

УДК 517.946: 539.3

ПРИГОДНАЯ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В ТЕОРИИ ПЛАСТИН

О. В. Мотыгин, С. А. Назаров

(199178 С.-Петербург, В.О. Большой пр. 61, ИПМаш РАН)

Общая процедура построения и ортогонализации всех полиномиальных решений эллиптической задачи в полосе приспособляется к уравнениям теории упругости и максимально упрощается при использовании их конкретных свойств. Допускаются произвольные анизотропия и неоднородность в поперечном направлении. Для однородной полосы получены явные формулы. В случае слоистой среды процедура сводится к операциям над матрицами, выполняемым на персональном компьютере. При произвольной неоднородности ответы выписываются в квадратурах. Названные полиномиальные решения необходимы для изучения явления пограничного слоя в теории тонких пластин — с их помощью формулируются теоремы о разрешимости задач в полуполосе и формируются краевые условия в двумерных моделях. Кроме того, построенные решения находят применение в разнообразных вычислительных методах.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Многие инженерные вопросы теории тонких плит (пластин) тесно связаны с краевыми эффектами, обусловленными сменой типа напряженно-деформированного состояния при приближении к боковой поверхности. Особенно четко это проявляется при рассмотрении проблемы с позиций механики разрушения: заключения, сделанные на основе принятых двумерных моделей, зачастую оказываются неверными из-за непомерных погрешностей в определении тензора напряжений вблизи ребра пластины. Асимптотическая природа названных погрешностей кроется в явлении пограничного слоя, который привносит в асимптотику напряжений слагаемые, по порядку совпадающие с двумерными составляющими гладкого типа (см. [1], где это наблюдение подтверждено гильдеровскими оценками в случае тонкого стержня). Изучение

пограничного слоя (см. [2]–[7] и др.) проводилось, в основном, для однородных изотропных пластин, в то время как особый практический интерес приобретают неоднородные и анизотропные пластины, в том числе слоистые (композитные материалы). Такое сужение постановки вопроса в первую очередь вызвано колоссальными вычислительными трудностями в исследовании базовой задачи о деформации полуполосы (в общей постановке). Многие явные формулы для изотропного случая найдены давно (см. [8]–[14] и др.), но их распространение на случай произвольной анизотропии требует построения канонической системы жордановых цепочек для специального квадратичного пучка. Первичные сведения об этой системе (строение и даже половина элементов) установлены в [13, § 5.7], однако никаких рекомендаций для конкретизации общих процедур до сих пор не дано. Настоящая статья ликвидирует этот пробел, упрощая процедуру до алгебраических операций, выполняемых на персональном компьютере. Подчеркнем, что асимптотические представления решений на бесконечности оказываются полезным инструментом и для численных методов, таких, как постановка искусственных краевых условий (см. [15]–[17]), метод частичной асимптотической декомпозиции области (см. [18]), осреднение периодических структур (см. [19], [20]) и др.

По существу данная работа является продолжением [21], где при помощи компьютерной программы производилась сама редукция размерности (в частности, вывод двумерных моделей пластин). Имеется и скрытая связь: идея о применении того же подхода к конструированию пограничного слоя была высказана в отзыве рецензента на статью [21]. Сейчас обнаружилось, что это был Г. П. Панасенко, которому авторы и выражают глубокую признательность.

Приведем постановку задачи в полуполосе

$$\Pi = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, z \in (-H_-, H_+) \equiv \Upsilon\},$$

используя матричную (а не тензорную) запись уравнений теории упругости. Вектор смещений u интерпретируем как столбец $(u_x, u_y, u_z)^t$; здесь t — знак транспонирования, u_y, u_z — смещения в плоскости (y, z) , а u_x — депланация, т. е. ось x направлена

перпендикулярно Π . Введем столбец двумерных деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \alpha^{-1}\varepsilon_{xy}, \alpha^{-1}\varepsilon_{yz}, \alpha^{-1}\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zz})^t,$$

где $\alpha = 2^{-1/2}$ (нормирующий множитель) и $\varepsilon_{\dots}$ — декартовы компоненты тензора деформаций (см. [12]). Ввиду исключения зависимостей от x имеем $\varepsilon_{xx} = 0$ и $\varepsilon_{xy} = \alpha^2 \partial_y u_x$, $\varepsilon_{xz} = \alpha^2 \partial_z u_x$. Аналогичный столбец напряжений $\sigma(u)$ вычисляется согласно закону Гука

$$\sigma(u; y, z) = A(z)\varepsilon(u; y, z),$$

где A — положительно определенная и симметрическая 6×6 -матрица-функция, кусочно гладко зависящая от $z \in \Upsilon$. Матрица A может быть заполнена целиком, т.е. она описывает произвольно анизотропную и неоднородную в поперечном направлении полуполосу. Разрывы происходят в точках $H_1, \dots, H_{N-1}$, причем

$$-H_- = H_0 < H_1 < \dots < H_{N-1} < H_N = H_+. \quad (1.2)$$

В случае $N > 1$ пластина слоистая. Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \varepsilon(u) &= D(\nabla)^t u, \quad \sigma(u) = A D(\nabla)^t u, \quad \nabla = \text{grad} = (\partial_y, \partial_z)^t, \\ D(\nabla) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \partial_y & \alpha \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & \alpha \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_y & \partial_z \end{pmatrix}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Система уравнений равновесия и краевые условия в напряжениях на боковых сторонах $\Gamma_{\pm} = \{(y, z) : y > 0, z = \pm H_{\pm}\}$ полуполосы Π принимают вид

$$D(-\nabla) A(z) D(\nabla)^t u(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Pi, \quad (1.4)$$

$$D(\pm \mathbf{e}^z) A(\pm H_{\pm}) D(\nabla)^t u(y, \pm H_{\pm}) = 0, \quad y > 0, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{e}^x$, $\mathbf{e}^y$ и $\mathbf{e}^z$ — орты осей x , y и z . Краевые условия на торце $\Upsilon_0 = \{(y, z) : y = 0, z \in \Upsilon\}$ уточняются далее в п.2. На лучах $\Gamma_n = \{(y, z) : y > 0, z = H_n\}$ ставятся естественные условия сопряжения

$$\begin{aligned} D(\mathbf{e}^z) A(H_n - 0) D(\nabla)^t u(y, H_n - 0) &= D(\mathbf{e}^z) A(H_n + 0) D(\nabla)^t u(y, H_n + 0), \\ u(y, H_n - 0) &= u(y, H_n + 0), \quad y > 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Они исчезают при обобщенной постановке задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Pi)^3$ (тройка указывает количество компонент). Имеется способ их устранения и при классической постановке: матрица A сглаживается в δ -окрестностях точек разрывов $H_1, \dots, H_{N-1}$, но в финальных формулах осуществляется предельный переход $\delta \rightarrow +0$. Именно поэтому далее в п.3 условия сопряжения не выписываются явно.

