

УДК 532.59

О.В. Мотыгин

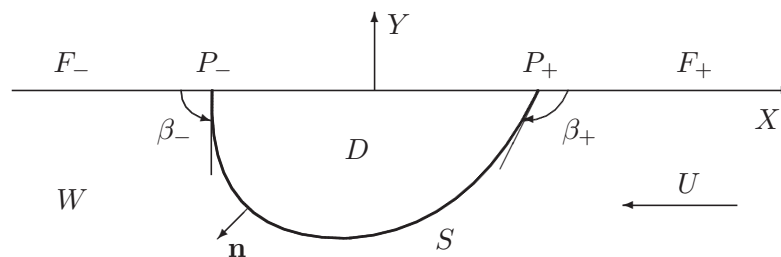
ПРИМЕРЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОЛУПОГРУЖЕННЫХ ТЕЛ

Рассматривается плоская задача Неймана–Кельвина, описывающая в линейном приближении теории волн малой амплитуды установившееся, безвихревое движение полупогруженных цилиндрических тел в идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости со свободной поверхностью. Доказано, что для каждого фиксированного значения скорости набегающего потока и каравана, состоящего из двух и более тел, можно выбрать геометрию этих тел таким образом, что однородная задача Неймана–Кельвина будет иметь нетривиальное решение. Построено семейство потенциалов, доставляющих такие примеры неединственности. Соответствующие этим потенциалам конфигурации тел можно получить выбирая некоторые из линий тока решений в качестве контуров тел. Приведены примеры.

К классическим в данной области следует отнести работы [1, 2], посвященные задаче Неймана–Кельвина для полностью погруженного тела. В дальнейшем были сделаны попытки использовать данную краевую задачу для описания движения тел, пересекающих свободную поверхность жидкости (см., например, [3]–[5]). При этом обычно требование ограниченности вектора скорости всюду в жидкости заменяется на требование ограниченности вне некоторого компакта, включающего тело. Это приводит к появлению сингулярностей вектора скорости в точках пересечения поверхности тел со свободной поверхностью. Краевая задача при этом становится незамкнутой. Существует несколько вариантов дополнительных условий (см., например, [3]–[5]). Ниже используется обобщение постановки, предложенной в [3].

1. Постановка задачи. Опишем краевую задачу на примере одного тела. Обозначения введены на фиг. 1, где W — поперечное сечение заполненной жидкостью области, $F = F_+ \cup F_-$ — свободная поверхность жидкости, D и S — поперечное сечение и смоченная поверхность цилиндра, U — постоянная скорость, с которой тело движется вдоль оси абсцисс, и g — ускорение силы тяжести. Будем считать, что односторонние касательные к S в точках $P_{\pm}$ образуют углы $\beta_{\pm} \neq 0, \pi$ с лучами $F_{\pm}$. Обозначим через n единичную нормаль, направленную в область, занятую жидкостью.

Далее будем использовать безразмерные координаты $x = Xg/U^2$ и $y = Yg/U^2$. Тогда в системе координат, связанной с телом, задача Неймана–Кельвина для отыскания



Фиг. 1:

потенциала скоростей $u \in H_{loc}^1(W)$, приведенного к безразмерной форме с помощью коэффициента g/U^3 , имеет вид

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{в } W \quad (1.1)$$

$$u_{xx} + u_y = 0 \quad \text{на } F \setminus \{P_+, P_-\} \quad (1.2)$$

$$\partial u / \partial n = f \quad \text{на } S \setminus \{P_+, P_-\} \quad (1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\nabla u| = 0 \quad (1.4)$$

$$\sup\{|\nabla u| : (x, y) \in W \setminus E\} < \infty \quad (1.5)$$

где E — некоторый компакт, такой что $\overline{D} \subset E$ и $E \cap (F_{\pm} \setminus \{P_{\pm}\}) \neq \emptyset$. Если $f = \cos(n, x)$, то (1.3) — условие непротекания.

