

УДК 532.59

Волновые движения в двухслойной жидкости, вызванные малыми колебаниями цилиндра, пересекающего границу раздела

О.В. Мотыгин, И.В. Стурова

В линейной постановке рассмотрена плоская задача об установившихся малых колебаниях горизонтального цилиндра, помещенного на границе раздела двух жидкостей разной плотности и неограниченной глубины. Выведены граничные интегральные уравнения для распределения поверхностных источников. Исследовано поведение распределенных особенностей в точках пересечения контура тела с границей раздела. Методом мультипольных разложений решена задача о колебаниях кругового цилиндра. Выполнены расчеты коэффициентов присоединенной массы и демпфирования в радиационной задаче и коэффициента отражения в задаче рассеяния набегающей волны плавающим телом.

Согласно линейной теории гидродинамической качки [1], для исследования поведения плавающего тела под действием набегающих волн необходимо решить радиационную и дифракционную задачи, соответственно о вынужденных колебаниях тела и рассеянии волн на неподвижном теле. Эти задачи интенсивно изучаются уже в течение длительного времени. Достаточно полно рассмотрен случай однородной жидкости со свободной поверхностью. Значительно более сложным является решение задачи о качке тела, частично или полностью расположенного в слое переменной плотности. Наиболее простым примером такой задачи может служить исследование качки тела, плавающего на границе раздела в двухслойной жидкости. В частном случае однородной жидкости со свободной поверхностью методы решения плоской и пространственной задач для тел различной формы представлены в [2], подробные результаты в плоском случае для кругового цилиндра даны в [2,3]. Подробно изучены теоретически [4,5,6] и экспериментально [7]

вертикальные колебания плоского тонкого тела, помещенного на границе раздела двухслойной жидкости.

Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость, состоящая из двух слоев разной плотности. Обе жидкости в горизонтальном и соответствующем вертикальном направлениях считаются неограниченными. Течение жидкости в каждом из слоев предполагается потенциальным. Двухслойная жидкость без свободной поверхности допускает только одномодовое волновое движение, что позволяет выразить решение дифракционной задачи через решение радиационной задачи для горизонтальных и вертикальных колебаний тела [8, 9].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об установившихся волновых движениях, вызванных в первоначально покоящейся жидкости вынужденными малыми колебаниями тела с частотой ω и амплитудами η_j ($j = \overline{1, 3}$) соответственно для горизонтальных, вертикальных и вращательных колебаний.

Пусть граница раздела совпадает с осью x , а y — вертикальная координата, положительная в верхней жидкости. Тело занимает область D , верхний слой жидкости плотности ρ_1 — область $W^{(1)} = L^{(1)} \setminus D$, а нижний слой жидкости плотности $\rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) — область $W^{(2)} = L^{(2)} \setminus D$. Здесь $L^{(s)} = \{(x, y) : |x| < \infty, (-1)^s y < 0\}$ — слои в отсутствие тела, а верхний индекс $s = 1, 2$ используется в работе для обозначения принадлежности соответственно верхнему или нижнему слою. Контур тела $\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$ имеет с границей раздела ($y = 0$) две общие точки $P_{\pm} = (\pm b, 0)$ и $\Gamma^{(s)}$ — кривая класса C^2 . Односторонняя касательная к $\Gamma^{(s)}$ в точке $P_{\pm}$ образует с лучом $\{y = 0, \pm x > b\}$ угол $\beta_{\pm}^{(s)} \neq 0, \pi$.

Считая возмущенное движение жидкости установившимся, полный потенциал скоростей запишем в виде

$$\Phi^{(s)}(x, y, t) = \operatorname{Re} \left[i\omega \sum_{j=1}^3 \eta_j \phi_j^{(s)}(x, y) \exp(i\omega t) \right] \quad (1.1)$$

где $\phi_j^{(s)}$ — радиационные потенциалы, соответствующие колебаниям тела по трем степеням свободы.

Потенциалы $\phi_j^{(s)}$ удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$\Delta \phi_j^{(s)} = 0 \quad (x, y) \in W^{(s)} \quad (s = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y}, \quad (1 + \varepsilon)\nu \phi_j^{(2)} - \nu \phi_j^{(1)} = \varepsilon \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} \quad (y = 0, |x| > b) \quad (1.3)$$

$$\nabla \phi_j^{(s)} \rightarrow 0 \quad ((-1)^{s+1}y \rightarrow +\infty) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(s)}}{\partial n} = n_j \quad (x, y) \in \Gamma^{(s)}. \quad (1.5)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, $\nu = \omega^2/g$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — внутренняя нормаль к контуру Γ и для удобства введены обозначения $n_1 = n_x$, $n_2 = n_y$, $n_3 = (y - y_0)n_1 - (x - x_0)n_2$, где x_0, y_0 — координаты точки, относительно которой совершаются вращательные колебания тела. В дальнейшем поле следует потребовать выполнения условий излучения. Поскольку области $W^{(s)}$ содержат угловые точки, в которых решение задачи (1.2)–(1.5) может иметь неинтегрируемые особенности, то необходимо дополнить задачу условием локальной конечности энергии

$$\int_{E \cap W^{(s)}} |\nabla \phi_j^{(s)}|^2 dx dy < \infty \quad (1.6)$$

где E — произвольный компакт, включающий точки $P_{\pm}$.

Гидродинамическая нагрузка, действующая на колеблющееся тело, представляет собой силы $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ и момент F_3 , которые без учета гидростатической составляющей имеют вид

$$F_k = \sum_{j=1}^3 \eta_j \tau_{kj} \quad (k = \overline{1, 3})$$

$$\tau_{kj} = \omega^2 \sum_{s=1}^2 \rho_s \int_{\Gamma^{(s)}} \phi_j^{(s)} n_k d\Gamma = \omega^2 \mu_{kj} - i\omega \lambda_{kj} \quad (1.7)$$

где μ_{kj} и λ_{kj} — коэффициенты присоединенной массы и демпфирования соответственно. Зная зависимости этих коэффициентов от частоты ω , можно определить в общем случае траекторию свободных или вынужденных колебаний тела при различных начальных условиях в результате решения системы интегродифференциальных уравнений его движения (см., например, [10]). При колебаниях тела с одной степенью свободы этот метод приводит к уравнению, используемому в [4, 5, 6].

2. Граничные интегральные уравнения. Решение задачи (1.2)–(1.6) для тела произвольной формы можно получить с помощью метода особенностей. Вводя неизвестное распределение источников $\sigma_j^{(s)}(z)$ соответственно на контурах $\Gamma^{(s)}$, потенциалы $\phi_j^{(s)}$ запишем в виде

$$\phi_j^{(s)}(z) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^{(\ell)}} \sigma_j^{(\ell)} G^{(s,\ell)}(z, \zeta) d\Gamma_{\zeta}, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \quad (s = 1, 2) \quad (2.1)$$

Здесь $G^{(s,\ell)}(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина рассматриваемой задачи, s — номер слоя, содержащего точку наблюдения (x, y) , источник (ξ, η) помещен в слой с номером ℓ .

Функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{x,y} G^{(s,\ell)} = 2\pi\delta(x - \xi, y - \eta) \quad (x, y) \in L^{(s)} \quad (2.2)$$

граничным условиям, аналогичным (1.3), (1.4), и условию излучения в дальнем поле. В (2.2) δ — дельта-функция Дирака. В [11] даны следующие представления для функции Грина $G^{(s,\ell)}(z, \zeta)$

$$\begin{aligned} G^{(1,1)} &= \ln |z - \zeta| + e_1 \ln |z - \bar{\zeta}| - e_2 \left[pv \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+\eta)}}{k - k_0} \cos k(x - \xi) dk - \right. \\ &\quad \left. - i\pi e^{-k_0(y+\eta)} \cos k_0(x - \xi) \right] \\ G^{(2,1)} &= e_2 \left[\ln |z - \zeta| + pv \int_0^\infty \frac{e^{k(y-\eta)}}{k - k_0} \cos k(x - \xi) dk - i\pi e^{k_0(y-\eta)} \cos k_0(x - \xi) \right] \\ G^{(1,2)} &= e_3 \left[\ln |z - \zeta| + pv \int_0^\infty \frac{e^{k(\eta-y)}}{k - k_0} \cos k(x - \xi) dk - i\pi e^{k_0(\eta-y)} \cos k_0(x - \xi) \right] \\ G^{(2,2)} &= \ln |z - \zeta| - e_1 \ln |z - \bar{\zeta}| - e_3 \left[pv \int_0^\infty \frac{e^{k(y+\eta)}}{k - k_0} \cos k(x - \xi) dk - \right. \\ &\quad \left. - i\pi e^{k_0(y+\eta)} \cos k_0(x - \xi) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение, символы pv показывают, что интегралы вычисляются в смысле главного значения,

$$k_0 = \frac{\nu}{e_1}, \quad e_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad e_2 = \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad e_3 = \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

С использованием формулы скачка нормальной производной потенциала простого слоя (2.1) условие непротекания на поверхности тела (1.5) приводит к системе интегральных уравнений

$$\pi \sigma_j^{(s)}(z) - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma^{(\ell)}} \sigma_j^{(\ell)}(\zeta) \frac{\partial G^{(s,\ell)}}{\partial n_z}(z, \zeta) d\Gamma_\zeta = n_j(z) \quad (s = 1, 2) \quad (2.4)$$

где интеграл представляет собой так называемое прямое значение интеграла двойного слоя.

