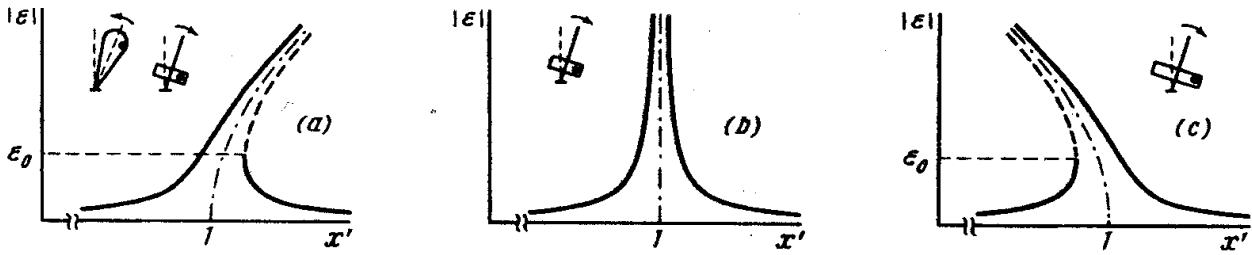
1. $\theta_3 < \theta_{12}$ ($C > 0$): вытянутый волчок с восстанавливающим моментом. Тогда $\epsilon_0 < \epsilon_*$, область устойчивости изображена на фиг. 5,а. Результат сходен с предполагаемым, однако неустойчивость начинается раньше.

2. $\theta_{12} < \theta_3 < \frac{4}{3}\theta_{12}$ ($C < 0$): не слишком сплюснутый волчок при опрокидывающем моменте. Теперь $\epsilon_0 > \epsilon_*$ – неустойчивость, наоборот, начинается позднее – фиг. 5,в.

3. $\frac{4}{3}\theta_{12} < \theta_3 < 2\theta_{12}$ ($C < 0$): очень сплюснутый волчок при опрокидывающем моменте. Здесь $\epsilon_0 > \epsilon_*$, однако неустойчивость возникает уже не в резонансной, а в дорезонансной зоне – фиг. 5,с. Следовательно, здесь результаты с предполагаемыми не согласуются даже приблизительно.



Фиг. 5



Фиг. 6

Итак, подведем итоги. Для двигателя бесконечной мощности область устойчивости совпадает с предсказанной на основании АЧХ. При отсутствии двигателя возникают различия, особенно сильно они проявляются при $\theta_3 > \frac{4}{3}\theta_{12}$, вступая в прямое противоречие с формой АЧХ. Подобные эффекты ранее обнаружены в задаче о плоскопараллельном движении твердого тела: в [1] показано, что при отсутствии двигателя область неустойчивости начинается ниже точки бифуркации, что в рассматриваемой задаче соответствует случаю, изображенному на фиг. 5,а. Случаи же фиг. 5,б,с могут реализовываться только при пространственном движении: поскольку им соответствует опрокидывающий момент, то для поддержания перманентного вращения необходима гироскопическая стабилизация.

Рассмотрим подробнее $L = 0$. Возникающим в этом случае расхождениям можно дать следующее объяснение. При отсутствии жесткого задания частоты ω исчезает ее приоритет перед другими возможными вариантами аргумента в АЧХ. Например, вместо ω вполне можно использовать Ω – частоту собственного вращения, вид АЧХ при этом сильно изменится. Оказывается, что можно подобрать некоторую модифицированную частоту, мало отличающуюся от ω , так что соответствующая ей АЧХ будет прекрасно согласовываться с условием устойчивости. Введем

$$\omega' \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{\theta_{12} - \theta_3}{\theta_3} \varepsilon^2 \right) \omega$$

АЧХ, соответствующая ω' , (будем называть ее модифицированной) отличается значением коэффициента нелинейности $k' = (4\theta_{12} - 3\theta_3) / (2\theta_3)$.

На фиг. 6, а–с представлены модифицированные АЧХ соответственно для $\theta_3 < \frac{4}{3}\theta_{12}$, $\theta_3 = \frac{4}{3}\theta_{12}$, $\theta_3 > \frac{4}{3}\theta_{12}$. Пунктиром обозначена неустойчивая область, она находится в полном согласии с формой АЧХ. Из рисунков видно, что АЧХ может быть, как жесткой, так и мягкой. Таким образом, понятие жесткости и мягкости имеет смысл вводить только после исследования устойчивости. Особый интерес представляет $\theta_3 = \frac{4}{3}\theta_{12}$. В этом случае нелинейность в АЧХ пропадает, а область устойчивости распространяется на все частоты – фиг. 6,в. Приведем предельные значения модифицированных параметров для особых типов волчков: $\theta_3 \rightarrow 0$ (бесконечно вытянутый волчок), $k' \rightarrow +\infty$; $\theta_3 = \theta_{12}$ (шаровой тензор инерции), $k' = \frac{1}{2}$, $\omega' = \omega$; $\theta_3 = 2\theta_{12}$ (бесконечно сплюснутый волчок), $k' = -\frac{1}{2}$, $\omega' = \Omega + o(\varepsilon^2)$.

: В случае $\theta_3 \rightarrow 0$ система становится существенно нелинейной.

Автор благодарен П.А. Жилину за внимание к работе и полезные обсуждения и В.А. Пальмову, ценные критические замечания которого были учтены при написании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Об устойчивости стационарных движений плоского тела в поле центральной силы // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 71–76.
 2. Агафонов С.А., Слынько Л.Е. Об устойчивости стационарного движения плоского твердого тела под действием центральной силы // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 25–29.
 3. Меркин Д.Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 378–384.
 4. Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 51–56.
 5. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение. Т. 1. М.: Иностран. лит. 1952. 352 с.
 6. Кривцов А.М. Математические модели для расчета динамики лабораторных центрифуг // Труды СПбГТУ. 1993. № 446. С. 187–190.
 7. Кривцов А.М. Стационарное движение несбалансированного ротора центрифуги в околорезонансных областях // Труды СПбГТУ. 1993. № 446. С. 190–193.
 8. Журавлев В.Ф. Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.
 9. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Пб.: Издание СПбГТУ. 1992. 86 с.
 10. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 508 с.
 11. Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Тр. СПбГТУ. 1992. № 443. С. 100–121.
 12. Панов А.П. Об операторных кинематических уравнениях вращения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 44–50.
 13. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ. 1961. 777 с.
 14. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 214 с.
- С.-Петербург

Поступила в редакцию
4.VII.1994