

УДК 531.38

© 2000 г. А.М. КРИВЦОВ

## ВЛИЯНИЕ ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

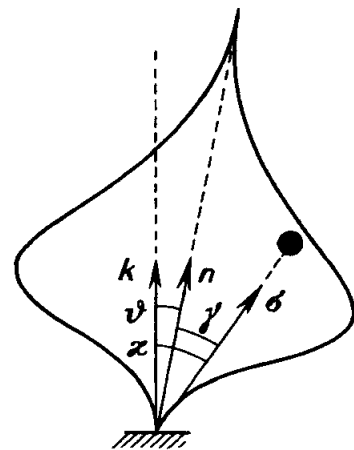
Рассматриваются стационарные движения несимметричного волчка (неуравновешенного ротора), имеющего неподвижную точку и находящегося под действием упругого и вращающего моментов. Исследуется влияние диссипации, вносимой двигателем ограниченной мощности на устойчивость консервативной системы (характеризующейся двигателем бесконечной мощности или отсутствием двигателя).

Показано, что двигатель ограниченной мощности оказывает сильное дестабилизирующее воздействие, проявляющееся уже при малых амплитудах. Рассматриваются мертвый и следящий вращающие моменты, показано, что мертвый момент оказывает более сильное дестабилизирующее воздействие. Получены относительно простые аналитические формулы, задающие границы областей устойчивости на плоскости параметров. Предлагаются специальные критерии устойчивости для полинома 5-й степени.

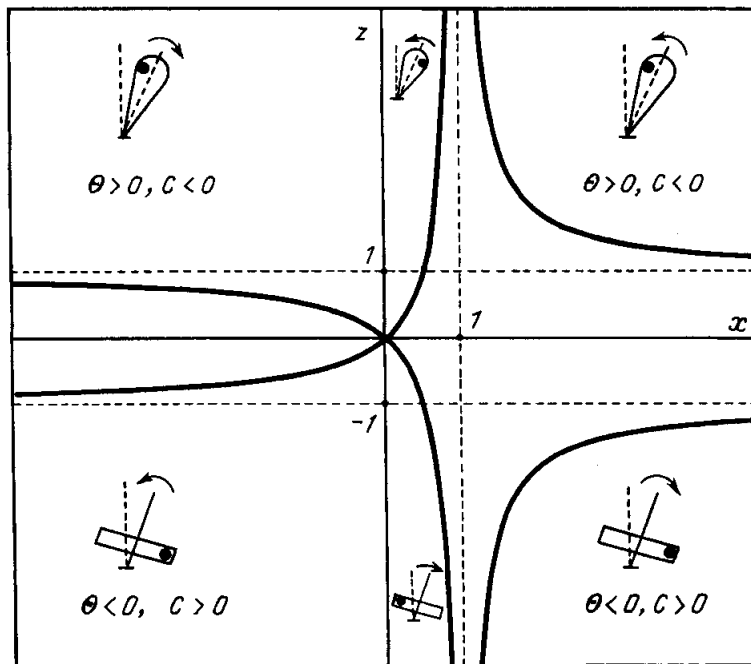
Показано, что при определенных значениях параметров ротора возможно устойчивое стационарное движение, не имеющее резонанса. Проводится сравнение с задачей о плоскопараллельном движении неуравновешенного ротора.

**1. Введение.** Задача о плоскопараллельном движении неуравновешенного жесткого ротора в нелинейных упругих подшипниках исследовалась многими авторами (см. библиографию в [1]). В данной работе рассматривается родственная задача о сферическом движении неуравновешенного жесткого ротора (несимметричного волчка), находящегося под действием упругого и вращающего моментов, фиг. 1. Коротко остановимся на сравнении этих двух задач, называя их соответственно задачами о плоскопараллельном и сферическом движении. Обе задачи посвящены исследованию систем с тремя степенями свободы, однако последняя задача требует более громоздких выкладок в связи с принципиальной сложностью сферического движения. Нелинейные свойства амплитудно-частотной характеристики стационарного движения при плоскопараллельном движении связаны исключительно с нелинейностью упругой силы, в то время как при сферическом движении они сохраняются при любом виде упругого момента и в значительной степени определяются инерционными слагаемыми уравнений движения. В задаче о сферическом движении значительно большую роль играют гироскопические эффекты, что приводит в частности к таким явлениям, невозможным при плоскопараллельном движении, как устойчивость движения при опрокидывающем упругом моменте и отсутствие резонанса при значительной сплюснутости ротора.

Однако наряду с этими различиями обе задачи имеют



Фиг. 1



Фиг. 2

много общего. В обеих системах возникают сходные стационарные движения, вызванные неуровновешенностью ротора, во многом аналогичны упругие и диссипативные силы, действующие в этих системах. В [2, 3] было показано, что при плоскопараллельном движении двигатель ограниченной мощности приводит к существенному сужению областей устойчивости стационарных движений. В предлагаемой работе проводится исследование этого эффекта на задаче о сферическом движении.

Данная статья является продолжением работы [4], в которой рассматривалась задача о сферическом движении в двух консервативных случаях: отсутствие вращающего момента (момента двигателя) и вращающий момент бесконечной мощности. Более общий случай, исследуемый в данной работе – вращающий момент ограниченной мощности – является неконсервативным.

В работе будут использоваться следующие сокращения: СД – стационарное движение, АЧХ – амплитудно-частотная характеристика.