Приемы, позволившие упростить процедуру поиска полиномиальных по y решений задачи (1.4), (1.5) (или, что то же, упоминавшихся жордановых цепочек), базируются на полиномиальном свойстве [22, 13] системы уравнений теории упругости: для любой области Ξ функционал упругой энергии $2^{-1}\mathcal{E}(u, u; \Xi)$ вырождается только на линеале $\mathcal{P}$ векторных полиномов, жестких смещений. Отметим, что

$$\mathcal{E}(u, v; \Pi) = \int_{\Pi} \varepsilon(v)^t \sigma(u) dy dz = \int_{\Pi} (D(\nabla)^t v)^t A D(\nabla)^t u dy dz, \quad (1.7)$$

а базис в $\mathcal{P}$ образуют векторы

$$\Phi^1 = \mathbf{e}^x, \quad \Phi^2 = \mathbf{e}^y, \quad \Phi^3 = \mathbf{e}^z, \quad \Phi^4(y, z) = z\mathbf{e}^y - y\mathbf{e}^z. \quad (1.8)$$

В [13, гл. 5] показано, как при помощи линеала $\mathcal{P}$ выводятся теоремы о разрешимости задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (т.е. в полуполосе Π) и восстанавливается структура жордановых цепочек (соответствующие утверждения сформулированы в п.2). Анализ строения того же линеала $\mathcal{P}$ дает возможность предсказывать результаты осреднения краевых задач в тонких областях (см. [23, § 3]). Подмеченная в [23] схожесть этих двух процедур и послужила отправной точкой для данной работы. В п.3 конструируется результирующая система обыкновенных дифференциальных (по y) уравнений так, как будто Π — тонкая область, а в п.4 по полиномиальным решениям одномерной системы находятся все полиномиальные решения двумерной задачи в Π . При этом соблюдаются естественные условия ортогональности, придающие элементам построенного базиса ясный физический смысл. В п.5 приводятся явные формулы для однородных и слоистых пластин — благодаря удачной (матричной) записи исходной и результирующей систем многие ответы даются в виде интегралов и матричных произведений.

Тем не менее, для неоднородных пластин ряд необходимых результатов в замкнутой форме получить не удалось (в первую очередь это относится к условиям ортогональности и нормировки). Поэтому далее в этом параграфе поясняется, как вычисления заканчиваются при помощи компьютерной программы. Демонстрируется пример — двуслойная пластина.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПОЛОСЕ.

Обозначим $L(z, \nabla)$ и $B^\pm(\nabla)$ операторы из левых частей (1.4) и (1.5). Заменяем в этих операторах дифференцирование ∂_y комплексным параметром Λ и введем квадратичный пучок

$$\mathbb{C} \ni \Lambda \longmapsto \mathcal{A}(\Lambda) = \{L(z, \Lambda, \partial_z), B^\pm(\Lambda, \partial_z)\}.$$

Сообщим ряд фактов, установленных в [24, 13]. При некотором $\delta > 0$ полоса $\{\lambda : |\operatorname{Im} \lambda| < \delta\}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ содержит единственное собственное число $\Lambda = 0$ пучка $\mathcal{A}$, общая кратность которого равна $8 = 2 \dim \mathcal{P}$. Этому числу отвечает каноническая система жордановых цепочек

$$\{U^{s,k} \mid s = x, y, z; k = 0, \dots, 2\kappa_s - 1\}, \quad (2.2)$$

где $\kappa_x = \kappa_y = 1$ и $\kappa_z = 2$. Собственные $U^{s,0}$ и присоединенные $U^{s,k}$, $k \geq 1$, векторы являются решениями задач

$$\mathcal{A}(0) U^{s,k} = - \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} \frac{d^p \mathcal{A}}{d\Lambda^p}(0) U^{s,k-p}, \quad p = 0, \dots, 2\kappa_s - 1. \quad (2.3)$$

Заранее известны следующие элементы цепочек (2.2):

$$U^{x,0} = \mathbf{e}^x, \quad U^{y,0} = \mathbf{e}^y, \quad U^{z,0} = \mathbf{e}^z, \quad U^{z,1}(y) = -z\mathbf{e}^y. \quad (2.4)$$

По системе (2.2) выстраиваются векторные полиномы переменной y , которые в силу (2.3) удовлетворяют соотношениям (1.4) и (1.5),

$$V^{s,k}(y, z) = \sum_{p=0}^k \frac{1}{p!} y^p U^{s,k-p}(z). \quad (2.5)$$

Восемь векторов (2.5) составляют базис в пространстве $\mathcal{L}$ полиномиальных решений уравнений (1.4) и (1.5), а векторы $V^{x,0}$, $V^{y,0}$, $V^{z,0}$, $V^{z,1}$, отвечающие (2.4) и принимающие согласно (2.5) вид (1.8), оказываются базисом в линеале жестких смещений. Остальные четыре решения из (2.5) нуждаются в отдельном построении и существенно зависят от упругих свойств полуполосы.

Приведем несколько утверждений о разрешимости краевых задач теории упругости в Π , сознательно упростив их формулировки. Эти утверждения доказываются, например, по схеме, предложенной в [13, § 5.4, 5.6]; как известно (см., в частности, [25]), переход к кусочно гладкой матрице A не требует каких-либо новых соображений.

