МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2000

УДК 531.38

 А.М. КРИВЦОВ

ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПРИ ПОМОЩИ КВАЗИКООРДИНАТ

Рассматривается свободное вращательное движение твердого тела под действием линейного вязкого момента. Приводится простейшая механическая система, позволяющая смоделировать указанный закон взаимодействия. Показывается, что в математической постановке задача сводится к нахождению единичного вектора, для которого модуль первой и второй производной являются известными функциями времени. Исследуется траектория вершины орта оси симметрии тела на единичной сфере. Строится аналитическое решение задачи с использованием квазикоординат.

Введение. Рассматривается свободное движение осесимметричного твердого тела под действием линейного вязкого момента

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{B} \overset{\text{def}}{=} B_{12}(\mathbf{E}-\mathbf{nn}) + B_3\mathbf{nn} \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\mathbf{n}$ – орт оси симметрии тела, B_{12}, B_3 – постоянные положительные коэффициенты, $\mathbf{E}$ – единичный тензор, $\mathbf{nn}$ – диодное произведение ортов $\mathbf{n}$.

Уравнение движения подобной системы имеет вид

$$(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega})^{\bullet} = -\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} \overset{\text{def}}{=} \theta_{12}(\mathbf{E}-\mathbf{nn}) + \theta_3\mathbf{nn} \tag{1.2}$$

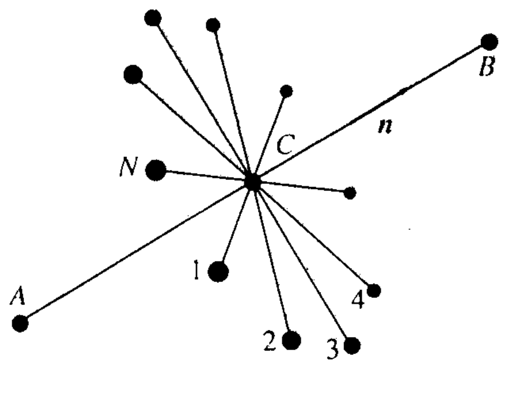
где θ_{12} и θ_3, соответственно, экваториальный и полярный моменты инерции твердого тела.

Задача (1.1) – (1.2) известна давно. Э. Дж. Раус рассматривал данную задачу в случае, когда тензор вязкости $\mathbf{B}$ пропорционален тензору инерции твердого тела $\mathbf{B} = \alpha\boldsymbol{\theta}$ [1]. В этом случае (1.2) дает линейное дифференциальное уравнение относительно кинетического момента $\mathbf{K} = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}$, которое легко интегрируется

$$\dot{\mathbf{K}} = -\alpha\mathbf{K} \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 e^{-\alpha t} \tag{1.3}$$

Таким образом, в этом частном случае кинетический момент остается постоянным по направлению, а движение твердого тела оказывается аналогичным движению в пустоте, но с экспоненциально убывающей угловой скоростью. Отметим, что это решение автоматически обобщается на случай произвольного тензора инерции.

Р. Граммель в [2] рассматривает шаровой тензор вязкости $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{E}$. Этот случай значительно сложнее, и, с точки зрения решения, мало отличается от общего случая (1.1), рассмотренного в [3]. В этих работах определяются проекции угловой скорости на подвижные оси, связанные с вращающимся телом. Из более поздних работ, посвященных этой задаче, отметим работу [4], в которой также определяются проекции угловой скорости на подвижные оси, а также рассматривается более общая задача, когда тензор вязкости не обладает осевой симметрией.



Фиг. 1

Однако, во всех перечисленных выше работах не находится положение вектора угловой скорости в неподвижном пространстве, а также углы, определяющие положение тела. Последнее требует дальнейшего интегрирования уравнений движения. В [5] получено точное решение данной задачи в виде равномерно сходящегося ряда. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий получить простое решение задачи с использованием квазикоординат. Подобное решение не является решением в классическом смысле, тем не менее оно позволяет наглядно описать движение тела в пространстве. При этом для описания движения не требуется функций "сложнее" экспонент.