**2. Обозначения.** Рассматриваемая система представляет собой осесимметричное твердое тело, имеющее неподвижную точку опоры (симметричный волчок), к которому жестко прикреплена точечная, вообще говоря не малая, масса (дисбаланс) – фиг. 1.

Введем основные обозначения (более подробно это сделано в [4]). Вертикаль, ось волчка и направление на дисбаланс задаются ортами  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ; углы между этими направлениями:  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\chi$  – фиг. 1. Разложения  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  на вертикальную и горизонтальную составляющие:  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\epsilon} + \eta\mathbf{k}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \mu\mathbf{k}$ ;  $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ .

Обозначения для синусов и косинусов углов  $\gamma$ ,  $\vartheta$ ,  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sin \vartheta, & \tau &= \sin \chi, & \alpha &= \sin \gamma \\ \eta &= \cos \vartheta, & \mu &= \cos \chi, & \beta &= \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.1)$$

Угол поворота волчка вокруг собственной оси  $\phi$ . Угловая скорость собственного вращения  $\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}$  (однако  $\Omega \neq \dot{\phi}$ ).

Волчок находится под воздействием внешнего упругого момента:  $\mathbf{M}_c = C\mathbf{n} \times \mathbf{k}$ , причем жесткость  $C$  может быть как положительной (восстанавливающий момент), так и отрицательной (опрокидывающий момент). На волчок действует момент двига-

теля  $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{k} + M_2 \mathbf{n}$ . Будут рассматриваться два случая:  $M_1 = M(\dot{\phi})$ ,  $M_2 = 0$  – мертвый момент,  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = M(\dot{\phi})$  – следующий момент.

Моменты инерции симметричного волчка:  $\theta_{12}$  – экваториальный,  $\theta_3$  – осевой ( $\theta_3 < 2\theta_{12}$ ),  $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{12} - \theta_3$  – гироскопический. Момент инерции дисбаланса относительно неподвижной точки:  $\theta_*$ . Будем считать дисбаланс малым  $\theta_* \ll \theta$  (здесь и далее под записью вида  $x \ll y$  подразумевается  $|x| \ll |y|$ ). Кроме того будем считать, что величины  $\gamma$ ,  $\pi/2 - \gamma$ ,  $\theta_3/\theta$ ,  $\theta_{12}/\theta$  не малы.

Будем разделять общий нелинейный случай и малые (но не обязательно линейные) колебания, характеризующиеся наличием 2-х независимых малых параметров: инерционного –  $\theta_*/\theta$  (относительная величина дисбаланса) и кинематического –  $\varepsilon$  (амплитуда колебаний). Для малых колебаний возможны 3 варианта: очень малые  $\varepsilon \ll \theta_*/\theta$ , малые  $\varepsilon \sim \theta_*/\theta$  и большие  $\varepsilon \gg \theta_*/\theta$  амплитуды.

**3. Стационарное движение.** В [4] получены уравнения СД (стационарных движений), представляющих собой перманентные вращения вокруг вертикальной оси. Основное СД имеет вид вынужденных колебаний. Для него орты  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  лежат в одной плоскости, а углы связаны соотношением

$$\chi = \gamma + \vartheta \quad (3.1)$$

(при этом считается  $|\vartheta| < \gamma < \pi/2$ ,  $0 < \chi < \pi/2$ ; если  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  лежат по одну сторону от  $\mathbf{k}$ , то  $\vartheta > 0$ , в противном случае  $\vartheta < 0$ ).

АЧХ основного СД описывается алгебраическим уравнением

$$\theta \varepsilon \eta + \theta_* \tau \mu = \frac{C}{\omega^2} \varepsilon \quad (3.2)$$

Здесь  $\omega$  – угловая скорость (частота) прецессии. Кроме того для СД выполняется

$$\dot{\mathbf{n}} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{n}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \omega \mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}, \quad \dot{\eta} = 0, \quad \dot{\phi} = \omega, \quad \dot{\Omega} = \omega \eta, \quad \dot{\omega} = 0$$

В дальнейшем будем преимущественно интересоваться случаем малых амплитуд:  $\varepsilon \sim \theta_*/\theta \ll 1$  ( $\alpha, \beta \sim 1$ ), поэтому рассмотрим подробнее СД для  $\varepsilon \ll 1$ . В первом приближении уравнение (3.2) примет вид

$$\theta \varepsilon + \theta_* \alpha \beta = \frac{C}{\omega^2} \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\theta_* \alpha \beta}{\theta} \frac{\omega^2}{C/\theta - \omega^2} \quad (3.3)$$

При  $C\theta > 0$  полученное выражение для  $\varepsilon$  (3.3) имеет вид АЧХ вынужденных колебаний в линейной системе с одной степенью свободы, резонансная частота  $\omega_p \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{C/\theta}$ . При  $C\theta < 0$  резонанс в системе отсутствует. При больших частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ ), согласно (3.3), сохраняется остаточная амплитуда  $\varepsilon = -p$ , где

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \theta_* \alpha \beta / \theta \quad (3.4)$$

Для наглядного представления АЧХ удобно ввести безразмерные параметры:

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\varepsilon|}{p}, \quad x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega^2}{\omega_p^2} = \frac{\theta}{C} \omega^2. \quad (3.5)$$

Тогда уравнение (3.3) примет вид  $z = \pm x/(1-x)$ ,  $\pm 1 = \text{sign } \varepsilon$ . График АЧХ представлен на фиг. 2. Каждому квадранту на плоскости  $xz$  соответствует различный тип системы, отличающийся формой волчка (вытянутый или сплюснутый) и направлением упругого момента (восстанавливающий или опрокидывающий). Для наглядности в каждом квадранте представлены схематические изображения волчков, характеризующие эти различия, а также расположение дисбаланса относительно оси симметрии.