Предложение 1. *Задача Неймана, составленная из системы (1.4), условий сопряжения (1.6) и краевых условий (1.5) и*

$$-D(\mathbf{e}^y)A(y)D(\nabla)^t u(y, z) = g(z), \quad (y, z) \in \Upsilon_0, \quad (2.6)$$

с кусочно гладкой правой частью g , имеет единственное (обобщенное) решение $u \in W_2^1(\Pi)^3$ в том и только в том случае, если выполнены условия разрешимости

$$\int_{\Upsilon} g(z)^t V^{s,k}(0, z) dz = 0, \quad s = x, y, z, \quad k = 0, \dots, \kappa_s - 1. \quad (2.7)$$

Подчеркнем, что вектор-функция u , принадлежащая соболевскому классу $W_2^1(\Pi)^3$ и удовлетворяющая (1.4) и (1.5), экспоненциально затухает на бесконечности (при $y \rightarrow +\infty$). Всюду термин “кусочно гладкий” подразумевает, что разрывы могут происходить только в точках (1.2).

Предложение 2. *Смешанная краевая задача, составленная из системы (1.4), условий сопряжения (1.6) и краевых условий (1.5) и*

$$u(y, z) = g(z), \quad (y, z) \in \Upsilon_0, \quad (2.8)$$

с кусочно гладкой правой частью g , имеет единственное решение в виде $u = p + \tilde{u}$, где $p \in \mathcal{P}$ и $\tilde{u} \in W_2^1(\Pi)^3$.

Решение, указанное в предложении 2, вообще говоря, не исчезает на бесконечности (условия затухания представлены в очередном утверждении). Тем не менее, оно выделяется требованием конечности функционала упругой энергии $\mathcal{E}(u, u; \Pi)$ (см. (1.7)). Отметим, что при нарушении условий разрешимости (2.7) задача (1.4), (1.5), (1.6), (2.6) обладает решением, представимым в виде $u = \ell + \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in W_2^1(\Pi)^3$, а ℓ — линейная комбинация полиномиальных решений (2.5). На таком решении интеграл из (1.7) расходится (см. лемму 5.4.9 в [13]).

Предложение 3. Однородная задача (1.4), (1.5), (1.6), (2.8) имеет в точности четыре линейно независимых решения $v^{s,k} = V^{s,2\kappa_s-1-k} + p^{s,k} + \tilde{v}^{s,k}$ с полиномиальным ростом на бесконечности; здесь $p^{s,k} \in \mathcal{P}$, $\tilde{v}^{s,k} \in W_2^1(\Pi)^3$ и $s = x, y, z$, $k = 0, \dots, \kappa_s - 1$. В условиях предложения 2 решение u попадает в пространство $W_2^1(\Pi)^3$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} g(z)^t D(\mathbf{e}^y) A(z) D(\nabla)^t v^{s,k}(0, z) dz = 0.$$

Предложения 1–3 подтверждают, что векторы (2.5) играют весомую роль в утверждениях о существовании решений с различными свойствами. Полиномы, дополняющие $\mathcal{P}$ до $\mathcal{L}$, строятся в следующих разделах.

3. ВЫВОД РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ.

Основываясь на аналогиях, упомянутых в п.1, ищем решения уравнений (1.4), (1.5) в виде

$$u(y, z) = \mathcal{U}^{-2}(y) + \mathcal{U}^{-1}(y, z) + \mathcal{U}^0(y, z) + \mathcal{U}^1(y, z) + \mathcal{U}^2(y, z), \quad (3.2)$$

причем в соответствии с [23] определяем начальные члены так:

$$\mathcal{U}^{-2}(y) = \mathbf{e}^z w_z(y), \quad \mathcal{U}^{-1}(y, z) = \mathbf{e}^x w_x(y) + \mathbf{e}^y w_y(y) - z \mathbf{e}^y \partial_y w_z(y); \quad (3.3)$$

здесь $w = (w_x, w_y, w_z)^t$ — столбец полиномов переменной y , подлежащий дальнейшему определению. Заметим, что $\nabla = \mathbf{e}^y \partial_y + \mathbf{e}^z \partial_z$ (дифференцирование по x отсутствует), т. е.

$$D(\nabla) = D(\mathbf{e}^y) \partial_y + D(\mathbf{e}^z) \partial_z \equiv D_y + D_z. \quad (3.4)$$

Представим операторы L , $B^\pm$ из (1.4), (1.5) как суммы

$$L = L^0 + L^1 + L^2, \quad B^\pm = B^{0\pm} + B^{1\pm}, \quad (3.5)$$

в которых

$$\begin{aligned} L^0 &= -D_z A D_z^t, \quad L^1 = -D_z A D_y^t - D_y A D_z^t, \quad L^2 = -D_y A D_y^t, \\ B^{0\pm} &= \pm D(\mathbf{e}^z) A D_z^t, \quad B^{1\pm} = \pm D(\mathbf{e}^z) A D_y^t. \end{aligned}$$

После подстановки (3.2), (3.5) в (1.4), (1.5) и перегруппировки членов, приходим к рекуррентной последовательности задач на отрезке $\Upsilon = (-H_-, H_+)$

$$\begin{aligned} L^0 \mathcal{U}^j &= -L^1 \mathcal{U}^{j-1} - L^2 \mathcal{U}^{j-2} \equiv F^j \quad \text{при } z \in \Upsilon, \\ B^{0\pm} \mathcal{U}^j &= -B^{1\pm} \mathcal{U}^{j-1} \equiv G^{j\pm} \quad \text{при } z = \pm H_\pm, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $j = -2, \dots, 2$ и $\mathcal{U}^{-3} = \mathcal{U}^{-4} = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что векторы (3.3) удовлетворяют (3.6) при $j = -2$ и $j = -1$; в последнем случае удобно использовать вытекающее из (1.3) равенство