2. Физическая интерпретация рассматриваемого момента сопротивления. Прежде чем перейти к решению задачи, приведем в качестве примера простую физическую модель, для которой момент трения в точности соответствует формуле (1.1).

На фиг. 1 представлена жесткая конструкция, состоящая из стержней и укрепленных на них одинаковых шариков. Шарики 1, 2,..., N расположены в плоскости, перпендикулярной стержню AB, и распределены равномерно по окружности радиуса a с центром в точке C, совпадающей с центром стержня AB. Здесь $N \geqslant 3$ и не слишком велико, так, чтобы расстояния между шариками можно было считать много больше их размеров. Ясно, что тензор инерции подобной системы трансверсально изотропен. Рассмотрим движение конструкции в линейно вязкой среде. Будем считать, что толщина стержней пренебрежимо мала по сравнению с размером шариков, тогда сопротивление определяется силой вязкого трения, действующей на шарики $\mathbf{f} = -\beta\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – скорость шарика, β – коэффициент вязкости. Суммарный момент сопротивления относительно центра масс C равен

$$\mathbf{M} = -\beta\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k - \beta\mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_A - \beta\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}_B \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ – радиус-векторы соответствующих шариков, проведенные из точки C. Скорость каждого шарика представим в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}\times\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}_C + \mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \mathbf{r}\times\mathbf{v}_C + (r^2\mathbf{E} - \mathbf{rr})\cdot\boldsymbol{\omega}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость конструкции, $\mathbf{v}_C$ – скорость центра масс. Подставив это соотношение в (2.1), получим

$$\mathbf{M} = -\beta\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_c - \beta\Big(\sum_{k=1}^{N}(a^2\mathbf{E} - \mathbf{r}_k\mathbf{r}_k) + 2(b^2\mathbf{E} - \mathbf{r}_A\mathbf{r}_A)\Big)\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{2.2}$$

Здесь использовано, что $|\mathbf{r}_k| = a$, $|\mathbf{r}_A| = b$, $\mathbf{r}_B = -\mathbf{r}_A$. Обозначим $\mathbf{n}$ – орт оси AB: $\mathbf{r}_A = -b\mathbf{n}$. Рассмотрим соотношение (2.2). Сумма $\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k$ из соображений симметрии равна нулю. Тензор $\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_k$ лежит в плоскости ортогональной $\mathbf{n}$ и обладает симметрией вращения N-го порядка, следовательно он должен быть пропорционален трансверсально изотропному тензору $\mathbf{E} - \mathbf{nn}$. Вычислив след для этих тензоров, найдем коэффициент пропорциональности

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{r}_k\mathbf{r}_k = k(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N}(a^2) = k(3-1) \Rightarrow k = \frac{N}{2}a^2$$

Тогда формула (2.2) принимает вид

$$\mathbf{M} = -\beta\left(\frac{N}{2}a^2(\mathbf{E} + \mathbf{nn}) + 2b^2(\mathbf{E} - \mathbf{nn})\right)\cdot\boldsymbol{\omega}$$

откуда получаем

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{B} = B_{12}(\mathbf{E}-\mathbf{nn}) + B_3\mathbf{nn}$$

$$B_{12} = \beta\left(\frac{N}{2}a^2 + 2b^2\right), \quad B_3 = \beta N a^2$$

Таким образом, момент сопротивления, действующий на рассмотренную конструкцию, в точности соответствует формуле (1.1).