Задача (1.1)–(1.5) должна быть дополнена двумя условиями. Для этого воспользуемся асимптотикой решения вблизи угловой точки, установленной ранее [4]. Введем полярные координаты $(\rho_{\pm}, \theta_{\pm})$ с полюсом в точке $P_{\pm}$ и полярной осью, направленной вдоль луча $F_{\pm}$. Угол θ_+ (θ_-) будем отсчитывать по (против) часовой стрелки так, что $0 \leq \theta_{\pm} \leq \beta_{\pm}$. Тогда при $\rho_{\pm} \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} u &= C_{\pm} + B_{\pm} \rho_{\pm}^{\pi/(2\beta_{\pm})} \sin(\pi\theta_{\pm}/(2\beta_{\pm})) + \\ &\quad + A_{\pm} \rho_{\pm} \cos(\theta_{\pm} - \alpha_{\pm}) + O(\rho_{\pm}^{\lambda_{\pm}}), \quad \text{при } \beta_{\pm} \neq \pi/2 \\ u &= C_{\pm} + B_{\pm} [\rho_{\pm} \log \rho_{\pm} \sin \theta_{\pm} + \rho_{\pm}(\theta_{\pm} - \pi/2) \cos \theta_{\pm}] + \\ &\quad + A_{\pm} \rho_{\pm} \cos(\theta_{\pm} - \alpha_{\pm}) + O(\rho_{\pm}^{\lambda_{\pm}}), \quad \text{при } \beta_{\pm} = \pi/2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\alpha_{\pm}$ и $\lambda_{\pm}$ — константы, причем $1 < \lambda_{\pm} < 2$ при $\beta_{\pm} \geq \pi/2$ и $\lambda_{\pm} = 2$ при $\beta_{\pm} < \pi/2$.

Для тела, погруженная часть которого представляет собой полукруг, была предложена [3] постановка, которая доставляет так называемое “наименее сингулярное решение” с вектором скорости ограниченным в угловых точках. Эта постановка исследована [4] для произвольного контура с $\beta_{\pm} \geq \pi/2$, когда, как следует из (1.6), существуют сингулярности поля скоростей. Ниже используется обобщение, пригодное также для контуров, для которых $\beta_+ < \pi/2$ или $\beta_- < \pi/2$.

Определение. Назовем потенциал u “наименее сингулярным решением”, если он является решением задачи (1.1)–(1.5) и удовлетворяет условиям

$$B_+ = B_- = 0, \quad (1.7)$$

где $B_{\pm}$ — коэффициенты в (1.6).

Указанная постановка легко переносится на случай произвольного количества погруженных тел. Заметим, что полученные ранее результаты [4] применимы для таким образом введенного решения.

Цель работы — построение примеров неединственности для задачи (1.1)–(1.5), (1.7), т.е. потенциалов, удовлетворяющих однородному условию (1.3) и имеющих конечную энергию. Воспользуемся идеей, предложенной ранее [6] для построения примеров неединственности в задаче о колебаниях жидкости в присутствии плавающего тела. Разместим на свободной поверхности жидкости источник и сток равной интенсивности и рассмотрим некоторые линии тока данного потенциала в качестве контуров тел. Будет показано,

что эти контуры могут быть выбраны так, что каждая из особенностей находится внутри одного из таким образом заданных цилиндров. Для этой выбранной геометрии предположенный потенциал является решением задачи (1.1)–(1.5), (1.7) с однородным условием Неймана (1.3) на смоченной поверхности тел. Максимальное количество линий тока, которые могут быть выбраны в качестве контуров тел для потенциала, построенного подобным образом, зависит от расстояния между источниками. В настоящей работе дается классификация примеров неединственности в зависимости от этого параметра.

Может быть высказана гипотеза о том, что существование примеров неединственности связано с нестационарным характером обтекания полученных конфигураций при соответствующих значениях скорости.