Обзор результатов, составляющих теорию интегральных уравнений на нерегулярных кривых и поверхностях, может быть найден в [12, гл. 4]. Для рассматриваемого уравнения (2.4) такими нерегулярными точками являются конечные точки контуров $\Gamma^{(s)}$. Особенностью данного класса интегральных уравнений является потеря свойства компактности соответствующих операторов. Тем не менее (см. [12, гл. 4, § 1]) известны достаточные условия, позволяющие доказать справедливость теорем Фредгольма для конкретных интегральных уравнений и систем. Свойство фредгольмовости является важной характеристикой интегрального уравнения или системы, в частности при численном исследовании помогает обосновать аппроксимацию интегрального оператора.

Следуя [12] и работе [13], в которой рассматривалась задача о движении в однородной жидкости частично погруженного тела, рассмотрим весовые пространства $C_\kappa(\Gamma)$, состоящие из непрерывных на $\text{int}\Gamma^{(s)}$ функций, имеющих конечную норму

$$\|\sigma\|_\kappa = \sup \left\{ |y|^{1-\kappa} |\sigma(z)| : z \in \text{int}\Gamma^{(s)} \right\} \quad (0 \leq \kappa \leq 1)$$

Хотя оператор системы (2.4) некомпактен, используя схему [13] и представления функций Грина (2.3), можно доказать, что выполнение неравенства

$$\max_{i=1,2} \left\{ \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - 2\beta_{\pm}^{(i)}|}{\sin \kappa \pi} + e_1 \max_{\pm} \frac{\sin \kappa |\pi - \alpha_{\pm}|}{\sin \kappa \pi} \right\} < 1 \quad (2.5)$$

где $\alpha_{\pm} = \beta_{\pm}^{(1)} + \beta_{\pm}^{(2)}$, обеспечивает фредгольмовость уравнения (2.4) в пространстве $C_\kappa(\Gamma)$. Тем самым, условие (2.5) очевидно выполнено для тел без излома на границе раздела сред различной плотности, поскольку в этом случае $\alpha_{\pm} = \pi$.

Исследуем поведение распределения особенностей $\sigma_j^{(s)}(z)$ на концах интервала интегрирования. Для определенности будем рассматривать левую точку пересечения контура $\Gamma^{(s)}$ с линией $y = 0$ и опускать индексы, отмечающие принадлежность к данной точке, так что $P = P_-$, $\beta^{(s)} = \beta_-^{(s)}$. Пусть (r, ϑ) — полярная система координат с центром в точке P :

$$x = -b - r \cos \vartheta, \quad y = -r \sin \vartheta$$

Используя общие теоремы об асимптотиках решений эллиптических краевых задач в областях с нерегулярной границей [14] и учитывая предположение (1.6) и указанную выше гладкость контуров $\Gamma^{(s)}$, можно показать (ср. [13]), что

$$\phi_j^{(s)}(r, \vartheta) = \phi_j^{(s)}(P) + c^{(s)} r^{\pi/\beta^{(s)}} \cos \frac{\pi \vartheta}{\beta^{(s)}} + (-1)^s n_j^{(s)}(P) \frac{\cos \vartheta}{\sin \beta^{(s)}} + O(r^{1+\delta}) \quad (2.6)$$

где $\delta > 0$, $c^{(s)}$ — некоторые постоянные, $n_j^{(s)}(P)$ — значение функции $n_j(z)$ в конечной точке контура $\Gamma^{(s)}$ ($n_j(P) = n_j^{(1)}(P) = n_j^{(2)}(P)$ для тел без излома). При этом асимптотика (2.6) допускает по крайней мере однократное дифференцирование, тем самым из (2.6) в частности вытекает ограниченность поля скоростей в точках $P_{\pm}$. Возможность применения схем [14] для задач, поставленных в областях с сопряжением, обоснована [15].

Далее, следуя [12, гл. 5, § 2] воспользуемся тем, что из свойств потенциала простого слоя (2.1) (непрерывность при переходе через контур и формула скачка нормальной производной) следует, что

$$\sigma_j^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \psi_j^{(s)}}{\partial n} - \frac{\partial \phi_j^{(s)}}{\partial n} \right) \quad (2.7)$$

где $\psi_j^{(s)}$ — решение вспомогательной задачи в двухслойной жидкости, заполняющей область D и удовлетворяющей условию Дирихле на контурах $\Gamma^{(s)}$:

$$\Delta \psi_j^{(s)} = 0 \quad (x, y) \in D^{(s)} = D \cap L^{(s)} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \psi_j^{(2)}}{\partial y}, \quad (1 + \varepsilon) \nu \psi_j^{(2)} - \nu \psi_j^{(1)} = \varepsilon \frac{\partial \psi_j^{(1)}}{\partial y} \quad (y = 0, |x| < b) \quad (2.9)$$

$$\psi_j^{(s)} = \phi_j^{(s)} \quad (x, y) \in \Gamma^{(s)}. \quad (2.10)$$

$$\int_{D^{(s)}} |\nabla \psi_j^{(s)}|^2 dx dy < \infty \quad (2.11)$$

Асимптотики решения задачи (2.8)–(2.11) имеют вид

$$\psi_j^{(s)}(r, \vartheta) = \psi_j^{(s)}(P) + d^{(s)} r^{\pi/2\alpha^{(s)}} \cos \frac{\pi\vartheta}{2\alpha^{(s)}} + \phi_j^{(s)}(P) \frac{\cos \vartheta}{\cos \beta^{(s)}} + O(r^{1+\delta}) \quad (2.12)$$

где $\delta > 0$, $d^{(s)}$ — некоторые постоянные и $\alpha^{(s)} = \pi - \beta^{(s)}$. Тем самым, ввиду (2.6), (2.12) и (2.7), имеем

$$\sigma_j^{(s)}(r) \sim a^{(s)} + b^{(s)} r^{\lambda^{(s)}}, \quad \lambda^{(s)} = \frac{2\beta^{(s)} - \pi}{2(\pi - \beta^{(s)})} \quad (2.13)$$

где $a^{(s)}$, $b^{(s)}$ — некоторые постоянные. Из (2.13) следует, что при $\beta_{\pm}^{(s)} < \pi/2$ функция $\sigma_j^{(s)}$ в общем случае имеет слабую степенную особенность с показателем $\lambda^{(s)} \in (-1/2, 0)$ в конечной точке P кривой $\Gamma^{(s)}$, хотя возможно $b^{(s)} = 0$ для некоторых частных наборов данных задачи (1.1)–(1.6). Отметим, что для тел без излома при $\beta^{(1)} = \beta^{(2)} = \pi/2$ особенность отсутствует ($\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$), при всех других значениях углов один из показателей $\lambda^{(s)}$ отрицателен. Наличие особенности несомненно следует учитывать, в частности, при численном нахождении решений (2.4).

3. Метод мультипольных разложений. Для кругового контура решение поставленной задачи более эффективно получить с помощью метода мультипольных разложений. Это решение гарантирует высокую точность и может служить тестом для численных методов, ориентированных на тела произвольной геометрии. Радиационная и дифракционная задачи для кругового цилиндра, полностью погруженного в нижнем слое двухслойной жидкости конечной глубины, ограниченной сверху либо твердой стенкой, либо свободной поверхностью, рассмотрены в [9]. Для цилиндра, пересекающего границу раздела, мультипольные разложения построены по аналогии с [2], где изучен частный случай данной задачи: колебания тела, плавающего на свободной поверхности бесконечно глубокой однородной жидкости.

Пусть круговой контур Γ описывается уравнением $x^2 + (y - h)^2 = a^2$, где a — радиус цилиндра, h — вертикальная координата центра цилиндра. Для кругового контура возможны колебания только по двум степеням свободы: горизонтальные

($j = 1$) и вертикальные ($j = 2$). Решение задачи (1.2)–(1.6) ищем в виде

$$\phi_1^{(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m S_m^{(s)}, \quad \phi_2^{(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m C_m^{(s)} \quad (3.1)$$

где функции $S_m^{(s)}, C_m^{(s)}$ представляют собой соответственно антисимметричные и симметричные мультипольные потенциалы, удовлетворяющие уравнениям (1.2) и всем граничным условиям, за исключением условия непротекания на поверхности тела (1.5), а неизвестные постоянные A_m и B_m определяются из этого граничного условия. Мультиполи помещаются в центр контура Γ .