$$D_y^t \mathbf{e}^z = (D_z^t z) \mathbf{e}^y \partial_y. \quad (3.7)$$

Благодаря тому же равенству имеем $D_z^t \mathcal{U}^{-1} + D_y^t \mathcal{U}^{-2} = 0$, а значит, правые части F^0 , $G^{0\pm}$ задачи (3.6) с $j = 0$ приобретают вид

$$\begin{aligned} F^0 &= D_z A D_y^t \mathcal{U}^{-1} + D_y A \{D_z^t \mathcal{U}^{-1} + D_y^t \mathcal{U}^{-2}\} = D_z A \mathcal{V} \mathcal{D}(\partial_y)^t w, \\ G^{0\pm} &= \mp D(\mathbf{e}^z) A D_y^t \mathcal{U}^{-1} = \mp D(\mathbf{e}^z) A \mathcal{V} \mathcal{D}(\partial_y)^t w \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\mathcal{V}(z)$ и $\mathcal{D}(\partial_y)$ — матрицы размерами 6×6 и 3×6 ,

$$\mathcal{V}(z) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\alpha^{-1} z \mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\partial_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \partial_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \partial_y^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

а $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ — единичная и нулевая 3×3 -матрицы. Очевидно, что условия разрешимости

$$\int_{\Upsilon} F^j(z) dz + G^{j+} + G^{j-} = 0 \quad (3.10)$$

задачи (3.6), $j = 0$, выполнены. Таким образом,

$$\mathcal{U}^0(y, z) = \mathcal{X}(z) \mathcal{D}(\partial_y)^t w(y), \quad (3.11)$$

причем $\mathcal{X}$ — матрица-функция размером 3×6 , удовлетворяющая равенствам

$$-D_z A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) = 0 \quad \text{на} \quad \Upsilon, \quad \pm D(\mathbf{e}^z) A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm H_{\pm}. \quad (3.12)$$

Иными словами, столбцы $\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^6$ матрицы $\mathcal{X}$ — решения подобных (3.6) задач со специальными правыми частями. Нормируем эти столбцы условиями

$$\int_{\Upsilon} \mathcal{X}^k(z) dz = 0, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (3.13)$$

В случае $j = 1$ имеем

$$\begin{aligned} F^1 &= D_z A D_y^t \mathcal{U}^0 + D_y A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) \mathcal{D}(\partial_y)^t w, \\ G^{1\pm} &= \mp D(\mathbf{e}^z) A D_y^t \mathcal{U}^0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Поскольку матрица A не зависит от y , из (3.14) следует, что решение задачи (3.6) может быть представлено в виде

$$\mathcal{U}^1 = \mathcal{Y}(z) \mathcal{D}(\partial_y)^t \partial_y w(y). \quad (3.15)$$

Рассмотрим соответствующие условия разрешимости (3.10) — их три. Проекция вектора из левой части (3.10) на оси x и y превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения для столбца w , которые будут указаны далее. При помощи (3.7) и (3.8) обрабатываем проекцию на ось z :

$$\begin{aligned} \int_{\Upsilon} F_z^1 dz + G_z^{1+} + G_z^{1-} &= \int_{\Upsilon} (D_y^t \mathbf{e}^z)^t A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) dz \mathcal{D}^t w = \\ &= \partial_y \int_{\Upsilon} (D_z^t z \mathbf{e}^y)^t A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) dz \mathcal{D}^t w = \\ &= -(\mathbf{e}^y)^t \partial_y \left\{ \int_{\Upsilon} z D_z A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) dz - z D(\mathbf{e}^z) A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) \Big|_{-H_-}^{H_+} \right\} \mathcal{D}^t w = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в соответствии с (3.12).

Обратимся к условиям разрешимости задачи (3.6) при $j = 2$. Интересной является проекция на ось z (как станет ясно в п.4, другие две проекции аннулируются автоматически). Используя (3.7), (3.14), (3.6) с $j = 1$ и (3.8), (3.11), находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Upsilon} F_z^2 dz + G_z^{2+} + G_z^{2-} &= \int_{\Upsilon} (D_y^t \mathbf{e}^z)^t A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) dz = \\ &= -(\mathbf{e}^y)^t \partial_y \left\{ \int_{\Upsilon} z D_z A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) dz - z D(\mathbf{e}^z) A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) \Big|_{-H_-}^{H_+} \right\} = \\ &= (\mathbf{e}^y)^t \partial_y \int_{\Upsilon} z D_y A(D_z^t \mathcal{U}^0 + D_y^t \mathcal{U}^{-1}) dz = \int_{\Upsilon} \{ z \partial_y D_y^t \mathbf{e}^y \}^t A(D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) dz \mathcal{D}^t w. \end{aligned}$$

Выражение из фигурных скобок совпадает с третьим (ось z) столбцом матрицы $\mathcal{V}(z) \mathcal{D}(-\partial_y)^t$ (см. (3.9)). Можно проверить, что первые два столбца (оси x и y) появлялись на том же месте в условиях разрешимости задачи (3.6) при $j = 1$. В итоге получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{D}(-\partial_y) \mathbf{M} \mathcal{D}(\partial_y)^t w(y) = 0, \quad y > 0, \quad (3.16)$$

обеспечивающую построение векторов $\mathcal{U}^j$ из (3.2). Матрица $\mathbf{M}$ имеет размер 6×6 и вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{\Upsilon} \mathcal{V}(z)^t A(z) (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z)) dz = \\ &= \int_{\Upsilon} (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z))^t A(z) (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z)) dz; \end{aligned} \quad (3.17)$$

последнее равенство справедливо в силу (3.12). Ясно, что $\mathbf{M}$ — матрица Грама, построенная по столбцам матрицы $D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}$ при помощи скалярного произведения в $L_2(\Upsilon)^6$. Поскольку эти столбцы линейно независимы в $L_2(\Upsilon)^6$ (благодаря структуре матриц D_z и $\mathcal{V}$; см. (1.3) и (3.9)), $\mathbf{M}$ — положительно определенная матрица.

Разумеется, она симметрическая.