3. Первые интегралы. Перейдем к решению уравнения (1.2):

$$(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega})^{\cdot} = -\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{3.1}$$

Для кинетического момента $\mathbf{K} = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}$ воспользуемся представлением [6] $\mathbf{K} = \theta_{12}\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}} + \theta_3\Omega\mathbf{n}$, где Ω – угловая скорость собственного вращения, представляющая собой проекцию вектора угловой скорости на орт $\mathbf{n}$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\theta_{12}\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{n}} + \theta_3(\dot{\Omega}\mathbf{n} + \Omega\dot{\mathbf{n}}) = -B_{12}\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}} - B_3\Omega\mathbf{n}$$

Умножим полученное соотношение скалярно на $\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}}$ и $\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}}$, после несложных преобразований получим следующие три скалярных уравнения:

$$\theta_3\dot{\Omega} = -B_3\Omega$$

$$\theta_{12}\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}}) - \theta_3\Omega\dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = 0$$

$$\theta_{12}\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = -B_{12}\dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} \tag{3.2}$$

1-е и 3-е уравнения легко интегрируются, в результате чего находим Ω и $\dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}}$ как функции времени

$$\Omega = \Omega_0 e^{-B_3 t/\theta_3}, \quad \dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = v_0^2 e^{-2B_{12}t/\theta_{12}} \tag{3.3}$$

Здесь Ω_0, ν_0 – константы интегрирования.

Для описания движения рассматриваемого тела достаточно определить как функции времени орт $\mathbf{n}$, задающий направление оси симметрии тела, и величину Ω, описывающую вращение вокруг этой оси. Угловая скорость Ω известна из (3.3). Орт $\mathbf{n}$ является двухпараметрической величиной, поэтому, вообще говоря, он может быть восстановлен по двум скалярным уравнениям. В качестве первого уравнения для орта $\mathbf{n}$ возьмем соотношение (3.3), а второе может быть получено из 2-го уравнения системы (3.2). Введем две экспоненциальные функции времени:

$$\Omega(t) \overset{\text{def}}{=} \Omega_0 e^{-B_3 t/\theta_3}, \quad \nu(t) \overset{\text{def}}{=} \nu_0 e^{-B_{12}t/\theta_{12}} \tag{3.4}$$

тогда для определения Ω и орта $\mathbf{n}$ получаем уравнения

$$\Omega = \Omega(t), \quad \dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \nu^2(t), \quad \mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}}) = \frac{\theta_3}{\theta_{12}}\Omega(t)\nu^2(t) \overset{\text{def}}{=} f^3(t) \tag{3.5}$$

Константу ν_0 будем считать положительной, тогда величина $\nu(t)$ имеет смысл модуля скорости вершины вектора $\mathbf{n}$. Таким образом, задача сводится к чисто математической постановке – восстановить единичный вектор $\mathbf{n}$ по следующим двум скалярным соотношениям:

$$\dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \nu^2(t), \quad \mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}}) = f^3(t) \tag{3.6}$$

где $\nu(t)$ и $f(t)$ – известные функции времени, имеющие размерность частоты. Второе из уравнений (3.6) можно заменить эквивалентным. Для этого воспользуемся тождеством [7]:

$$(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))^2 = a^2b^2c^2 - a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2 - b^2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})^2 - c^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})$$

тогда

$$(\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}}))^2 = \dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}}\ddot{\mathbf{n}}\cdot\ddot{\mathbf{n}} - (\dot{\mathbf{n}}\cdot\ddot{\mathbf{n}})^2 - \dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}}(\dot{\mathbf{n}}\cdot\ddot{\mathbf{n}})^2 = \nu^2(\ddot{\mathbf{n}}\cdot\ddot{\mathbf{n}} - \dot{\nu}^2 - \nu^4)$$

откуда получаем

$$\ddot{\mathbf{n}}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = \frac{1}{\nu^2}(\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}}))^2 + \dot{\nu}^2 + \nu^4 = \frac{f^6}{\nu^2} + \dot{\nu}^2 + \nu^4 \overset{\text{def}}{=} F^4(t)$$

Следовательно, система (3.6) может быть записана в форме $\dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \nu^2(t)$, $\ddot{\mathbf{n}}\cdot\ddot{\mathbf{n}} = F^4(t)$. Таким образом, задача сводится к нахождению единичного вектора, для которого модуль первой и второй производной являются известными функциями времени. Эта проблема оказывается значительно сложнее получения всех приведенных выше результатов. Специфика данной задачи заключается в ее инвариантности – отсутствуют какие-либо выделенные направления в пространстве. Однако, в этом и ее сложность – не ясно, от какого направления отталкиваться при описании поворотов. Введение любого выделенного направления сразу разрушает симметрию задачи.