Следуя [2], находим выражения для мультипольных потенциалов. Введем две дополнительные полярные системы координат: r, θ с центром в точке $(0, h)$ и R, τ с центром в точке $(0, -h)$

$$r = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}, \quad \theta = \arctg \left[\frac{x}{y - h} \right], \quad R = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}, \quad \tau = \arctg \left[\frac{x}{y + h} \right]$$

Определим следующие индексы $i = 3/2 \mp 1/2$, $j = 3/2 \pm 1/2$. В последующих формулах для потенциалов мультипольных решений следует согласованно фиксировать либо верхние, либо нижние знаки в символах $\pm, \mp$. Верхние (нижние) знаки отвечают случаю, когда центр цилиндра находится в нижней (верхней) жидкости.

Антисимметричные мультипольные потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} S_1^{(i)} &= \mp a \frac{\partial}{\partial x} G^{(i,j)}(x, y; 0, h) = -a e_{j+1} k_0 W_s^{(i)} \\ S_1^{(j)} &= \mp a \frac{\partial}{\partial x} G^{(j,j)}(x, y; 0, h) = a \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\sin \tau}{R} + e_{j+1} k_0 W_s^{(j)} \right) \\ S_m^{(i)} &= \mp \frac{e_{j+1} k_0 a^m}{m-1} \frac{\sin(m-1)\theta}{r^{m-1}} \quad (m \geq 2) \\ S_m^{(j)} &= a^m \left\{ \frac{\sin m\theta}{r^m} - (-1)^m \frac{\sin m\tau}{R^m} + \frac{k_0}{m-1} \left[\mp \frac{\sin(m-1)\theta}{r^{m-1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^m e_1 \frac{\sin(m-1)\tau}{R^{m-1}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Симметричные мультипольные потенциалы

$$\begin{aligned}
 C_0^{(i)} &= G^{(i,j)}(x, y; 0, h) = e_{j+1} \left[\ln \frac{r}{a} + W_c^{(i)} \right] \\
 C_0^{(j)} &= G^{(j,j)}(x, y; 0, h) = \ln \frac{r}{a} \mp e_1 \ln \frac{R}{a} - e_{j+1} W_c^{(j)} \\
 C_1^{(j)} &= a \left[\frac{\cos \theta}{r} - \frac{\cos \tau}{R} + k_0 \left(\pm \ln \frac{r}{a} - e_1 \ln \frac{R}{a} \right) \right] \\
 C_1^{(i)} &= \pm a e_{j+1} k_0 \ln \frac{r}{a}, \quad C_m^{(i)} = \mp \frac{e_{j+1} k_0 a^m \cos(m-1)\theta}{m-1} \frac{1}{r^{m-1}} \\
 C_m^{(j)} &= a^m \left\{ \frac{\cos m\theta}{r^m} + (-1)^m \frac{\cos m\tau}{R^m} + \frac{k_0}{m-1} \left[\mp \frac{\cos(m-1)\theta}{r^{m-1}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - e_1 (-1)^m \frac{\cos(m-1)\tau}{R^{m-1}} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 W_s^{(p)}(x, y) &= p v \int_0^\infty \frac{e^{kY_p}}{k - k_0} \sin kx \, dk - i\pi e^{k_0 Y_p} \sin k_0 x = \\
 &= \text{Im} [e^{Z_p} E_1(Z_p)] + \pi e^{k_0 Y_p} \text{sgn}(x) (\cos k_0 x - i \sin k_0 |x|) \\
 W_c^{(p)}(x, y) &= p v \int_0^\infty \frac{e^{kY_p}}{k - k_0} \cos kx \, dk - i\pi e^{k_0 Y_p} \cos k_0 x = \\
 &= \text{Re} [e^{Z_p} E_1(Z_p)] - i\pi e^{k_0 Y_p} (\cos k_0 x - i \sin k_0 |x|) \\
 p &= 1, 2, \quad Y_p = (-1)^p y - |h|, \quad Z_p = k_0 [ix + Y_p]
 \end{aligned}$$

Здесь E_1 — интегральная показательная функция [16]. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ значения $S_m^{(2)}, C_m^{(2)}$ совпадают с используемыми в [2].

Введенные мультипольные разложения могут быть использованы как для цилиндра, пересекающего границу раздела, так и для полностью погруженного в один из слоев. В данной работе будет рассматриваться лишь случай $0 \leq |h| < a$. В точках пересечения контура Γ с невозмущенной границей раздела $b = a \sin \alpha$, где $\alpha = \arccos(|h|/a)$.

Далее подробно рассмотрим случай, когда центр цилиндра располагается в нижней жидкости ($h \leq 0$). Решение задачи с мультиполями в верхней жидкости ($h \geq 0$) аналогично. Продифференцируем (3.1) с учетом (3.2), (3.3) по r и подставим полученные значения при $r = a$ в граничное условие (1.5). Затем умножим это равенство последовательно на $\sin n\theta$ ($\cos n\theta$) для горизонтальных (вертикальных) колебаний и проинтегрируем по θ в интервале $0 \leq \theta \leq \pi$. Учитывая, что

для кругового цилиндра $n_1 = -\sin \theta$, $n_2 = -\cos \theta$, получим следующие системы линейных уравнений для горизонтальных и вертикальных колебаний

$$A_1 \left[s_{1,n} + T_{2,n} - \frac{\pi}{2} \delta_{1,n} + e_3 k_0 (T_{1,n} + k_0 L_n) \right] + \sum_{m=2}^{\infty} A_m \left\{ m \left[s_{n,m} + T_{m+1,n} - \frac{\pi}{2} \delta_{m,n} \right] + k_0 \left[\frac{\pi}{2} \delta_{n,m-1} + e_1 (s_{n,m-1} + T_{m,n}) \right] \right\} = \frac{\pi a}{2} \delta_{1,n} \quad (n \geq 1) \quad (3.4)$$

$$B_0 (\pi - \alpha - D_{1,0} + e_3 k_0 M_0) + B_1 \{ c_{1,0} + D_{2,0} + k_0 [\pi + e_1 (\alpha + D_{1,0})] \} + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} B_m [m (c_{m,0} + D_{m+1,0}) + e_1 k_0 (c_{m-1,0} + D_{m,0})] = 0 \quad (3.5) \\ B_0 (e_3 k_0 M_n - c_{n,0} - D_{1,n}) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left\{ k_0 \left[\frac{\pi}{2} \delta_{m-1,n} + e_1 (c_{m-1,n} + D_{m,n}) \right] + \right. \\ \left. + m \left(D_{m+1,n} - \frac{\pi}{2} \delta_{m,n} + c_{m,n} \right) \right\} = \frac{\pi a}{2} \delta_{1,n} \quad (n \geq 1)$$

Здесь $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера,

$$s_{n,m} = \int_0^{\alpha} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\alpha}{n-m} - \frac{\sin(n+m)\alpha}{n+m} \right]$$

$$c_{n,m} = \int_0^{\alpha} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+m)\alpha}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\alpha}{n-m} \right]$$

$$T_{m,n} = \int_{\alpha}^{\pi} R^{-m} \sin(\theta + m\beta) \sin n\theta \, d\theta, \quad \beta = \pi - \tau = \arctg \left[\frac{\sin \theta}{2|h|/a - \cos \theta} \right]$$

$$L_n = \int_{\alpha}^{\pi} (W_s^{(2)} \cos \theta + W_c^{(2)} \sin \theta) \sin n\theta \, d\theta + \int_0^{\alpha} (W_s^{(1)} \cos \theta - W_c^{(1)} \sin \theta) \sin n\theta \, d\theta$$

$$D_{m,n} = \int_0^{\alpha} R^{-m} \cos(\theta + m\beta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$M_n = \int_{\alpha}^{\pi} (W_s^{(2)} \sin \theta - W_c^{(2)} \cos \theta) \cos n\theta \, d\theta - \int_0^{\alpha} (W_s^{(1)} \sin \theta + W_c^{(1)} \cos \theta) \cos n\theta \, d\theta$$

При численном решении бесконечных систем линейных уравнений (3.4), (3.5) используется метод редукции и учитывается только конечное число членов, необходимое для достижения заданной точности. Интегралы в коэффициентах этих систем находятся при помощи численных методов.