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Для любых гладких столбцов v и w справедлива одномерная формула Грина

$$\int_a^b v^t \mathcal{D}(-\partial_y) \mathbf{M} \mathcal{D}(\partial_y)^t w \, dy = \int_a^b (\mathcal{D}(\partial_y)^t v)^t \mathbf{M} \mathcal{D}(\partial_y)^t w \, dy -$$

$$- (\mathbf{D}(\partial_y)^t v(y))^t \mathbf{N}(\partial_y)^t w(y) \Big|_a^b,$$

в которой $\mathbf{D}(\partial_y)^t$ и $\mathbf{N}(\partial_y)^t = \mathcal{N}_+(\partial_y) \mathbf{M} \mathcal{D}(\partial_y)^t$ — операторы краевых условий Дирихле и Неймана для системы (3.16), а новые матрицы заданы формулами

$$\mathbf{D}(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{\pm}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^{\pm 1} y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^{\pm 1} & 0 \end{pmatrix}$$

При любом y справедливы соотношения

$$\mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}(y) = 0, \quad \mathcal{D}(-\partial_y) \mathcal{N}_-(y)^t = 0, \quad (4.2)$$

$$[\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}(y)]^t = [\mathcal{N}_+(\partial_y) \mathcal{N}_-(y)^t]^{-1}. \quad (4.3)$$

Введем ещё 3×4 -матрицу $\mathbf{T}$, решающую уравнение

$$\mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{P}^t \mathbf{P} \mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{T}(y) = \mathbf{P} \mathcal{N}_-(y)^t, \quad (4.4)$$

в котором матрица $\mathbf{P}$ предназначена для “вычеркивания” нулевых строк в $\mathcal{D}^t$ и $\mathcal{N}_-^t$, а также для уменьшения матрицы $\mathbf{M}$ до размеров 3×3 ,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая (4.4), получаем следующее представление для элементов матрицы $\mathbf{T}(y)$, од-
ночленов переменной y :

$$\mathbf{T}(y) = \begin{pmatrix} m_{22} y & m_{12} y & -m_{23} y^2/2 & m_{23} y \\ m_{12} y & m_{11} y & -m_{13} y^2/2 & m_{13} y \\ m_{23} y^2/2 & m_{13} y^2/2 & -m_{33} y^3/6 & m_{33} y^2/2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Здесь m_{ij} — элементы числовой матрицы

$$\text{diag} \{1, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}\} (\mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{P}^t)^{-1} \text{diag} \{1, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}\}. \quad (4.6)$$

Благодаря формулам (4.2) столбцы $\mathbf{D}^j(y)$ и $\mathbf{T}^j(y)$ матриц $\mathbf{D}(y)$ и $\mathbf{T}(y)$ удовлетворяют системе (3.16) (отметим, что произведение $\mathbf{P}^t \mathbf{P}$ безболезненно удаляется из (4.4)). Наконец, в согласии с (4.3)

$$[\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}^j(y)]^t \mathbf{N}(\partial_y)^t \mathbf{T}^k(y) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, 4. \quad (4.7)$$

Подставим столбцы $\mathbf{D}^j$ и $\mathbf{T}^k$ на место w в правую часть формулы (3.2). В силу (3.3) и (3.11) из $\mathbf{D}^j$ получаются жесткие смещения Φ^j из (1.8). Обозначим Ψ^k результат подстановки $\mathbf{T}^k$. Увеличение индекса q в $\mathcal{U}^q$ приводит к росту порядка дифференцирования w по y . Принимая во внимание степени полиномов в представлении (4.5) матрицы $\mathbf{T}(y)$, получаем, что $\mathcal{U}^2 = 0$ во всех случаях и $\mathcal{U}^1 \neq 0$ лишь при $k = 3$. Эти же соображения позволяют заключить, что векторы Ψ^k удовлетворяют системе (1.4) и краевым условиям (1.5).

Итак, искомые восемь полиномиальных решений (2.5) построены. Осталось вычислить интегралы

$$J_{jk} = \int_{\Gamma} \Phi^j(y, z)^t D(\mathbf{e}^y) A(z) D(\nabla)^t \Psi^k(y, z) dz, \quad (4.8)$$

помогающие дать физическое истолкование полям Ψ^k . Так как $D(\nabla)^t \Phi^j = 0$, благодаря формуле Грина интегралы (4.8), содержащие решения задачи (1.4), (1.5), не зависят от положения сечения полосы, т.е. от y . Далее будет проверено, что в равенстве

$$J_{jk} = \delta_{jk} + N_{jk}, \quad (4.9)$$

отличны от нуля разве лишь числа N_{13} , N_{23} и N_{43} . Благодаря этому свойству обратной для матрицы J_+ с элементами (4.9) оказывается матрица J_- , которая получается заменой в (4.9) знака “+” на “-”. Согласно [13, § 5.4] неособенность матрицы J_+ как раз и означает, что $\Psi^1, \dots, \Psi^4$ — линейно независимые вектор-функции, дополняющие жесткие смещения $\Phi^1, \dots, \Phi^4$ до базиса в $\mathcal{L}$. Пусть ещё Ψ — матрица со

столбцами $\Psi^1, \dots, \Psi^4$, а $\psi^1, \dots, \psi^4$ — столбцы матрицы $\psi = \Psi J_-$. Ясно, что интегралы (4.8), в которых Ψ^k заменены на ψ^k , оказываются равными символу Кронекера δ_{jk} . Таким образом, поле ψ^4 связывается с единичным моментом (относительно оси x), распределенным по сечению полосы. Аналогично ψ^1 , ψ^2 и ψ^3 отвечают единичным силам, действующим в направлении осей x , y и z соответственно. Именно указанные поля играют главенствующую роль в механике при изучении задач теории упругости в полуполосе Π (см. [12] для случая изотропии).