2. Функция Грина. Функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ задачи Неймана–Кельвина, удовлетворяющая условиям (1.2), (1.4), уравнению

$$\nabla_{x,y} G(x, y; \xi, \eta) = -\delta(x - \xi, y - \eta) \quad \text{при} \quad y < 0, \eta < 0$$

и условию

$$\limsup_{|x+iy| \rightarrow \infty} |\nabla_{x,y} G| < \infty$$

может быть записана в виде

$$G(z; \zeta) = -(2\pi)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ \log((z - \zeta)(z - \bar{\zeta})) - 2e^{-i(z - \bar{\zeta})} [\operatorname{Ei}(i(z - \bar{\zeta})) - i\pi] \right\} \quad (2.1)$$

Здесь $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ и $\operatorname{Ei}(z)$ — интегральная экспонента.

Рассмотрим случай, когда источник расположен на свободной поверхности. Введем функцию тока источника $H(z; \zeta)$, сопряженную к функции Грина по аргументу z . Воспользовавшись формулой 8.212.5 из [8], запишем:

$$H(x, y; \xi, 0) = -\pi^{-1} \arg(z - \xi) + \pi^{-1} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{e^{ky} \sin k(x - \xi)}{k - 1} dk - e^y \cos(x - \xi) \quad (2.2)$$

где $\arg(z) \in [-\pi, 0]$ при $y \leq 0$. Соотношение

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{e^{ky} \sin kx}{k} dk, \quad y \leq 0$$

которое следует из формулы 3.941.1 в [8], приводит к другому представлению

$$H(x, y; \xi, 0) = \pi^{-1} \left(\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{e^{ky} \sin k(x - \xi)}{k(k - 1)} dk + \frac{\pi}{2} \right) - e^y \cos(x - \xi) \quad (2.3)$$

Используя разложение $\operatorname{Ei}(z)$ при $z \rightarrow 0$ (см. 5.1.10 в [7]), несложно убедиться, что функция $H(x, y; \xi, 0)$ непрерывна в точке $(\xi, 0)$.

3. Примеры неединственности. Рассмотрим семейство потенциалов u_n , полученных размещением на свободной поверхности источника и стока равной интенсивности на расстоянии кратном π и соответствующих им функций тока

$$v_n(x, y) = \pi H(x, y; \pi n, 0) - \pi H(x, y; -\pi n, 0) \quad (3.1)$$

Последние являются четными по x функциями, что позволяет ограничивать рассмотрение областью $x \geq 0$.

Замечание. При $|z| \rightarrow \infty$ и $|\zeta| < C < \infty$ имеем (см., например, [4])

$$G(z; \zeta) = -\pi^{-1} \log |z| - \vartheta(-x) 2 e^{y+\eta} \sin(x - \xi) + O(|z|^{-1})$$

где ϑ — функция Хевисайда. Таким образом, функции u_n определены так, чтобы в асимптотиках на бесконечности отсутствовала и логарифмическая, и волновая составляющая.

Обозначим через $\mathcal{R}_0$ множество линий уровня функции $v_n(x, y)$, конечные точки которых расположены на свободной поверхности, и пусть все линии тока, входящие в это множество, параметризованы с помощью переменной $t \in [0, 1]$. Рассмотрим также $\mathcal{R}_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathcal{R}_0 : \exists (x_i(t), y_i(t)) \in \mathcal{R}_0, [x_i(0), x_i(1)] \subset (x(0), x(1)), i = 1, 2, (x_1(0), x_1(1)) \cap (x_2(0), x_2(1)) = \emptyset\}$ — множество линий тока, охватывающих более чем одно семейство линий тока.