После определения A_m и B_m можно найти все характеристики движения жидкости. Гидродинамическая нагрузка согласно (1.7) равна

$$\begin{aligned}\tau_{11} = & -2a\omega^2\rho_2\left\{A_1\left[e_2k_0P + \frac{\pi}{2} - s_{1,1} + H_1\right] + \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} A_m\left[\frac{k_0}{m-1}\left(e_1(H_{m-1} + s_{1,m-1}) - \frac{\pi}{2}\delta_{m-1,1}\right) + H_m - s_{1,m}\right]\right\} \\ \tau_{22} = & -2a\omega^2\rho_2\left\{B_0(e_2Q - e_1U) + B_1\left(\frac{\pi}{2} - c_{1,1} + X_1 - e_1k_0U\right) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=2}^{\infty} B_m\left[X_m - c_{1,m} - \frac{k_0}{m-1}\left(\frac{\pi}{2}\delta_{m-1,1} - e_1(X_{m-1} + c_{1,m-1})\right)\right]\right\}\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}P = & (1 + \varepsilon) \int_{\alpha}^{\pi} W_s^{(2)} \sin \theta \, d\theta - \int_0^{\alpha} W_s^{(1)} \sin \theta \, d\theta \\ Q = & \int_0^{\alpha} W_c^{(1)} \cos \theta \, d\theta - (1 + \varepsilon) \int_{\alpha}^{\pi} W_c^{(2)} \cos \theta \, d\theta, \quad U = \int_{\alpha}^{\pi} \cos \theta \ln \frac{R}{a} \, d\theta \\ H_m = & \int_{\alpha}^{\pi} R^{-m} \sin m\beta \sin \theta \, d\theta, \quad X_m = \int_{\alpha}^{\pi} \cos m\beta \cos \theta \ln \frac{R}{a} \, d\theta\end{aligned}$$

Для кругового цилиндра недиагональные коэффициенты гидродинамической нагрузки равны нулю $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$.

Вдали от цилиндра при $x \rightarrow \pm\infty$ потенциалы волнового движения согласно (3.2), (3.3) имеют вид

$$\begin{aligned}(\phi_1^{(1)}, \phi_1^{(2)}) = & \pm(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})\chi_1 \exp(\mp i k_0 x), \quad (\phi_2^{(1)}, \phi_2^{(2)}) = \pm(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})\chi_2 \exp(\mp i k_0 x) \\ \psi^{(1)} = & -e^{-k_0 y}, \quad \psi^{(2)} = e^{k_0 y}, \quad \chi_1 = a\pi e_3 k_0 A_1 e^{k_0 h}, \quad \chi_2 = i\pi e_3 B_0 e^{k_0 h}\end{aligned}$$

Аналогично, в случае когда центр цилиндра располагается в верхней жидкости

$$\chi_1 = -\pi a e_2 k_0 A_1 e^{-k_0 h}, \quad \chi_2 = -i\pi e_2 B_0 e^{-k_0 h}$$

Существуют соотношения эквивалентности, которые дают связь между коэффициентами демпфирования и амплитудами волнового движения в дальнем поле [17]

$$\lambda_{11} = \omega\rho_1(2 + \varepsilon)|\chi_1|^2, \quad \lambda_{22} = \omega\rho_1(2 + \varepsilon)|\chi_2|^2 \quad (3.7)$$

Выполнение этих равенств служит критерием точности используемого метода решения.

Зная характеристики волнового движения для радиационной задачи, можно также получить решение дифракционной задачи о рассеянии внутренней волны, набегающей на неподвижный цилиндр (подробнее [9]). Наиболее интересной характеристикой дифракционной задачи является коэффициент отражения R_d , который равен отношению амплитуд отраженной и набегающей волн. В рассматриваемой двухслойной жидкости для кругового цилиндра, полностью погруженного в одном из слоев, набегающая внутренняя волна проходит без отражения. Однако для цилиндра, пересекающего границу раздела, коэффициент отражения не обращается тождественно в нуль, а равен

$$R_d = 2^{-1} [B_0/\overline{B}_0 - A_1/\overline{A}_1]$$

4. Предельные случаи высокой и низкой частоты колебаний. Рассмотрим решение радиационной задачи в предельном случае высокой частоты колебания цилиндра. При $\omega \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow \infty$) силой тяжести можно пренебречь и для невесомой жидкости динамическое условие в (1.3) имеет вид $(1 + \varepsilon)\phi_j^{(2)} - \phi_j^{(1)} = 0$ при $y = 0$. В этом случае волновое движение отсутствует и гидродинамическая нагрузка состоит только из присоединенной массы. Мультипольные потенциалы имеют более простой вид по сравнению с (3.2), (3.3)

$$\begin{aligned} S_m^{(i)} &= a^m e_{j+1} \frac{\sin m\theta}{r^m}, & S_m^{(j)} &= a^m \left[\frac{\sin m\theta}{r^m} \pm e_1 (-1)^m \frac{\sin m\tau}{R^m} \right] \quad (m \geq 1) \\ C_0^{(i)} &= e_{j+1} \ln \frac{r}{a}, & C_0^{(j)} &= \ln \frac{r}{a} \mp e_1 \ln \frac{R}{a} \\ C_m^{(i)} &= a^m e_{j+1} \frac{\cos m\theta}{r^m}, & C_m^{(j)} &= a^m \left[\frac{\cos m\theta}{r^m} \mp e_1 (-1)^m \frac{\cos m\tau}{R^m} \right] \end{aligned}$$

Предельный случай низкой частоты колебания цилиндра, плавающего на свободной поверхности однородной жидкости, подробно рассмотрен в [3, 18, 19]. Показано, что при $\omega \rightarrow 0$ коэффициент присоединенной массы для горизонтальных колебаний цилиндра $\mu_{11}(\omega)$ имеет конечный предел $\mu_{11}(0)$, а для вертикальных колебаний соответствующий коэффициент $\mu_{22}(\omega)$ логарифмически растет. Для коэффициента демпфирования при горизонтальных колебаниях цилиндра отношение

$\Lambda_{11} \equiv \lambda_{11}(\omega)/\omega$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow 0$, а при вертикальных колебаниях $\Lambda_{22} \equiv \lambda_{22}(\omega)/\omega$ — к конечному пределу $\Lambda_{22}(0)$, зависящему от расположения цилиндра. Это качественное поведение гидродинамической нагрузки распространяется и на общий случай колебаний цилиндра, пересекающего границу раздела в двухслойной жидкости.

При $\omega \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow 0$) динамическое условие в (1.3) принимает вид $\partial\phi_1^{(1)}/\partial y = 0$ при $y = 0$ и поверхность раздела становится эквивалентна твердой стенке независимо от скачка плотности. Рассмотрим решения предельных задач $\vartheta_j^{(s)}(x, y)$, $j = 1, 2$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа в областях $W^{(s)}$ и граничным условиям

$$\frac{\partial\vartheta_j^{(s)}}{\partial n} = n_j \quad (x, y) \in \Gamma^{(s)}, \quad \frac{\partial\vartheta_j^{(s)}}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, |x| > b)$$

При этом функция $\vartheta_2^{(s)}$ растет на бесконечности логарифмически, и

$$\vartheta_1^{(s)} \sim -\chi^{(s)} \frac{x}{|z|^2}, \quad |z| \rightarrow \infty$$

где $\chi^{(s)}$ — некоторый коэффициент, зависящий от геометрии тела.

Обобщая результаты [3, 18, 19] на случай двухслойной жидкости, нетрудно показать, что в главном порядке гидродинамические нагрузки для горизонтально колеблющегося цилиндра при $\omega \rightarrow 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_{11}(0) &= \sum_{s=1}^2 \rho_s [\pi\chi^{(s)} - V^{(s)}] \\ \Lambda_{11} &= (\rho_1 + \rho_2) \frac{\pi^2 k_0^2}{4} [e_2\chi^{(1)} - e_3\chi^{(2)}]^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $V^{(s)}$ — объем части тела, погруженной в слой $L^{(s)}$.

Низкочастотные асимптотики для гидродинамической нагрузки вертикально колеблющегося цилиндра имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_{22} &= -\frac{4b^2}{\pi}(\rho_1 + \rho_2)[\ln(k_0b) + C] + \sum_{s=1}^2 \rho_s \int_{\Gamma^{(s)}} \vartheta_2^{(s)} n_2 d\Gamma \\ \Lambda_{22}(0) &= 4b^2(\rho_1 + \rho_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $C \approx 0,5772$ — постоянная Эйлера, b — половина длины линии пересечения цилиндра границей раздела. Формулы (4.1) и (4.2) справедливы для цилиндра, имеющего произвольное поперечное сечение.

Для кругового цилиндра известно [18], что

$$\chi^{(s)} = \frac{a^2 \gamma (4\pi - \gamma)}{6(2\pi - \gamma)^2} (1 - \cos \gamma), \quad V^{(s)} = \frac{a^2}{2} (\gamma - \sin \gamma), \quad \gamma = 2 \arccos \frac{(-1)^s h}{a}$$

В частном случае $h = 0$ аналитическое решение для функций $\vartheta_2^{(2)}$ дано в [19], по аналогии можно получить решение и для $\vartheta_2^{(1)}$. В этом случае

$$\int_{\Gamma^{(1)}} \vartheta_2^{(1)} n_2 d\Gamma = \int_{\Gamma^{(2)}} \vartheta_2^{(2)} n_2 d\Gamma = \frac{4a^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \right)$$

При $h \neq 0$ функции $\vartheta_2^{(s)}$ можно определить численно с помощью мультипольных разложений, используемых выше.