Для проверки (4.9) понадобится

Предложение 4. *Справедливо равенство*

$$\Sigma(z) \equiv D(\mathbf{e}^z) A(z) (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z)) = 0, \quad z \in \Upsilon.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что согласно (3.12) вектор-функция Σ удовлетворяет однородной задаче Дирихле

$$\partial_z \Sigma(z) = 0, \quad z \in \Upsilon; \quad \Sigma(\pm H_{\pm}) = 0.$$

Продолжим преобразования. В соответствии с (3.3) и (3.11) получаем

$$D(\nabla)^t \Psi^k = (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}) \mathcal{D}^t \mathbf{T}^k + (D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) + D_y^t \mathcal{U}^1.$$

Подсчет степеней полиномов показывает, что $D_y^t \mathcal{U}^1 = 0$ при $k = 1, \dots, 4$ и $D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0 \neq 0$ только при $k = 3$. Таким образом,

$$J_{jk} = J_{jk}^0 + J_{jk}^1,$$

причем $J_{j1}^1 = J_{j2}^1 = J_{j4}^1 = 0$, $j = 1, \dots, 4$, и

$$\begin{aligned} J_{jk}^0 &= \int_{\Upsilon} \Phi^j(y, z)^t D(\mathbf{e}^y) A(z) (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z)) dz \mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{T}^k(y), \\ J_{jk}^1 &= \int_{\Upsilon} \Phi^j(y, z)^t D(\mathbf{e}^y) A(z) (D_z^t \mathcal{U}^1(y, z) + D_y^t \mathcal{U}^0(y, z)) dz. \end{aligned}$$

Пусть сначала $j = 1, 2$. Строки $(\Phi^j)^t D(\mathbf{e}^y)$ совпадают с первыми двумя строками матрицы $[\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}^j(y)]^t \mathcal{N}_+(\partial_y) \mathcal{V}(z)^t$, т.е. в силу (3.17) и (4.7) для $j = 1, 2$ и $k = 1, \dots, 4$ имеем

$$J_{jk}^0 = [\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}^j(y)]^t \mathcal{N}_+(\partial_y) \mathbf{M} \mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{T}^k(y) = \delta_{jk}.$$

Теперь положим $j = 3$. Учитывая предложение 4 и вспоминая структуру матриц $D(\mathbf{e}^z)$ и $D(\mathbf{e}^y)$ (см. (3.4)), обнаруживаем, что три нижних строки матрицы $A(D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V})$, на которые при умножении приходятся нетривиальные элементы в $(\mathbf{e}^z)^t D(\mathbf{e}^y)$, содержат только нули. Следовательно,

$$J_{3k}^0 = 0, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (4.10)$$

Обращаясь ещё раз к ключевой формуле (3.7), выводим, что в согласии с (3.14), (3.6), $j = 1$, и (3.8), (3.11) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} J_{3k}^1 &= \int_{\Gamma} (D_z^t z \mathbf{e}^y)^t A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) dz = \\ &= - \int_{\Gamma} z (\mathbf{e}^y)^t D_z A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) dz + z (\mathbf{e}^y)^t D(\mathbf{e}^z) A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) \Big|_{-H_-}^{H_+} = \\ &= \int_{\Gamma} z (\mathbf{e}^y)^t D_y A(z) (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z)) dz \mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{T}^k(y) = \\ &= [\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}^3(y)]^t \mathcal{N}_+(\partial_y) \mathbf{M} \mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{T}^k(y) = \delta_{3,k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В конце выкладки использовались условия (4.7) и соотношение

$$z (\mathbf{e}^y)^t D_y = [\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}^3(y)]^t \mathcal{N}_+(\partial_y) \mathcal{V}(z)^t,$$

вытекающее из определения матриц $\mathbf{D}$, $\mathcal{N}_+$ и $\mathcal{V}$.

Осталось рассмотреть случай $j = 4$, в котором $\Phi^j(y, z) = z \mathbf{e}^y - y \mathbf{e}^z$. Принимая во внимание формулы (4.10) и повторяя выкладку (4.11), находим, что

$$\begin{aligned} J_{4k}^0 + J_{4k}^1 &= \int_{\Gamma} (y \partial_y - 1) (z \mathbf{e}^y)^t D(\mathbf{e}^y) A(z) (D_z^t \mathcal{X}(z) + \mathcal{V}(z)) dz \mathcal{D}(\partial_y)^t \mathbf{T}^k(y) - \\ &- \int_{\Gamma} (z \mathbf{e}^y)^t D(\mathbf{e}^y) A(D_z^t \mathcal{U}^1 + D_y^t \mathcal{U}^0) dz. \end{aligned}$$

Отслеживая порядки полиномов, видим, что вычитаемое отличается от нуля лишь при $k = 3$ — это допускается в (4.9). Соотношение

$$(y\partial_y - 1)(z\mathbf{e}^y)^t D(\mathbf{e}^y) = [\mathbf{D}(\partial_y)^t \mathbf{D}^4(y)]^t \mathcal{N}_+(\partial_y) \mathcal{V}(z)^t$$

вместе с условиями (4.7) заканчивают проверку (4.9) в случае $j = 4$.

5. КОНКРЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ.

Удобно ввести обозначения $A_{(ij)}$ и $\mathbf{M}_{(ij)}$ для 3×3 -блоков матриц A и $\mathbf{M}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{(11)} & A_{(12)} \\ A_{(21)} & A_{(22)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{(11)} & \mathbf{M}_{(12)} \\ \mathbf{M}_{(21)} & \mathbf{M}_{(22)} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда пластина однородная в поперечном направлении и $H_{\pm} = 1/2$. Несложно проверить, что в этом случае решение $\mathcal{X}$ задачи (3.12) и матрица $\mathbf{M}$ из (3.17) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(z) &= -T A_{(22)}^{-1} A_{(21)} \left(z \mathbb{I}, -\alpha^{-1} \left(z^2 - \frac{1}{12} \right) \mathbb{I} \right), \\ \mathbf{M}_{(11)} &= \mathbf{A}, \quad \mathbf{M}_{(12)} = \mathbf{M}_{(21)} = 0, \quad \mathbf{M}_{(22)} = \frac{1}{6} \mathbf{A}, \\ T &= \text{diag} \{ \alpha^{-1}, \alpha^{-1}, 1 \}, \quad \mathbf{A} = A_{(11)} - A_{(12)} A_{(22)}^{-1} A_{(21)}. \end{aligned}$$