Отметим, что интегралы, аналогичные (3.3), получены в работах [2, 3, 4]. В частности, в этих работах находится квадрат полной угловой скорости, который может быть выражен через (3.3) следующим образом

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{n}} + \Omega\mathbf{n})^2 = \dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} + \Omega^2 = \nu_0^2 e^{-2B_{12}t/\theta_{12}} + \Omega_0^2 e^{-2B_3 t/\theta_3}$$

4. Сферическая кривизна. Таким образом, для решения задачи необходимо описать движение единичного вектора $\mathbf{n}$. Его вершина описывает траекторию, лежащую на сфере единичного радиуса. На траектории введем безразмерную дуговую координату s, такую что $|ds| = |d\mathbf{n}|$. Введем угол ξ поворота траектории в плоскости, касательной к сфере. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной к траектории: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}'$ (здесь и далее штрихом обозначается производная по s). Определим $d\xi$ как угол между $\boldsymbol{\tau}$ и $(\mathbf{E} - \mathbf{nn})\cdot(\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\tau})$ – угол между $\boldsymbol{\tau}$ и проекцией $\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\tau}$ на касательную плоскость. Это определение можно записать формулой

$$\mathbf{n}d\xi \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\tau}\times((\mathbf{E} - \mathbf{nn})\cdot(\boldsymbol{\tau} + d\boldsymbol{\tau})) \tag{4.1}$$

Домножив соотношение (4.1) скалярно на $\mathbf{n}$ получим

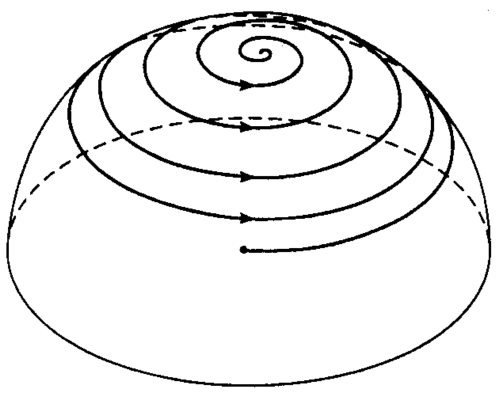
$$d\xi = \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times d\boldsymbol{\tau}) \Rightarrow \xi' = \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau}') = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}'\times\mathbf{n}'') \tag{4.2}$$

Величина $k \overset{\text{def}}{=} \xi' = d\xi/ds$ представляет собой геодезическую кривизну траектории на сфере. Для краткости далее будем называть ее сферической кривизной траектории. Согласно (4.2), она связана с ортом $\mathbf{n}$ формулой

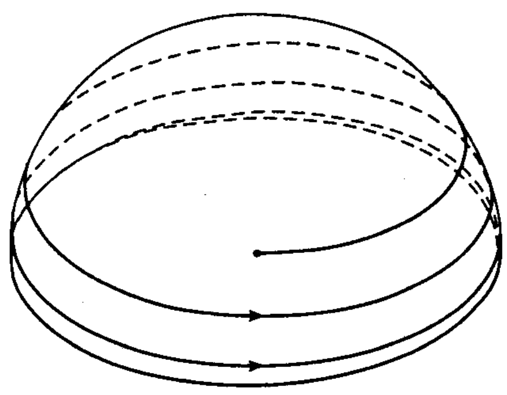
$$k \overset{\text{def}}{=} \xi' = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}'\times\mathbf{n}'') \tag{4.3}$$

Можно показать, что полная кривизна траектории K связана со сферической кривизной соотношением $K^2 = 1 + k^2$. Отсюда, в частности, следует, что когда сферическая кривизна обращается в ноль, то $K = 1$, а следовательно в этом случае траектория представляет собой большую окружность на сфере. Отметим также, что для K можно получить формулу, аналогичную (4.3) $K^2 = \mathbf{n}''\cdot\mathbf{n}''$.