Определим $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \setminus \mathcal{R}_1$. Введем отношение гомотопной эквивалентности $\rho \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Будем говорить, что две линии тока $\gamma(t)$ и $\gamma'(t)$, где $t \in [0, 1]$, гомотопны, $(\gamma, \gamma') \in \rho$, если существует функция $\Phi(t, s)$ обладающая следующими свойствами: $\Phi(t, s)$ непрерывна по $t \in [0, 1]$ и $s \in [0, 1]$; $\Phi(t, s) \in \mathcal{R}$ для любого $s \in [0, 1]$; $\Phi(t, 0) = \gamma(t)$, $\Phi(t, 1) = \gamma'(t)$. Ниже будет доказана

Теорема 1. Мощность фактор-множества $\mathcal{R}/\rho$ равна $2n + 1$.

Пусть T_1 и T_2 — множества линий тока, охватывающих источники. Ниже будет показано, что $T_1 \neq \emptyset$ и $T_2 \neq \emptyset$. Обозначим через Q_1 , Q_2 и T_i ($3 \leq i \leq 2n + 1$) классы гомотопически эквивалентных контуров, так что $Q_1 \supset T_1$ и $Q_2 \supset T_2$. Тогда, вследствие теоремы 1, $\mathcal{R}/\rho = \{Q_1, Q_2, T_3, \dots, T_{2n+1}\}$. Выберем некоторые контуры $S = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_N$, где $2 \leq N \leq 2n + 1$ и $\gamma_i \in T_i$. Очевидно, что когда данное семейство линий S берется в качестве контуров для задачи (1.1)–(1.5), (1.7), соответствующие потенциалы u_n — решения данной задачи с однородным условием (1.3).

4. Представления функций v_n . Сравнивая представления (2.2) и (2.3), имеем при фиксированном значении x дифференциальные уравнения $\partial v_n / \partial y = v_n - V_n$, решая которые получим

$$v_n(x, y) = e^y \left(v_n(x, 0) + \int_y^0 V_n(x, t) e^{-t} dt \right) \quad (4.1)$$

Здесь

$$V_n(x, y) = \arg(x + \pi n + iy) - \arg(x - \pi n + iy)$$

и очевидно,

$$0 \leq V_n(x, y) \leq \pi, \quad \text{при } y < 0 \quad (4.2)$$

Ввиду указанного знакопостоянства подынтегральной функции, представленное интегралом слагаемое в (4.1) — строго монотонная функция переменной y .

5. Функции $v_n(x, 0)$. Рассмотрим поведение функций $v_n(x, 0)$ на интервале $[0, \pi n]$. Из (3.1) и (2.2) имеем

$$v_n(x, 0) = \pi + \int_0^\infty \frac{\sin k(x - \pi n) - \sin k(x + \pi n)}{k - 1} dk$$

Воспользовавшись формулами 3.722.5 и 3.354.1 из [8], получим

$$\begin{aligned} v_n(x, 0) &= r(x) + I(x) \\ r(x) &= \pi(1 - 2 \cos(x - \pi n)), \quad I(x) = I^+(x) + I^-(x), \\ I^\pm(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{(\pm x - \pi n)k}}{1 + k^2} dk \end{aligned} \quad (5.1)$$

Оценим функцию $I(x)$. Имеем

$$I^+(x) \leq \int_0^\infty \frac{dk}{1 + k^2} = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0, \pi n], \quad I^-(x) < \int_0^\infty e^{-\pi k} dk = \frac{1}{\pi}.$$

Объединяя полученные неравенства, получим

$$I(x) < 2\pi/3. \quad (5.2)$$

При $x \in [0, \pi n]$ имеем $\max\{r(x)\} = 3\pi$ и $\min\{r(x)\} = -\pi$. Ввиду последней оценки величины $I(x)$ функция $v_n(x, 0)$ меняет знак между каждыми соседними минимумом и максимумом функции $r(x)$ и, следовательно, уравнение $v_n(x, 0) = 0$ имеет в этом промежутке хотя бы один корень. Такой корень оказывается единственным.

Действительно, если бы таких корней было несколько, то необходимо нашлась бы точка, в которой $\partial v_n(x, 0)/\partial x = 0$. Покажем, что это невозможно.