Также имеется явная формула для матрицы $\mathcal{Y}(z)$ из (3.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= T A_{(22)}^{-1} \hat{A}_{(22)}^t A_{(22)}^{-1} A_{(21)} \left(\frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{12} \right) \mathbb{I}, -\frac{1}{3} \alpha^{-1} \left(z^3 - \frac{1}{4} z \right) \mathbb{I} \right) - \\ &\quad - T A_{(22)}^{-1} \left[\hat{A}_{(22)} A_{(22)}^{-1} A_{(21)} - \hat{A}_{(21)} \right] \left(\mathbb{O}, \alpha^{-1} \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z \right) \mathbb{I} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $\hat{A}_{(21)}$, $\hat{A}_{(22)}$ — 3×3 -матрицы, составленные из элементов матрицы A ,

$$\hat{A}_{(21)} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \alpha^{-1} a_{21} & \alpha^{-1} a_{22} & \alpha^{-1} a_{23} \\ \alpha a_{51} & \alpha a_{52} & \alpha a_{53} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{(22)} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \alpha^{-1} a_{24} & \alpha^{-1} a_{25} & \alpha^{-1} a_{26} \\ \alpha a_{54} & \alpha a_{55} & \alpha a_{56} \end{pmatrix}.$$

Они появляются при выводе (5.3) в результате применения равенства $D(\mathbf{e}^y) = D(\mathbf{e}^z)R$ с матрицами

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ R_{(21)} & R_{(22)} \end{pmatrix}, \quad R_{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{(22)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\hat{A} = R A = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hat{A}_{(21)} & \hat{A}_{(22)} \end{pmatrix}.$$

В случае переменной матрицы $A(z)$ выражения для $\mathcal{X}$, $\mathbf{M}$ и $\mathcal{Y}$ приобретают более сложный вид. Имеем

$$\mathcal{X}(z) = -T \int_{-H_-}^z A_{(22)}^{-1}(z) A_{(21)}(z) (\mathbb{I}, -\alpha^{-1} z \mathbb{I}) dz + \mathcal{X}_0, \quad (5.4)$$

где постоянная матрица $\mathcal{X}_0$ определяется из условия (3.13), т.е.

$$\mathcal{X}_0 = H^{-1} T \int_{-H_-}^{H_+} (H_+ - z) A_{(22)}^{-1}(z) A_{(21)}(z) (\mathbb{I}, -\alpha^{-1} z \mathbb{I}) dz, \quad H = H_+ + H_-.$$

Воспользовавшись представлением (5.4) для вычисления подынтегрального выражения в формуле (3.17), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{(11)} &= \int_{\Upsilon} \mathbf{A}(\zeta) d\zeta, \quad \mathbf{M}_{(12)} = \mathbf{M}_{(21)} = -\alpha^{-1} \int_{\Upsilon} \zeta \mathbf{A}(\zeta) d\zeta, \\ \mathbf{M}_{(22)} &= \alpha^{-2} \int_{\Upsilon} \zeta^2 \mathbf{A}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Задача для $\mathcal{Y}$ приобретает вид

$$-D_z A D_z^t \mathcal{Y} = D_z A D(\mathbf{e}^y)^t \mathcal{X} + \mathcal{F}(z) + \mathcal{F}_0, \quad (5.6)$$

$$D(\mp \mathbf{e}^z) A D_z^t \mathcal{Y} = \pm D(\mathbf{e}^z) A D(\mathbf{e}^y)^t \mathcal{X}, \quad z = \pm H_{\pm}, \quad (5.7)$$

где

$$\mathcal{F}(z) = D(\mathbf{e}^y) A (D_z^t \mathcal{X} + \mathcal{V}), \quad \mathcal{F}_0 = -H^{-1} \int_{-H_-}^{H_+} \mathcal{F}(z) dz,$$

а постоянная матрица $\mathcal{F}_0$ введена для соблюдения условий разрешимости задачи (3.6) (ранее такие условия приводили к первым двум уравнениям системы (3.16)).

Дважды интегрируя уравнение (5.6) и учитывая условия (5.7), находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \mathcal{Y}_0 - T \int_{-H_-}^z A_{(22)}^{-1}(\zeta) \left\{ \hat{A}_{(22)}^t(\zeta) T^{-1} \mathcal{X}(\zeta) - H^{-1}(\zeta + H_-) \int_{-H_-}^{H_+} \Delta(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-H_-}^{\zeta} \Delta(t) dt \right\} d\zeta, \quad \Delta(t) = \hat{A}_{(22)}(t) T^{-1} \partial_t \mathcal{X}(t) + \hat{A}_{(21)}(t) (\mathbb{I}, -\alpha^{-1} t \mathbb{I}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

причем $\mathcal{Y}_0$ подчинена условию $\int_{-H_-}^{H_+} \mathcal{Y}(z) dz = 0$ (сравни с (3.13)).

Обратимся теперь к случаю слоистых пластин, для которых $A(z) = A^n$, $\mathcal{X}(z) = \mathcal{X}^n$ и $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Y}^n$ при $z \in (H_{n-1}, H_n)$. Выполнив интегрирование в формулах (5.5), обнаруживаем, что

$$\mathbf{M} = \sum_{n=1}^N h_n J_n^t \mathbf{M}_0^n J_n, \quad J_n = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & -\alpha^{-1} H_n^* \mathbb{I} \\ \mathbb{O} & -h_n \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

где h_n и H_n^* — толщина слоя и координата его срединной плоскости,

$$h_n = H_n - H_{n-1}, \quad H_n^* = (H_n + H_{n-1})/2,$$

В (5.9) фигурирует матрица $\mathbf{M}_0^n$, построенная согласно (5.2) для однородной полосы $\mathbb{R}_+ \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ с матрицей Гука A^n , а окаймление $h_n J_n^t$ и J_n преобразует $\mathbf{M}_0^n$ в матрицу (3.17), отвечающую отдельно взятому слою $\mathbb{R}_+ \times (H_{n-1}, H_n)$ пластины.