Из уравнений движения, согласно (3.6), нам известно смешанное произведение $\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}})$. Установим, как оно связано со сферической кривизной k. Имеем $ds^2 = d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{n} \Rightarrow \dot{s}^2 = \dot{\mathbf{n}}\cdot\dot{\mathbf{n}} = \nu^2$. Напомним, что $\nu(t)$ – известная функция времени. Положим



Фиг. 2



Фиг. 3

$\dot{s} = \nu$, тогда $d/dt = \nu d/ds$. Используя эту формулу, заменим производные в выражении $\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}})$:

$$\mathbf{n}\cdot(\dot{\mathbf{n}}\times\ddot{\mathbf{n}}) = \mathbf{n}\cdot(\nu\mathbf{n}'\times(\nu\nu'\mathbf{n}'+\nu^2\mathbf{n}'')) = \nu^3\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}'\times\mathbf{n}'') = \nu^3 k \qquad (4.4)$$

Теперь мы можем найти сферическую кривизну k как функцию времени. Из (4.4), используя (3.5), получаем

$$k = \frac{f^3(t)}{\nu^3(t)} = \frac{\theta_3}{\theta_{12}}\frac{\Omega(t)}{\nu(t)} = \frac{\theta_3\Omega_0}{\theta_{12}\nu_0}\exp\left(\left(\frac{B_{12}}{\theta_{12}} - \frac{B_3}{\theta_3}\right)t\right) \qquad (4.5)$$

Из полученной формулы для сферической кривизны можно сделать следующие выводы относительно характера движения.

1. $B_{12}/\theta_{12} > B_3/\theta_3 \Rightarrow k \to \infty$ – кривизна монотонно возрастает, стремясь в пределе к бесконечности, следовательно траектория вершины вектора $\mathbf{n}$ на единичной сфере представляет собой спираль с уменьшающимся радиусом витков, стремящуюся в пределе к точке – фиг. 2.

2. $B_{12}/\theta_{12} < B_3/\theta_3 \Rightarrow k \to 0$ – траектория представляет собой раскручивающуюся спираль, стремящуюся в пределе к большей окружности на сфере – фиг. 3.

3. $B_{12}/\theta_{12} = B_3/\theta_3 \Rightarrow k = \text{const}$ – траектория вырождается в окружность: это упоминавшийся ранее частный случай (1.3) пропорциональности тензора вязкости и тензора инерции.

5. Квазикоординаты. Согласно результатам предыдущего параграфа, нам известны производные

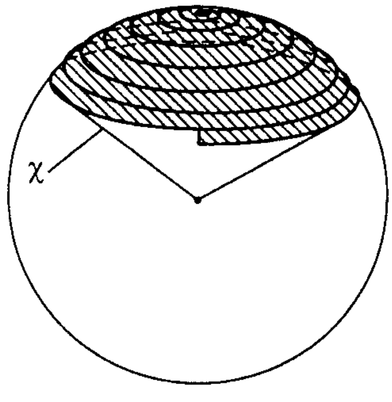
$$\dot{s} = \nu(t), \quad \dot{\xi} = \nu\xi' = \nu k = \frac{\theta_3}{\theta_{12}}\Omega(t)$$

Величины s и ξ определяют пройденный путь и угол поворота траектории на сфере. В некотором смысле они могут трактоваться как координаты вектора $\mathbf{n}$. Если к ним добавить формальную угловую величину ζ, такую что $\dot{\zeta} = \Omega$, то в этих переменных мы получаем возможность проинтегрировать задачу. Действительно, согласно (3.4):