Для реальных механизмов (например центрифуг [5]) обычно  $\theta > 0$ ,  $C > 0$  – 1-й квадрант на фиг. 2 – система имеет резонанс. Из графика видно, что существуют две возможности изменением параметров системы полностью избавиться от резонанса. Во-первых, сделав ротор аппарата достаточно сплюснутым, можно добиться, чтобы гироскопический момент инерции стал меньше нуля – 3-й квадрант:  $\theta < 0$ ,  $C > 0$ . Во-вторых, можно сделать упругий момент опрокидывающим – 2-й квадрант:  $\theta > 0$ ,  $C < 0$ . Второй вариант кажется менее реальным, но, возможно, он может быть осуществлен посредством скачкообразного изменения знака  $C$  после достижения достаточно высокой угловой скорости  $\omega$ . Эти способы подавления резонанса весьма интересны, однако они требуют серьезных исследований, прежде всего проверки устойчивости соответствующих СД.

**4. Общие критерии устойчивости.** В [4] был получен характеристический определитель  $\Delta(\lambda)$  уравнений возмущенного движения вблизи стационарного движения системы

$$\begin{vmatrix} (\theta + \theta_* + \theta_3)\lambda^2 + \theta\varepsilon^2 + \theta_*\left(\frac{\alpha\mu}{\varepsilon} + \tau^2\right) & -\left(2\theta\eta + 2\theta_*\mu\frac{\tau-\alpha}{\varepsilon} + \theta_3\right)\lambda & (-2\theta_*\alpha\mu + \theta_3\varepsilon)\lambda \\ (2\theta\eta^2 + 2\theta_*\mu^2 + \theta_3)\lambda & \left(\theta\eta + \theta_*\mu\frac{\tau-\alpha}{\varepsilon} + \theta_3\right)\lambda^2 + \theta_*\frac{\alpha\mu}{\varepsilon} & (\theta_*\alpha\mu - \theta_3\varepsilon)\lambda^2 + \frac{M'_2}{\omega}\varepsilon\lambda - \theta_*\alpha\mu \\ 2(\theta\varepsilon\eta + \theta_*\tau\mu)\lambda & \left(\theta\varepsilon + \theta_*\tau\frac{\tau-\alpha}{\varepsilon} + \theta_3\frac{1-\eta}{\varepsilon}\right)\lambda^2 & (\theta_*\alpha\tau + \theta_3\eta)\lambda^2 - \left(\frac{M'_1}{\omega} + \frac{M'_2}{\omega}\eta\right)\lambda \end{vmatrix}$$

Запишем определитель в следующей форме:

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\theta_3\lambda} \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}\lambda^2 + C_{11} & B_{12}\lambda & B_{13}\lambda \\ B_{21}\lambda & A_{22}\lambda^2 + C_{22} & A_{23}\lambda^2 + B_{23}\lambda + C_{23} \\ B_{31} & A_{32}\lambda & A_{33}\lambda + B_{33} \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

Вынесенный тривиальный множитель  $\lambda$  характеризует безразличие системы к повороту вокруг  $k$ . Согласно формуле для  $\Delta(\lambda)$  только коэффициенты  $B_{23}$  и  $B_{33}$  зависят от  $L \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{d\omega}M(\omega)$  – параметра, определяющего мощность двигателя. Тогда характеристический полином  $f(\lambda)$  может быть представлен в виде

$$f(\lambda) = \lambda a(\lambda^2) + \kappa b(\lambda^2) \quad (4.2)$$

где  $\kappa$  – коэффициент, пропорциональный  $L$ ;  $a(\lambda^2)$ ,  $b(\lambda^2)$  – биквадратные полиномы  $\lambda$ , не зависящие от  $L$ . Из сказанного следует, что мощность двигателя не входит в условия устойчивости, а лишь разбивает задачу на 3 подзадачи:  $L = \infty$ ,  $L = 0$ ,  $0 < L < \infty$ . Первые два случая – двигатель бесконечной мощности и отсутствие двигателя, приводят к консервативным задачам. Согласно (4.2), им будут соответствовать биквадратные характеристические полиномы

$$b(\lambda^2) = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0, \quad a(\lambda^2) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

В третьем (общем) случае задача неконсервативна, и ей будет соответствовать суммарный характеристический полином 5-й степени (4.2). Таким образом, общий случай является как бы суперпозицией двух консервативных задач.

Для консервативных задач устойчивость по 1-му приближению (т.е. определенная на основании линейных уравнений возмущенного движения), вообще говоря, не является достаточной, однако здесь мы не будем касаться этих вопросов (они обсуждались в [4]), и далее везде под устойчивостью будем понимать именно устойчивость по 1-му приближению.