Формулы (5.4) и (5.8) также превращаются в алгебраические, но остаются весьма громоздкими (в особенности для $\mathcal{Y}$). Для вычисления указанных матриц составлена компьютерная программа, выполняющая необходимые операции и преобразующая ответ к обозримой форме. Так, например, для составной полуполосы ($H_0 = -1/2$, $H_1 = 0$, $H_2 = 1/2$ в (1.2)) имеем

$$\mathcal{X}^n = T \left(-z \Lambda^{(n)} + \frac{1}{8} [\Lambda^{(2)} - \Lambda^{(1)}], \quad \alpha^{-1} [z^2 \Lambda^{(n)} - \frac{1}{24} (\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)})] \right),$$

$$\Lambda^{(n)} = [A_{(22)}^n]^{-1} A_{(21)}^n, \quad n = 1, 2.$$

Положим ещё $\mathcal{Y}^n = (\mathcal{Y}_1^n, -\alpha^{-1}(-1)^n \mathcal{Y}_2^n)$, где $\mathcal{Y}_1^n$ и $\mathcal{Y}_2^n$ — матрицы размером 3×3 . Тогда

$$\mathcal{Y}_1^1 = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{96} \right) S^{1,1} - \frac{1}{8} \left(z + \frac{1}{8} \right) S^{1,2} - \frac{1}{64} S^{2,1} - \frac{1}{192} S^{2,2} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(z^2 + z + \frac{1}{12} \right) (R^{1,1} - R^{1,2}) + \frac{1}{48} (R^{2,2} - R^{2,1}), \quad (5.10)$$

$$\mathcal{Y}_2^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8}z - z^3 \right) S^{1,1} + \frac{1}{24} \left(z + \frac{1}{8} \right) S^{1,2} - \left(\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{8}z - \frac{1}{64} \right) R^{1,1} +$$

$$+ \frac{1}{8} \left(z^2 + z + \frac{1}{12} \right) R^{1,2} - \frac{1}{192} S^{2,1} - \frac{1}{96} R^{2,1} - \frac{1}{64} R^{2,2}, \quad (5.11)$$

причем

$$S^{i,j} = T[A_{(22)}^i]^{-1} [\hat{A}_{(22)}^i]^t [A_{(22)}^j]^{-1} A_{(21)}^j, \quad R^{i,j} = T[A_{(22)}^i]^{-1} \left\{ \hat{A}_{(22)}^j [A_{(22)}^j]^{-1} A_{(21)}^j - \hat{A}_{(21)}^j \right\}.$$

Формулы для $\mathcal{Y}_1^2$ и $\mathcal{Y}_2^2$ получаются из (5.10) и (5.11) заменами в $S^{i,j}$, $R^{i,j}$ индексов $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$ и переменной $z \mapsto -z$.

В силу (4.5) и (4.6) при определении 3×4 -матрицы $\mathbf{T}$ из (4.4) приходится обращаться лишь 3×3 -матрицу $\mathbf{PMP}$. Эта операция, а также вычисление интегралов (4.8), необходимых для ортогонализации полиномиальных решений, выполняются на компьютере даже для произвольной слоистой пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- [1] Назаров С.А. Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы матем. анализа. Вып. 17. СПб: изд-во СПбГУ. 1997. С. 101–152.
- [2] Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates. Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, no. 1. P. 1–33.
- [3] Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикл. матем. и механика. 1962. Т. 26, № 4. С. 668–686.
- [4] Назаров С.А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестник ЛГУ. Серия 1. 1982. Вып. 2 (№ 7). С. 65–68.
- [5] Зорин И.С., Назаров С.А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикладная матем. и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.
- [6] Mazja W.G., Nasarov S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 2. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. 319 S.
- [7] Dauge M., Gruais I. Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastree // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. T. 321. P. 375–380.

- [8] Гольденвейзер А.Л., Колос А.В. К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин // Прикладная матем. и механика. 1965. Т. 29, № 1. С. 141–161.
- [9] Олейник О.А., Иосифьян Г.А. Об условиях затухания и предельном поведении на бесконечности решений системы уравнений теории упругости // Доклады АН СССР. 1981. Т. 258, № 3. С. 550–553.
- [10] Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
- [11] Gregory R.D., Wan F.V.M. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. V. 14, no. 1. P. 27–64.
- [12] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1988. 712 с.
- [13] Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994. 525 p.
- [14] Mielke A. On the justification of plate theories in linear elasticity theory using exponential decay estimates // Journal of Elasticity. 1995. V. 38. P. 165–208.
- [15] Heywood J.G., Rannacher R., Turek S. Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations // Intern. J. Num. Meth. in Fluids. 1996. V. 22. P. 325–352.
- [16] Sofronov I.L. Non-reflecting inflow and outflow in a wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl. 1998. 221. P. 92–115.
- [17] Specovius-Neugebauer M. Approximation of the Stokes Dirichlet problem in domains with cylindrical outlets // SIAM J. Math. Anal. 1999. V. 30. № 7. P. 645–677.
- [18] Panasenko G.P. Method of asymptotic partial decomposition of domain // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 1998. V. 8, no. 1. P. 139–156.

- [19] *Панасенко Г.П., Резцов М.В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Доклады АН СССР. 1987. Т. 294, № 5. С. 1061–1065.
- [20] *Резцов М.В.* Композиционные пластины, армированные высокомодульными волокнами // Журнал вычислительной математики и матем. физики. 1990. Т. 30, № 9. С. 1394–1404.
- [21] *Леора С.Н., Назаров С.А., Проскура А.В.* Вывод предельных уравнений для эллиптических краевых задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Журнал вычислительной матем. и матем. физики. 1986. Т. 26, № 7. С. 1032–1048.
- [22] *Назаров С.А.* Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб: изд-во СПбГУ. 1997. С. 167–192.
- [23] *Назаров С.А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 5. С. 1–92.
- [24] *Назаров С.А.* Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // Записки научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 1997. Т. 249. С. 212–231.
- [25] *Nicaise S., Sändig A.M.* General interface problems. 1, 2. // Math. Meth. Appl. Sci. 1994. V. 17. P. 395–450.