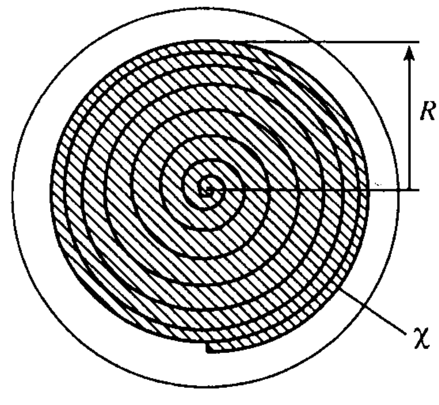
$$\dot{s} = \nu(t) = \nu_0 e^{-B_{12}t/\theta_{12}}, \quad \dot{\xi} = \frac{\theta_3}{\theta_{12}}\Omega(t) = \frac{\theta_3}{\theta_{12}}\Omega_0 e^{-B_3 t/\theta_3}, \quad \dot{\zeta} = \Omega(t) = \Omega_0 e^{-B_3 t/\theta_3}$$

Проинтегрировав эти соотношения с нулевыми начальными условиями получим

$$s = \frac{\theta_{12}}{B_{12}}\nu_0(1 - e^{-B_{12}t/\theta_{12}}), \quad \xi = \frac{\theta_3^2\Omega_0}{B_{12}\theta_{12}}(1 - e^{-B_3 t/\theta_3}), \quad \zeta = \frac{\theta_3}{B_3}\Omega_0(1 - e^{-B_3 t/\theta_3}) \qquad (5.1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Квазикоординаты s, ξ, ζ не являются мгновенными характеристиками положения тела: значения их в фиксированный момент времени t не дают возможность однозначно определить положение тела в момент времени t, для этого необходимо знать всю историю изменения квазикоординат. Однако, они обладают тем важным преимуществом, что сохраняют симметрию задачи, потому и приводят к такому простому интегрированию.

Полученное решение (5.1) нельзя назвать решением задачи в традиционном смысле. Однако, оно позволяет ответить практически на все вопросы, которые могут возникать в данной задаче. Как уже упоминалось, траектория вершины орта **n**, на единичной сфере представляет собой спираль. Тогда, например, значения s, ξ и ζ при $t \to \infty$ определяют, соответственно, длину этой спирали, суммарный угол закручивания спирали и число поворотов тела вокруг оси симметрии. Радиус R витка спирали может быть найден как

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad k = \frac{d\xi}{ds} = \frac{\theta_3 \Omega_0}{\theta_{12} \nu_0} \exp\left(\left(\frac{B_{12}}{\theta_{12}} - \frac{B_3}{\theta_3}\right)t\right) \tag{5.2}$$

Осевой поворот $\Delta\varphi$ тела в абсолютном пространстве за время прохождения ортом **n** одного витка спирали может быть вычислен при помощи теоремы о телесном угле [8]:

$$\Delta\varphi = \chi + \Delta\zeta$$

Здесь $\Delta\zeta$ – приращение угловой квазикоординаты ζ за один виток, χ – телесный угол, ограниченный спиралью – фиг. 4–5. Если витки спирали располагаются достаточно часто, то телесный угол χ может быть приближенно выражен через радиус витка спирали (5.2) $\chi \approx 2\pi(1 - \sqrt{1 - R^2})$.

Таким образом, решение (5.1) дает практически полное, но вместе с тем простое и наглядное описание движения системы. Известно, что уравнения динамики для многих относительно простых систем невозможно решить аналитически в мгновенных координатах, а если это и удается, то это приводит к чрезвычайно громоздким формулам, не имеющим наглядной физической интерпретации. В таких случаях целесообразным может оказаться использование квазикоординат, как это сделано в данной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
2. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 352 с.
3. *Магнус К.* Гироскоп: Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.

4. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука, 1985. 286 с.
5. *Иванова Е.А.* Свободное вращение осесимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тр. СПбГТУ. 1997. № 467. С. 61–69.
6. *Журавлев В.Ф.* Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.
7. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд. АН СССР, 1961. 426 с.
8. *Журавлев В.Ф.* Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
6.04.1998