В консервативных случаях условия устойчивости имеют вид

$$L = \infty, \quad b_2 > 0; \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0, \quad D_b > 0 \quad (4.3)$$

$$L = 0, \quad a_2 > 0; \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0, \quad D_a > 0$$

Здесь  $D_b, D_a$  – определители соответствующих квадратных полиномов

$$D_b \stackrel{\text{def}}{=} b_1^2 - 4b_0b_2, \quad D_a \stackrel{\text{def}}{=} a_1^2 - 4a_0a_2$$

В неконсервативном случае для получения условий устойчивости можно воспользоваться известным критерием Рауса – Гурвица. Более удобен, однако, критерий Лъенара – Шипара [6], позволяющий заменить часть из сложных неравенств для миноров матрицы Гурвица на неравенства для коэффициентов полинома. На основании критерия Лъенара – Шипара автором был разработан следующий критерий для полиномов 5-й степени. Введем коэффициенты

$$D_{kn} \stackrel{\text{def}}{=} b_k a_n - b_n a_k \quad (k, n = 2, 1, 0); \quad D \stackrel{\text{def}}{=} D_{21} D_{10} - D_{20}^2 \quad (4.4)$$

Тогда для полинома (4.2) при  $\kappa > 0, a_2 > 0$  справедлив следующий критерий устойчивости:

$$b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0; \quad D_{kn} > 0 \quad (k > n); \quad D > 0 \quad (4.5)$$

Причем из трех условий  $D_{kn} > 0 \quad (k > n)$  достаточно любого одного (это позволяет выбрать из них наиболее простое, в данной задаче им оказывается  $D_{20} > 0$ ).

Кроме того можно показать, что условия  $a_k > 0; D_b > 0, D_a > 0$  являются необходимыми условиями устойчивости (4.2). Из последнего утверждения следует важный вывод: условия (4.3) являются следствием (4.5), а значит области устойчивости для консервативных случаев совпадают или шире, чем для неконсервативного случая. Таким образом, двигатель ограниченной мощности либо не меняет существующие области устойчивости консервативной системы, либо приводит к их сужению – т.е. оказывает, в целом дестабилизирующее воздействие.

При наличии в системе малых параметров часто оказывается, что значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  близки. Тогда удобнее пользоваться альтернативными формулами для  $D_{kn}$ :

$$D_{kn} = b_k \alpha_n - b_n \alpha_k, \quad \alpha_k \stackrel{\text{def}}{=} a_k - b_k \quad (4.6)$$

Близость  $a_k$  и  $b_k$  приводит к тому, что многие результаты для консервативных случаев  $L = \infty$  и  $L = 0$  оказываются одинаковыми.

**5. К получению конкретных условий устойчивости.** Исследование характеристического определителя в общей постановке представляет собой задачу значительно более сложную, чем его получение. Действительно, запись коэффициента  $D$  только через коэффициенты  $A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}$  приводит к выражению, содержащему более 60 слагаемых 9-й степени. Основной проблемой, вряд ли разрешимой в общем случае, становится наглядное представление результатов. Потому далее мы перейдем к рассмотрению частного случая, имеющего большое прикладное значение – случая малых колебаний  $\varepsilon \ll 1, \theta_* / \theta \ll 1$ .

Введем безразмерные параметры

$$q = \frac{\theta}{\theta_3}, \quad \delta = \frac{\theta_* \alpha \beta}{\theta_3}, \quad g = \frac{C}{\theta_3 \omega^2}, \quad l_1 = -\frac{M'_1}{\theta_3 \omega}, \quad l_2 = -\frac{M'_2}{\theta_3 \omega} \quad (5.1)$$

Тогда определитель  $f(\lambda)$  в 1-м приближении по независимым малым параметрам  $\varepsilon, \delta$  примет вид

$$f_0(\lambda) = \begin{vmatrix} (q+1)\lambda^2 + \delta/\varepsilon + q\varepsilon^2 & -(2q+1)\lambda & (\varepsilon - 2\delta)\lambda \\ (2q+1)\lambda & (q+1)\lambda^2 + \delta/\varepsilon & (-\varepsilon + \delta)\lambda^2 - l_2\varepsilon\lambda - \delta \\ 2(q\varepsilon + \delta) & ((q + 1/2)\varepsilon + \delta)\lambda & \lambda + (l_1 + l_2) \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Можно показать, что использование характеристического определителя в 1-ом приближении достаточно для получения условий устойчивости. Для этого, при расчете коэффициентов (4.4) требуется постоянно контролировать асимптотический порядок главных членов, с тем, чтобы не допустить их тождественного сокращения. Определитель  $f_0(\lambda)$ , кроме того, что он значительно проще  $f(\lambda)$ , замечателен еще тем, что он содержит всего 3 существенных параметра:  $q, \delta, \varepsilon$ .

Как упоминалось выше, возможны 3 принципиально различных случая: очень малые –  $\varepsilon \ll \delta$ , малые –  $\varepsilon \sim \delta$  и большие –  $\varepsilon \gg \delta$  амплитуды.

Очень малые амплитуды возникают при низких частотах, в самом начале АЧХ (см. фиг. 2, окрестности точки  $x = 0, z = 0$ ). Несмотря на кажущуюся простоту этого случая, он оказывается чрезвычайно сложным из-за сокращения главных членов для ряда коэффициентов, определяющих устойчивость. Подробный анализ, проведенный с применением символьных вычислений на компьютере, показал, что все же удастся ограничиться приближением  $f_0(\lambda)$  для характеристического определителя, а условия устойчивости тривиальны – СД устойчиво при  $C > 0$  (восстанавливающий момент) и неустойчиво при  $C < 0$  (опрокидывающий момент).