5. Гидродинамические нагрузки (результаты расчетов). Поведение гидродинамической нагрузки для кругового цилиндра, плавающего на свободной поверхности однородной жидкости, подробно исследовано в [2, 3]. В [2] приведены также табличные значения гидродинамических коэффициентов при $h/a = -0.5$. Результаты предлагаемого метода совпали с приведенными в [2, 3] с точностью до 1%. Сопоставление гидродинамической нагрузки для однородной жидкости со свободной поверхностью ($\varepsilon = \infty$) и двухслойной ($\varepsilon = 0.3, 0.03$) при различных погружениях цилиндра приведены на фиг. 1–6, где

$$M_{jj} = \frac{\mu_{jj}}{\pi \rho_2 a^2}, \quad L_{jj} = \frac{\lambda_{jj}}{\pi \rho_2 \omega a^2} \quad (j = 1, 2), \quad K = ak_0$$

Представленные численные результаты получены с использованием 50 членов ряда в разложениях (3.1). Сравнение коэффициентов демпфирования, определенных с использованием (3.6) и энергетического соотношения (3.7), показало их хорошее совпадение. Численные результаты также хорошо согласуются с асимптотическими формулами, полученными для низких и высоких частот колебаний.

Поведение гидродинамической нагрузки для цилиндра, пересекающего границу раздела, существенно отличается от случая полностью погруженного тела (см.,

например, [9]). В последнем случае коэффициенты присоединенной массы и демпфирования совпадали для горизонтальных и вертикальных колебаний кругового цилиндра, а в рассматриваемой задаче существенно отличаются особенно при низких частотах. Однако с увеличением частоты это расхождение уменьшается.

В таблице приведены значения коэффициентов присоединенной массы для предельного случая невесомой жидкости. При $h = 0$ для однородной жидкости со свободной поверхностью (в рассматриваемой задаче это нижний слой при $\varepsilon = \infty$) в [3] даны точные значения этих величин $M_{11} = 2/\pi^2 \approx 0.203$, $M_{22} = 0.5$.

Как отмечено в [2, 3], в случае однородной жидкости при $-1.1 \leq h/a \leq -0.5$ коэффициент присоединенной массы M_{11} может принимать отрицательные значения (фиг. 1). Однако для рассмотренных вариантов двухслойной жидкости этого явления не наблюдалось.

При колебаниях цилиндра, пересекающего границу раздела в двухслойной жидкости, коэффициенты присоединенной массы, как правило, превышают соответствующие значения в однородной жидкости со свободной поверхностью. Это объясняется тем, что в последнем случае смоченная поверхность цилиндра меньше, и следовательно меньший объем жидкости вовлекается в колебательное движение.

Горизонтальные колебания кругового цилиндра с центром на границе раздела практически не испытывают влияния слабой стратификации (фиг. 3, 4). В этом случае коэффициент присоединенной массы M_{11} почти не зависит от частоты колебания и близок к 1, что соответствует решению для безграничной однородной жидкости ($\varepsilon = 0$) $\mu_{11} = \mu_{22} = \pi \rho_2 a^2$, а коэффициент демпфирования L_{11} пренебрежимо мал. Однако при вертикальных колебаниях цилиндра в этой ситуации влияние стратификации существенно.

В рассмотренных случаях двухслойной жидкости с относительно слабым перепадом плотности ($\varepsilon = 0.3, 0.03$) коэффициенты гидродинамической нагрузки достигают достаточно больших значений, которые могут значительно превышать соответствующие значения для однородной жидкости со свободной поверхностью.

Зависимость модуля коэффициента отражения $|R_d|$ от длины падающей волны представлена на фиг. 7. При $h \leq 0$ отражение поверхностных волн более значительно, чем внутренних, а при $h > 0$ — наоборот.

Заключение. Выведена система граничных интегральных уравнений для определения поверхностных источников, моделирующих колебания горизонтального цилиндра на границе раздела двух жидкостей. Показано, что распределение поверхностных источников может иметь степенную особенность определенного вида в точках пересечения контуром границы раздела. Методом мультипольных разложений решена задача для кругового цилиндра. Выполнены оценки гидродинамической нагрузки в предельных случаях низких и высоких частот колебаний. Представленные численные расчеты для коэффициентов присоединенной массы и демпфирования показали, что даже при относительно слабой стратификации наличие границы раздела приводит к появлению существенных волновых нагрузок. В отличие от полностью погруженного в одном из слоев кругового цилиндра гидродинамическая нагрузка зависит от типа колебания, и коэффициент отражения набегающей волны не равен тождественно нулю. Использование точечных мультиполей [2] вместо линейных позволяет распространить этот подход на пространственный случай.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке второго автора (И.В. Стуровой) Интеграционным проектом № 1 СО РАН и грантом № 00-15-96162 программы “Ведущие научные школы” РФФИ.

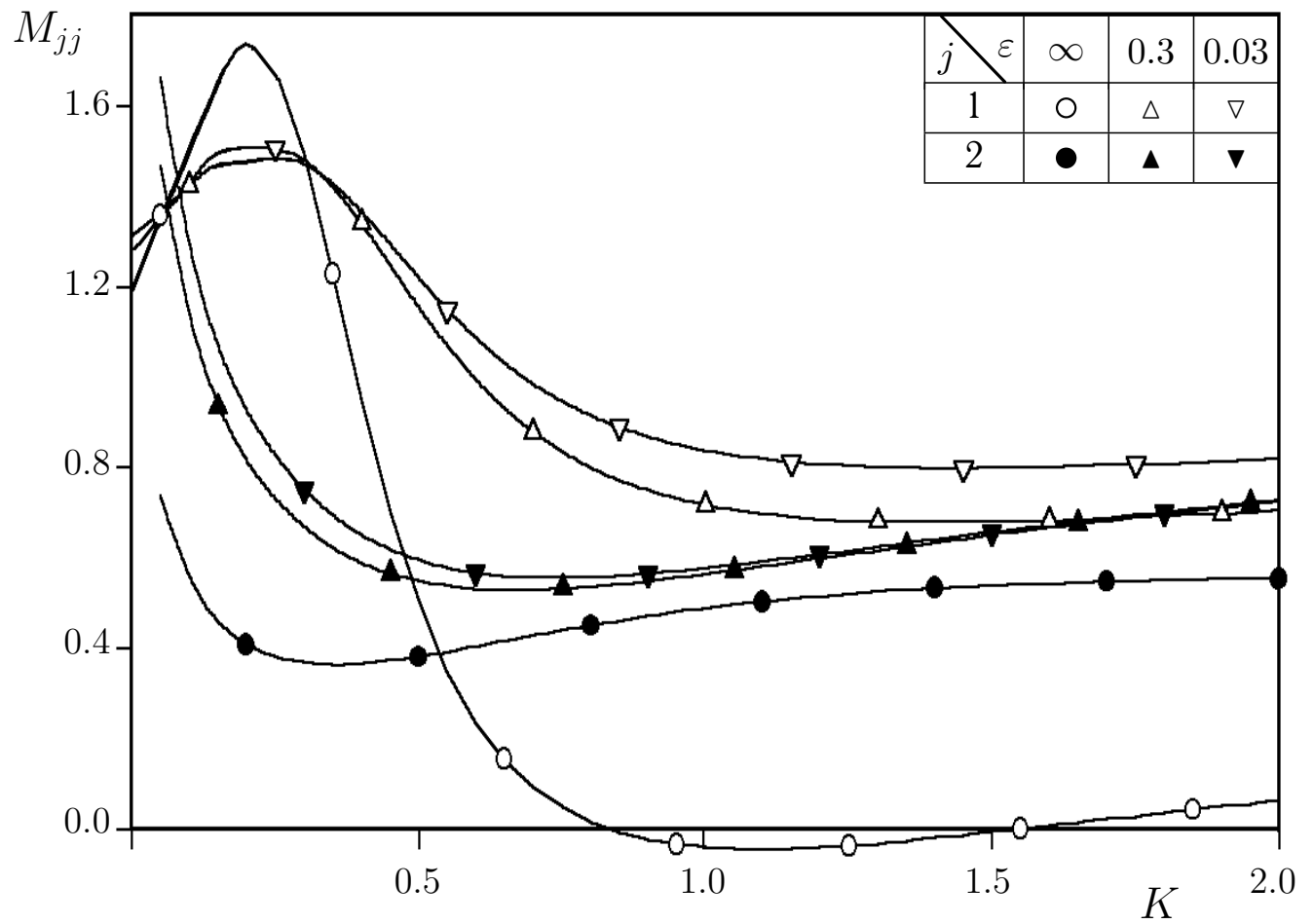
Список литературы

1. *Хаскинс М.Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 327 с.
2. *Eatock Taylor R., Hu C.S.* Multipole expansions for wave diffraction and radiation in deep water // *Ocean Engng.* 1991. V. 18. No. 3. P. 191–224.
3. *Greenhow M., Ahn S.I.* Added mass and damping of horizontal circular cylinder sections // *Ocean Engng.* 1988. V. 15. No. 5. P. 495–504.
4. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Колебания твердого тела на поверхности раздела двух жидкостей // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1987. № 5. С. 34–40.
5. *Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Нестеров С.В., Чайковский А.А.* Численно-аналитическое исследование колебаний твердого тела на границе раздела двух жидкостей // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1988. № 4. С. 59–66.
6. *Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Нестеров С.В.* Исследование зависимости колебаний поплавка в неоднородной жидкости от формы его поверхности // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. № 5. С. 24–31.
7. *Пыльнев Ю.В., Разумеенко Ю.В.* Исследование затухающих колебаний глубокопогруженного поплавка специальной формы в однородной и стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1991. № 4. С. 71–79.
8. *McIver M.* Global relationships between two-dimensional water wave potentials // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 312. P. 299–309.
9. *Стурова И.В.* Задачи радиации и дифракции для кругового цилиндра в стратифицированной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 1999. № 4. С. 81–94.
10. *Стурова И.В.* Радиационная неустойчивость кругового цилиндра в равномерном потоке двухслойной жидкости // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 991–1000.
11. *Gorgui M.A., Kassem S.E.* Basic singularities in the theory of internal waves // *Quart. J. Mech and Appl. Math.* 1978. V. 31. Pt 1. P. 31–48.