Обозначим через $R = \{x : |r(x)| \leq 2\pi/3\}$ множество, в котором функции $r(x)$ и $I(x)$ соизмеримы по абсолютным значениям. Очевидно, что

$$\min\{|dr(x)/dx| : x \in R\} = 2\pi \sin(\arccos(5/6)) = \pi\sqrt{11}/3$$

Далее

$$\frac{dI^\pm(x)}{dx} = \pm \int_0^\infty \frac{k e^{(\pm x - \pi n)k}}{1 + k^2} dk$$

Поскольку при $k \geq 0$ выполняется неравенство $k \leq e^{k-1}$, имеем

$$|dI^-(x)/dx| \leq I^+(1)/e < \pi/(2e).$$

При $x \in R$ справедливо неравенство $\pi n - x \geq \arccos(5/6) > 1/2$. Также очевидно, что при $k \geq 0$ справедливо неравенство $k \leq 2e^{k/2-1}$. Таким образом,

$$|dI^+(x)/dx| \leq 2I^+(x + 1/2)/e < \pi/e$$

Объединяя полученные оценки и неравенство $||a| - |b|| \leq \max\{|a|, |b|\}$, имеем

$$\max\{|dI(x)/dx| : x \in R\} < \pi/e < \min\{|dr(x)/dx| : x \in R\} = \pi\sqrt{11}/3$$

При $x > \pi n$, воспользовавшись представлением

$$v_n(x, 0) = \int_0^\infty \frac{e^{-(x+\pi n)k} - e^{-(x-\pi n)k}}{1 + k^2} dk. \quad (5.3)$$

которое следует из формул 3.722.5 и 3.354.1 в [8], заключаем, что $v_n(x, 0)$ при $x > \pi n$ является строго отрицательной, монотонно возрастающей функцией и $v_n(x, 0) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Заметим, что $v_n(x, y)$ четная функция по переменной x . Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Функция $v_n(x, 0)$ имеет $2n$ нулей $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{2n}$. При этом $\xi_i \in (-\pi n, \pi n)$ для $i = 1, 2, \dots, 2n$.

Далее понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Имеется ровно $2n + 1$ локальных экстремумов функции $v_n(x, 0)$, расположенных в точках $\chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_{2n+1}$. При этом $\chi_1 \in (-\pi n, \xi_1)$, $\chi_{2n+1} \in (\xi_{2n}, \pi n)$ и $\chi_i \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$ ($i = 2, 3, \dots, 2n$).

Доказательство. Очевидно, $\partial v_n / \partial x \neq 0$ при $|x| > \pi n$. Далее, в каждом из интервалов (ξ_i, ξ_{i+1}) ($i = 1, 2, \dots, 2n$) содержится по крайней мере один экстремум функции $v_n(x, 0)$. Покажем, что по крайней мере один экстремум имеется также в каждом из интервалов $(-\pi n, \xi_1)$ и $(\xi_{2n}, \pi n)$.

Показано, что $\xi_{2n} < \xi^* = \pi n - \arccos(5/6)$. Рассмотрим $x \in (\xi^*, \pi n)$. Запишем уравнение $\partial v_n(x, 0) / \partial x = 0$ в виде

$$2\pi \sin(\pi n - x) = dI(x)/dx \quad (5.4)$$

Выражение в левой части (5.4) монотонно убывает и обращается в нуль при $x = \pi n$, выражение в правой части (5.4) строго положительно и монотонно возрастает. Справедливо неравенство

$$dI(x)/dx < \pi/e < 2\pi \sin(\pi n - \xi^*) = \pi\sqrt{11}/3.$$

Отсюда следует существование корня уравнения (5.4).