Случай малых амплитуд, как уже отмечалось, является аналогом задачи в линейной постановке и охватывает практически все частоты кроме очень низких и резонансных (если резонанс имеется). Условия устойчивости здесь оказались весьма нетривиальными, речь о них пойдет в следующем параграфе. Замечательная особенность малых амплитуд заключается в том, что условия устойчивости оказываются 2-х параметрическими. Это позволяет дать наглядную интерпретацию результатов на плоскости параметров.

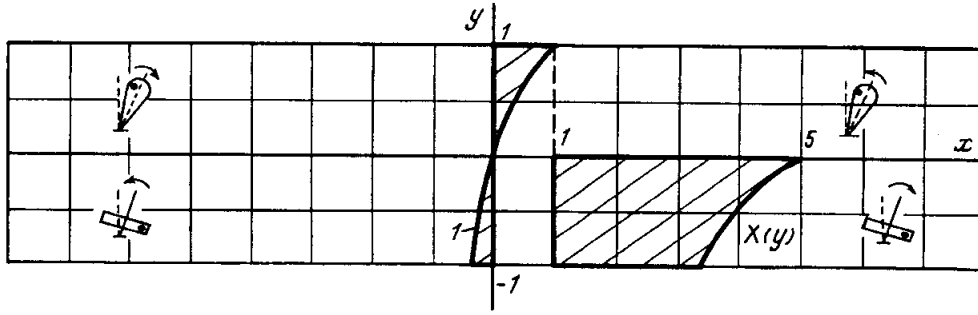
Большие амплитуды реализуются при околорезонансных частотах, что возможно только при  $C\theta > 0$ , т.е. для двух типов волчков: вытянутый с восстанавливающим моментом и сплюснутый с опрокидывающим моментом. В этом случае условия устойчивости остаются 3-х параметрическими, однако они значительно проще, чем для малых амплитуд, поэтому не возникает проблем с представлением результатов. Подробно большие амплитуды для консервативных случаев были рассмотрены в [4]. Наличие двигателя ограниченной мощности приводит к исчезновению ряда устойчивых областей.

**6. Малые амплитуды.** Так как при малых амплитудах  $\varepsilon \sim \delta$ , то фактически имеется только один малый параметр. Введем  $d \stackrel{\text{def}}{=} \delta/\varepsilon \sim 1$ .

Из (5.2) для малых амплитуд получаем  $a_k \sim b_k \sim 1$ ,  $\alpha_k = a_k - b_k \sim \varepsilon^2$ , т.е. в обоих консервативных случаях условия устойчивости оказываются одинаковыми. В первом приближении значения коэффициентов, определяющих устойчивость консервативных случаев, могут быть получены из (5.2) в ходе относительно несложных выкладок

$$\begin{aligned} b_2 &\approx (q+1)^2, & b_1 &\approx 2(q+1)d + (2q+1)^2, & b_0 &\approx d^2 \\ D_b &\approx (2q+1)^2(4(q+1)d + (2q+1)^2) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Формулы (6.1) одинаковы для мертвого и следящего моментов, следовательно и условия устойчивости для консервативных случаев не зависят от направления момента двигателя. Легко видеть, что согласно (6.1) условие  $b_1 > 0$  является следствием  $D_b > 0$ , и, таким образом, условия устойчивости для консервативных случаев сводят-



Фиг. 3

ся к требованию  $D_b > 0$ , которое в естественных обозначениях принимает совсем простой вид

$$\omega^2 > -4(\theta_{12}C/\theta_3^2) \quad (6.2)$$

и является известным условием устойчивости вертикальных вращений симметричного волчка.

Перейдем теперь к неконсервативному случаю. Для этого необходимо вычислить коэффициенты  $D_{kn}$ ,  $D$ . Однако, это уже требует очень громоздких вычислений, которые были проведены при помощи компьютерной программы, написанной на языке символьных вычислений REDUCE [7].

Рассмотрим сначала случай мертвого момента двигателя. Для него были получены следующие формулы (из коэффициентов  $D_{kn}$  выбран  $D_{20}$ , как наиболее простой)

$$D_{20} \approx -\frac{1}{2}gd(g-d+1)((6g-1)d-8g(g+1))\epsilon^2 \quad (6.3)$$

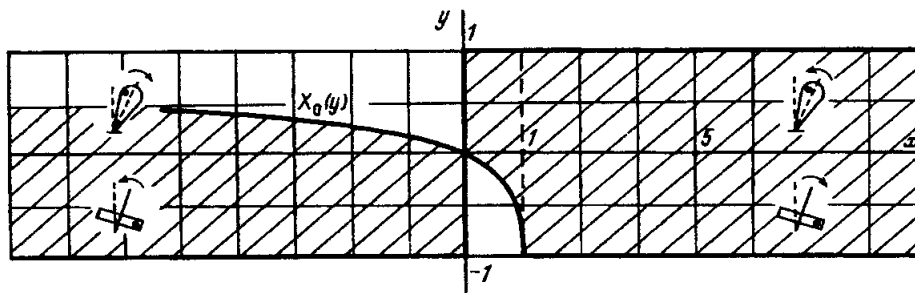
$$D \approx \frac{1}{4}g^2d(d-2)(g-d+1)(2g-2d+1)^2((2g-1)^2d+4g)\epsilon^4$$

Здесь параметр  $q$  заменен на  $g$  при помощи уравнения стационарного движения (3.3), которое в безразмерных параметрах принимает вид  $q + d = g$ . Благодаря использованию системы символьных вычислений удалось разложить коэффициенты на относительно простые множители. Без использования компьютера это вряд ли было бы возможно. Кроме того, при помощи компьютера из многих возможных вариантов были выбраны параметры  $g, d$ , в которых коэффициенты принимают наиболее простой вид, а главное, приводят к линейным неравенствам относительно одного из параметров —  $d$ . Последнее обстоятельство фактически делает возможным решение неравенств устойчивости.