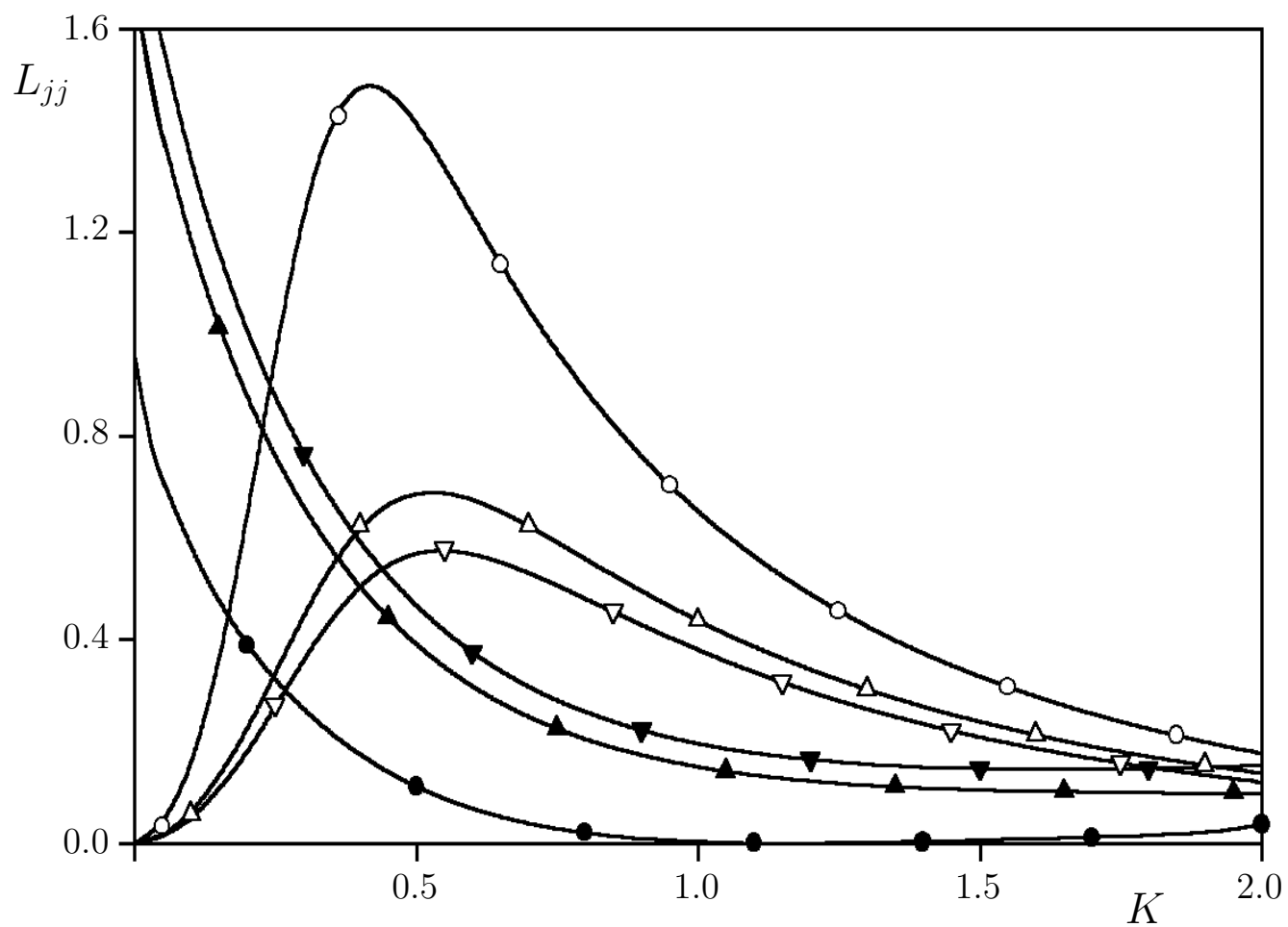
12. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 27. С. 132–228.
13. *Кузнецов Н.Г., Мазья В.Г.* Об однозначной разрешимости плоской задачи Неймана-Кельвина // Мат. сб. 1988. Т. 135. № 4. С. 440–462.
14. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin: De Gruyter, 1994. 525 p.
15. *Nicaise S., Sändig A.-M.* General interface problems. I // Math. Methods Appl. Sciences. 1994. V. 17. No. 6. P. 395–429.
16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред: М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
17. *Стурова И.В.* Плоская задача о гидродинамической качке погруженного тела без хода в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 144–155.
18. *Greenhow M., Yanbao L.* Added masses for circular cylinders near or penetrating fluid boundaries — Review, extension and application to water-entry, -exit and slamming // Ocean Engng., 1987. V. 14. No. 4. P. 325–348.
19. *McIver P.* Low-frequency asymptotics of hydrodynamic forces on fixed and floating structures // Ocean Waves Engineering. Advances in Fluid Mech. WIT Press. 1994. V. 2. P. 1–49.

Таблица 1

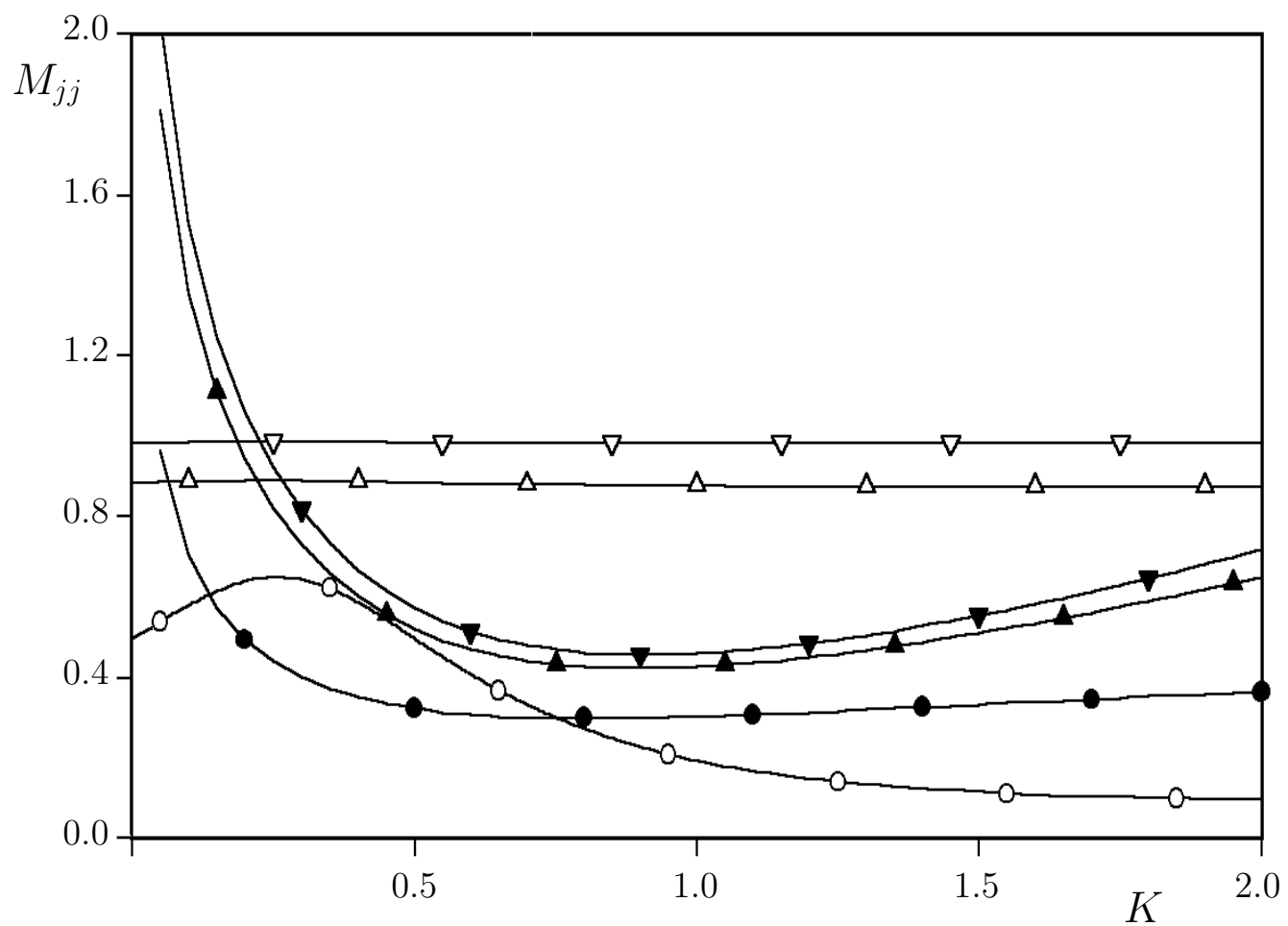
ε	$h/a = -0.5$		0		0.5	
	M_{11}	M_{22}	M_{11}	M_{22}	M_{11}	M_{22}
∞	0.415	0.571	0.204	0.500	0.055	0.334
0.3	0.903	0.908	0.876	0.885	0.852	0.858
0.03	0.989	0.989	0.985	0.985	0.982	0.982



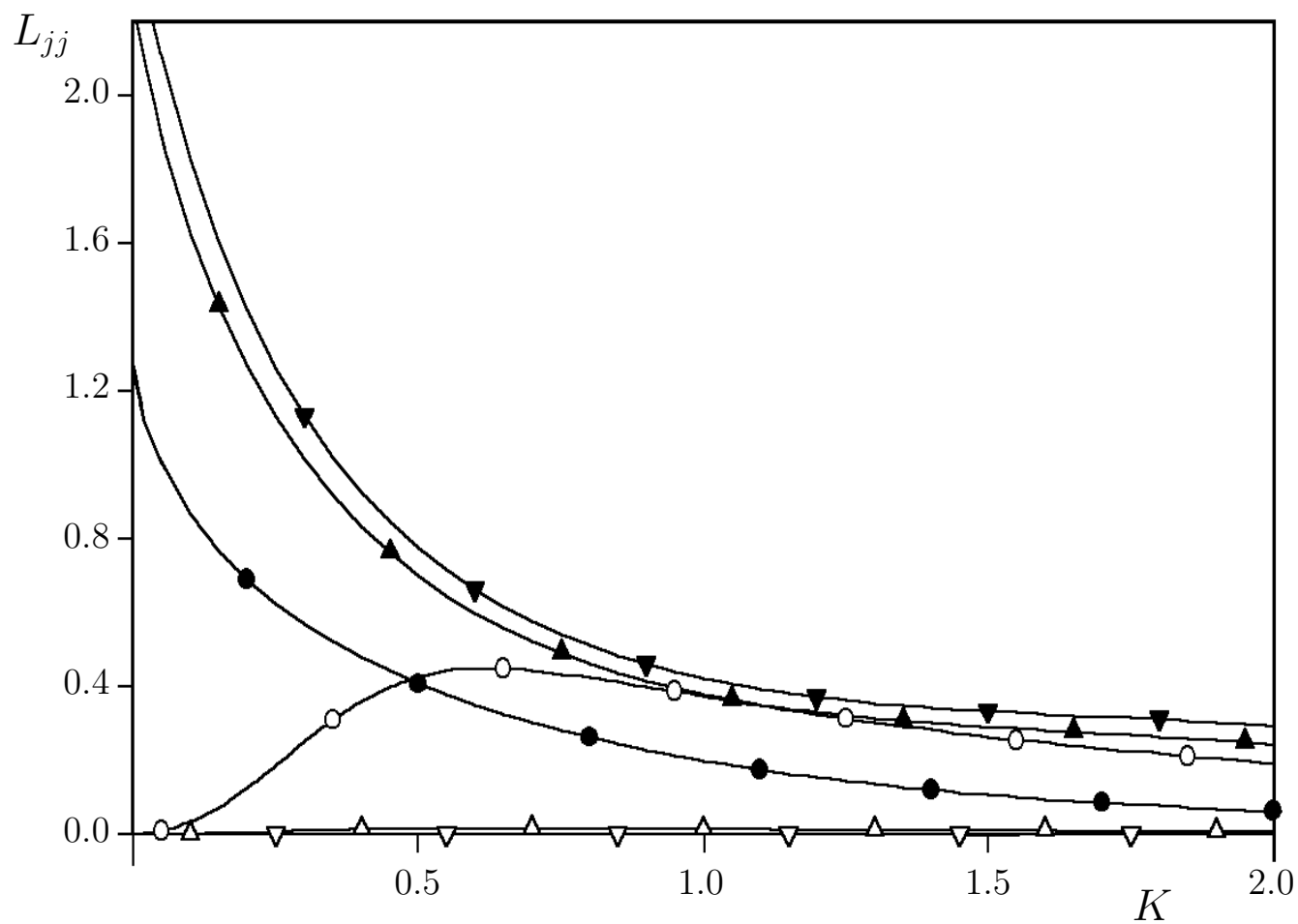
Фиг. 1: Зависимость присоединенных масс M_{jj} от безразмерной частоты $K = a\nu(2 + \varepsilon)/\varepsilon$ при глубине погружения центра цилиндра $h/a = -0.5$. Символы на кривых используются для их маркировки.



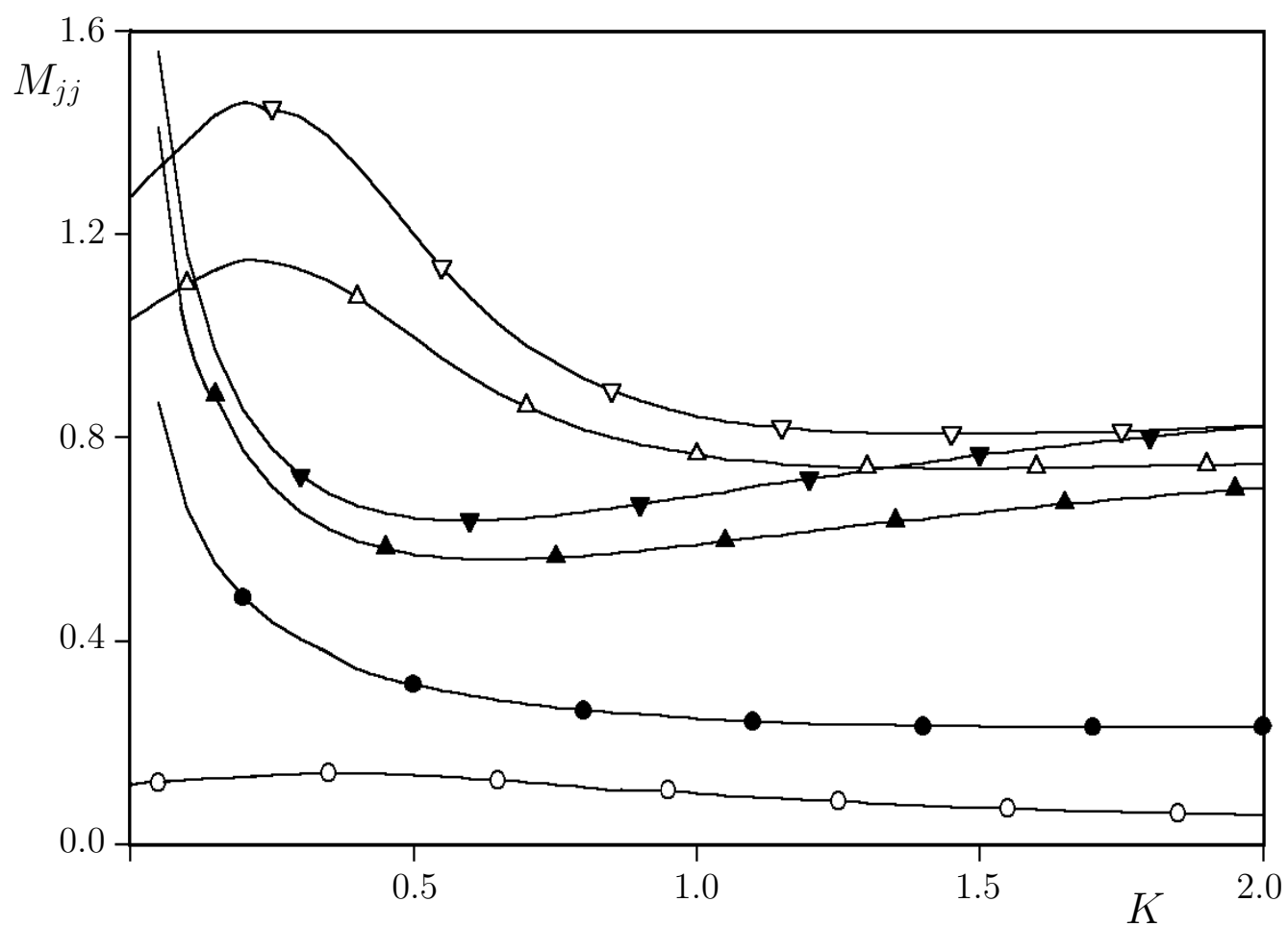
Фиг. 2: Зависимость коэффициентов демпфирования $L_{jj}(K)$ при $h/a = -0.5$. Обозначения кривых даны на фиг. 1