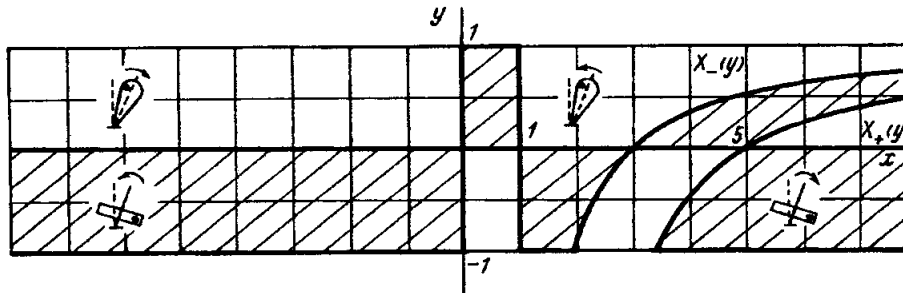
Не будем подробно останавливаться на решении неравенств, а приведем окончательные результаты. Их удобнее представить в параметрах  $x, y$ , допускающих более наглядную физическую интерпретацию  $x = \theta/C\omega^2$ ,  $y = \theta/\theta_{12}$ . Параметр  $x$  вводился ранее, он представляет собой квадрат безразмерной частоты. Параметр  $y$  описывает инерционные свойства волчка, его значения заключены в промежутке  $(-1, 1)$ .

Области устойчивости на плоскости параметров  $x, y$  для мертвого момента двигателя приведены на фиг. 3 (заштрихованы устойчивые области). Как и ранее, каждому квадранту на плоскости  $x, y$  соответствует различный тип системы, отличающийся формой волчка и направлением упругого момента, что отражено при помощи схематических картинок. 1-я область устойчивости на фиг. 3 (состоящая из 2-х соприкасающихся подобластей) ограничена прямой  $x = 0$  и кривой  $x = y/(2-y)$  (кривая 1). Она реализуется только при наличии восстанавливающего момента и означает устойчивость СД для не слишком больших угловых скоростей. В естественных обозначениях она описывается простым неравенством

$$\omega^2 < \frac{C}{\theta_{12} + \theta_3} \Leftrightarrow \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 < \frac{\theta_{12} - \theta_3}{\theta_{12} + \theta_3} \quad (6.4)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

2-я область устойчивости, реализующаяся в зарезонансной области для сплюснутого волчка с опрокидывающим моментом, описывается неравенствами:

$$y < 0, \quad 1 < x < X_-(y) \approx 5 + \frac{3y}{1-y} = \frac{3\theta_{12} + 2\theta_3}{\theta_3} \quad (6.5)$$

Здесь использована ограничивающая функция  $X_-(y)$ , точное определение которой будет дано ниже. Погрешность использованной в (6.5) приближенной формулы не более 3,5%.

Сравним полученный результат с областями устойчивости для консервативного случая, представленными на плоскости  $x, y$ , фиг. 4 (ограничивающая кривая задается функцией  $X_0(y) = -4y(1-y)^2$ ). Как и указывалось выше, двигатель ограниченной мощности оказывает дестабилизирующее воздействие, что согласно фиг. 3, 4 приводит к разрушению большей части областей устойчивости.

Несколько лучше ситуация в случае следящего момента двигателя – фиг. 5. При  $\theta < 0, C > 0$  – СД устойчиво при всех частотах, при  $\theta > 0, C < 0$  – всегда неустойчиво, при  $\theta > 0, C > 0$  и  $\theta < 0, C < 0$  – устойчиво соответственно в до- и послерезонансной области. Но, кроме того, в последних двух случаях имеется относительно узкая полоса с противоположным характером устойчивости. Полоса ограничена кривыми  $x = X_-(y)$  и  $x = X_+(y)$ , причем функция  $X_-(y)$  совпадает с аналогичной функцией в случае мертвого момента. Если остальным областям устойчивости можно дать более или менее убедительное физическое истолкование, то возникновение этой полосы вовсе не поддается подобным объяснениям. Этот результат является прекрасным примером того, насколько может быть беспомощна интуиция в подобных задачах.

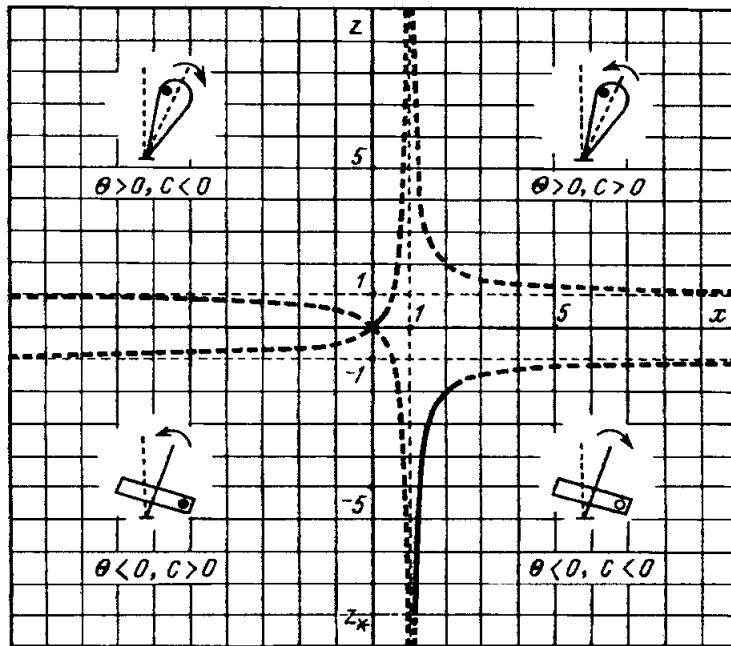
Области устойчивости на АЧХ изображены на фиг. 6, 7 соответственно для мертвого и следящего моментов (штриховые линии соответствуют неустойчивым режимам). Области приведены для  $|y| = 0,5$ . Нижняя по  $z$  граница областей устойчивости соответствует большим амplitудам.

Теперь перейдем к строгому описанию ограничивающих функций. Для следящего момента коэффициенты  $D_{20}, D$  имеют сходный с (6.3) вид, однако они несколько сложнее

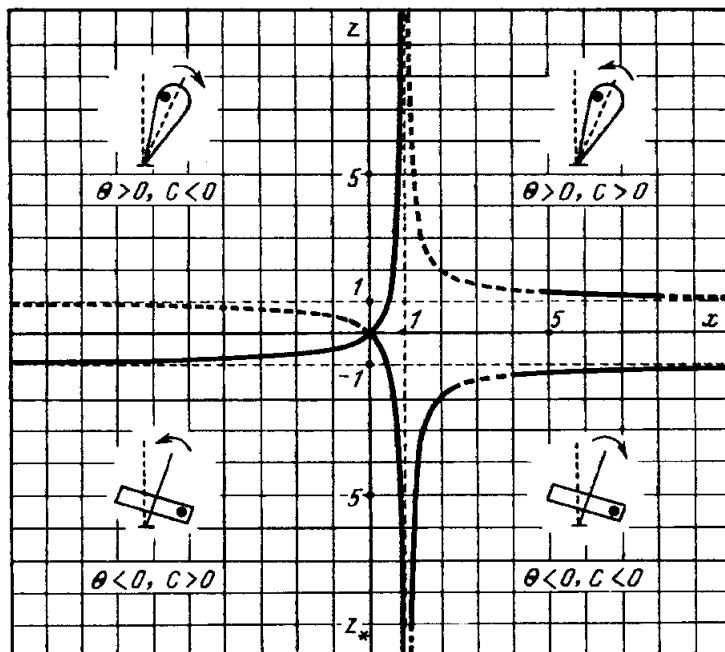
$$D_{20} \approx -\frac{1}{2}d(g-d+1)((6g^2-3g-1)d-8g^2(g+1))\epsilon^2 \quad (6.6)$$

$$D \approx \frac{1}{4}d(g-d+1)(2g-2d+1)^2((g-1)^2d+2g(g+1))((2g-1)^2d+4g)\epsilon^4$$





Фиг. 6



Фиг. 7

Из (6.6) и (6.1) могут быть получены следующие неявные формулы для ограничивающих функций. Обозначим

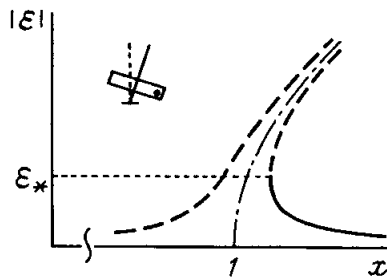
$$F_+(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (y-1)^2 x^3 - (y-1)(y-5)x^2 + 4yx - 4y^2$$

$$F_-(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (y-1)^2 x^3 - (y-1)(y-3)x^2 + y^2 x - y^2$$

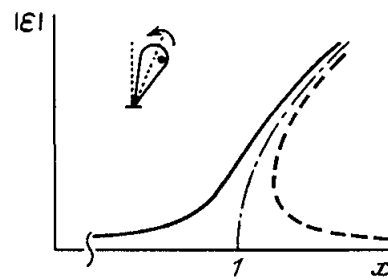
Тогда

$$F_+(x, y) = 0, \quad x > 2|y|/(1-y) \Rightarrow x \stackrel{\text{def}}{=} X_+(y)$$

$$F_-(x, y) = 0, \quad \begin{cases} y < 0 : x > -2y/(1-y) \\ 0 < y < 0,957 : x > y/(1-y) \end{cases} \Rightarrow x \stackrel{\text{def}}{=} X_-(y) \quad (6.7)$$



Фиг. 8



Фиг. 9

Функция  $X_-(y)$  определена для  $y < 0,957$ , т.е. для не слишком вытянутых волчков; для  $y > 0,957$  ее вид изменится, однако этот случай мы рассматривать не будем, так как он находится на границе применимости исходной модели.