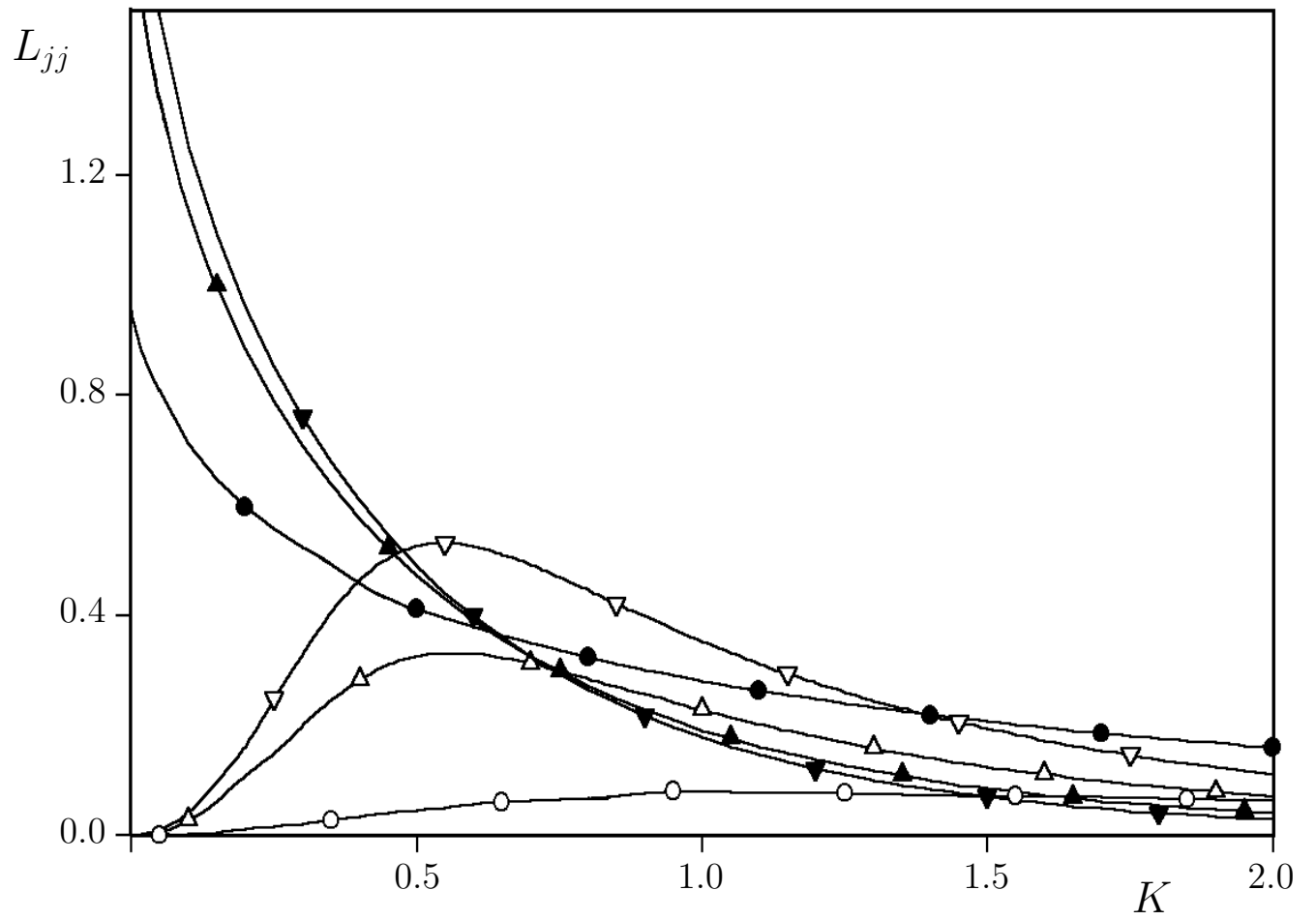
Фиг. 3: Зависимость присоединенных масс $M_{jj}(K)$ при $h = 0$. Обозначения кривых даны на фиг. 1



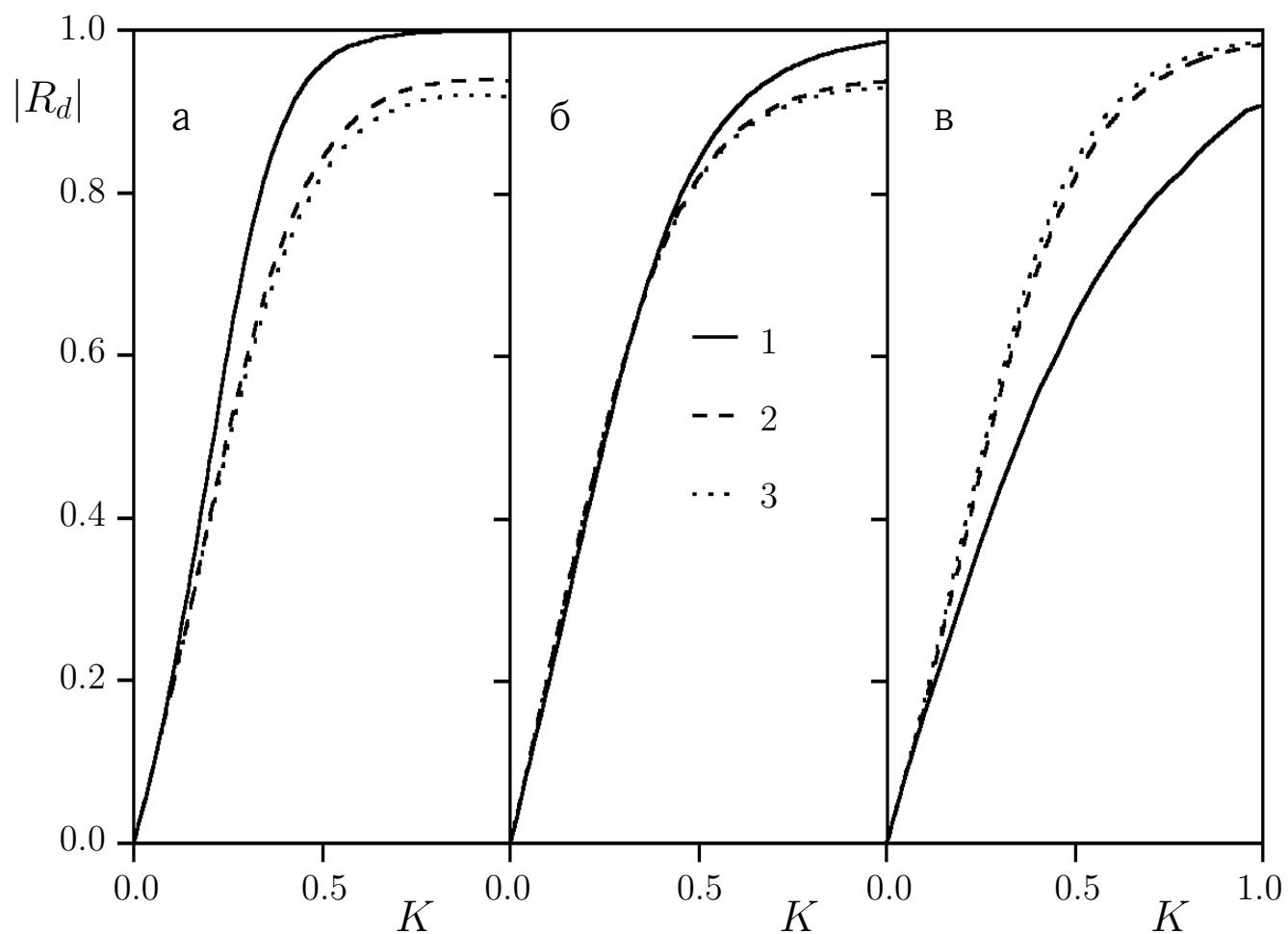
Фиг. 4: Зависимость коэффициентов демпфирования $L_{jj}(K)$ при $h = 0$. Обозначения кривых даны на фиг. 1



Фиг. 5: Зависимость присоединенных масс $M_{jj}(K)$ при $h/a = 0.5$.
Обозначения кривых даны на фиг. 1



Фиг. 6: Зависимость коэффициентов демпфирования $L_{jj}(K)$ при $h/a = 0.5$. Обозначения кривых даны на фиг. 1



Фиг. 7: Модуль коэффициента отражения $|R_d|$ при $h/a = -0.5, 0, 0.5$ (а-в). Кривые 1-3 соответствуют $\varepsilon = \infty, 0.3, 0.03$