Соотношения (6.7) достаточно сложны, для нахождения ограничивающих функций требуется решение кубических уравнений, что в аналитическом виде практически нереализуемо (проще находят обратные зависимости  $y(x)$ , но они менее удобны из физических соображений). Однако удастся найти весьма точное приближенное решение уравнений (6.7):

$$X_+(y) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{5-2y+y^2}{1-y} + \frac{25+4y-y^2}{\sqrt{(1-y)(25-y)}} \right), \quad X_-(y) \approx \frac{1}{1-y} + \frac{6+y}{\sqrt{3(1-y)(3+y)}}$$

Погрешность этих формул не превосходит 0,3%. Для  $y < 0$  можно предложить более простые формулы:

$$X_+(y) \approx 5 + 3,23 \frac{y}{1-y} \quad (0,07\%), \quad X_-(y) \approx 3 + 2,12 \frac{y}{1-y} \quad (0,6\%)$$

В скобках даны максимальные погрешности.

**7. Большие амплитуды.** Условия устойчивости для консервативных случаев, соответственно для  $L = \infty$  и  $L = 0$ , имеют вид

$$\theta \epsilon^3 + \theta_* \alpha \beta > 0, \quad \theta(4\theta + \theta_3) \epsilon^3 + \theta_3 \theta_* \alpha \beta > 0 \quad (7.1)$$

Для неконсервативного случая эти условия должны выполняться одновременно, и, кроме того, появляется дополнительное условие  $\epsilon > 0$  – при следящем, и еще одно дополнительное условие  $\theta < 0$  – при мертвом моменте двигателя. При следящем моменте области устойчивости на нелинейной АЧХ представлены на фиг. 8 ( $\theta < 0$ ) и фиг. 9 ( $\theta > 0$ ). На фигурах штриховые линии соответствуют неустойчивым режимам;  $\epsilon_* = |p|^{1/3}$  – значение  $|\epsilon|$ , соответствующее точке возврата. При мертвом моменте исчезнет область устойчивости, изображенная на фиг. 8. Таким образом, при больших амплитудах также проявляется дестабилизирующее воздействие двигателя ограниченной мощности.

Фиг. 6, 7 позволяют увидеть одновременно области устойчивости (сплошная линия) для очень малых, малых, и больших амплитуд на АЧХ системы.

**8. Заключение.** Опишем основные изменения, которым подвергаются области устойчивости консервативных систем (двигатель бесконечной мощности и отсутствие двигателя) при переходе к неконсервативной системе (двигатель ограниченной мощности):

1. Невозможно возникновение новых областей устойчивости. Существующие области значительно сужаются.
2. Неустойчивость проявляется уже при малых амплитудах.
3. Области устойчивости принимают сложный, не поддающийся интуитивным предсказаниям характер.

4. Для двигателя, создающего мертвый момент, эффект сужения областей устойчивости значительно более ярко выражен, чем для двигателя, создающего следящий момент.

5. Величина мощности двигателя не влияет на размеры областей устойчивости.

Особого внимания заслуживает утверждение 3 – нетривиальная потеря устойчивости возможна в нерезонансных зонах, при малых амплитудах. Следовательно, при наличии двигателя ограниченной мощности, могут оказаться неустойчивыми, а значит не реализуемыми на практике, линеаризованные уравнения вынужденных колебаний, используемые в динамике жестких роторов [8]. Отметим, что получить эти зоны неустойчивости оказалось возможным по той причине, что уравнения возмущенного движения получались для полной нелинейной задачи, а линеаризация применялась лишь для упрощения алгебраических критериев устойчивости. При использовании изначально линеаризованных систем подобную неустойчивость обнаружить не удастся.

Итак, в целом, двигатель ограниченной мощности оказывает сильное дестабилизирующее воздействие. Этот результат полностью согласуется с результатами, полученными для задачи о плоскопараллельном движении неуравновешенного жесткого ротора в нелинейных упругих подшипниках [2, 3], согласно которым двигатель ограниченной мощности приводит к сужению областей устойчивости, имеющих для двигателя бесконечной мощности. Более того, если согласно [2] новые области неустойчивости возникают только на правой ветви АЧХ, то в данной задаче они могут возникать и на левой ветви. Возникновение больших неустойчивых областей вообще может поставить под сомнение реализуемость стационарного движения. Однако, на практике, стабилизирующее воздействие могут оказывать другие диссипативные факторы, в первую очередь внешнее вязкое трение [1, 2].

В заключение отметим, что для сохраняющихся областей устойчивости двигатель ограниченной мощности за счет внесения диссипации приводит, во-первых, к строгой устойчивости (а не только в 1-ом приближении), во-вторых, устойчивость получает асимптотический характер. В этом смысле двигатель ограниченной мощности может оказывать стабилизирующее воздействие. С этой точки зрения весьма интересен случай сплюснутого волчка при наличии восстанавливающего упругого момента. При следящем моменте двигателя стационарное движение такого волчка оказывается устойчивым при любых частотах. Таким образом подобный волчок действительно может рассматриваться как модель центрифуги, не имеющей резонанса (см. параграф 3). Подобный результат не имеет аналога в случае плоскопараллельного движения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Агафонов С.А. Об устойчивости установившихся движений вращающегося вала // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 61–65.
- [2] Меркин Д.Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 378–384.
- [3] Румянцев В.В. Об устойчивости установившихся движений систем с квазициклическими координатами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 918–927.
- [4] Кривцов А.М. Стационарные движения несимметричного волчка // Изв. АН СССР. МТТ. 1997. № 3. С. 28–38.
- [5] Кривцов А.М. Математические модели для расчета динамики лабораторных центрифуг // Тр. СПбГТУ. 1993. № 446. С. 187–190.
- [6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1988. 548 с.
- [7] Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989. 214 с.
- [8] Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука, 1982. 280 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
6.04.1998