Рассмотрим функцию $\partial^2 v_n(x, 0) / \partial x^2$ при $x \in [0, \pi n]$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \partial^2 v_n(x, 0) / \partial x^2 &= p(x) + q(x) - I(x) \\ p(x) &= 2\pi \cos(x - \pi n), \quad q(x) = (x + \pi n)^{-1} - (x - \pi n)^{-1} \end{aligned}$$

(функция $I(x)$ определена выше).

При $x \in [\pi n - \pi/3, \pi n]$ имеет место оценка

$$p(x) + q(x) > \pi + 3/\pi$$

и, ввиду (5.2), $\partial^2 v_n(x, 0) / \partial x^2 > 0$ при $x \geq \pi n - \pi/3$. Отсюда следует, что корень уравнения (5.4) соответствует минимуму функции $v_n(x, 0)$.

Тем самым, установлено, что функция $v_n(x, 0)$ имеет в интервале $(-\pi n, \pi n)$ экстремумы в m точках, где $m \geq 2n + 1$.

Исследуем нули функции $\partial^2 v_n(x, 0)/\partial x^2$. При $x \in [0, \pi n - \pi/3]$ справедлива оценка

$$q(x) < 4/\pi, \quad |I(x) - q(x)| < 2\pi/3$$

В то же время при $x \in [0, \pi n]$ имеем $\max\{p(x)\} = -\min\{p(x)\} = 2\pi$. Поэтому между каждым минимумом и максимумом $p(x)$ функция $\partial^2 v_n(x, 0)/\partial x^2$ меняет знак. Обозначим $P = \{x : |p(x)| < 2\pi/3\}$. Очевидно

$$\min\{|dp(x)/dx| : x \in P\} = 2\pi \sin \arccos(1/3) = 4\pi\sqrt{2}/3$$

При $x \in [0, \pi n - \pi/3]$ имеем $dq(x)/dx = -(x + \pi n)^{-2} + (x - \pi n)^{-2} < 9/\pi^2$. Воспользовавшись полученной ранее оценкой величины $|dI(x)/dx|$, приходим к неравенству

$$|dI(x)/dx - dq(x)/dx| \leq \pi/e + 9/\pi^2 < \min\{|dp(x)/dx| : x \in P\} = 4\pi\sqrt{2}/3$$

Отсюда следует, что в интервале $(-\pi n, \pi n)$ имеется ровно $2n$ корней уравнения $\partial^2 v_n(x, 0)/\partial x^2 = 0$. Поскольку между каждыми двумя экстремумами функции $v_n(x, 0)$ необходимо располагается корень уравнения $\partial^2 v_n(x, 0)/\partial x^2 = 0$, то $m = 2n + 1$. Утверждение леммы доказано.

6. Структура линий уровня функции $v_n(x, y)$. Отметим вначале, что из свойств гармонических функций вытекает невозможность существования изолированных точек $v_n(x, y) = c$. Кроме того, линии тока не могут заканчиваться внутри жидкости. Доказательство указанных свойств можно найти, например, в [6].

Рассмотрим поведение линий нулевого уровня. Ввиду (4.1), решение уравнения $v_n(x^*, y) = 0$ при фиксированном x^* может быть найдено из уравнения

$$v_n(x^*, 0) = - \int_y^0 V_n(x^*, t) e^{-t} dt \quad (6.1)$$

Из определения функции V_n и неравенства (4.2) следует, что правая часть последнего равенства представляет собой отрицательную, неограниченную и монотонно убывающую функцию глубины $|y|$. Таким образом, решение уравнения (6.1) существует и единственно тогда и только тогда, когда $v_n(x^*, 0) \leq 0$.

Из (5.3) и леммы 2. следует, что $v_n(x, 0) \leq 0$ только для $x \in F_i$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$), где $F_1 = (-\infty, \xi_1]$, $F_{n+1} = [\xi_{2n}, +\infty)$, $F_j = [\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Обозначим через $\gamma_0^{(i)}$ линии нулевого уровня, так что $F_i = \text{pr}_x(\gamma_0^{(i)})$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$). При этом линии $\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(n+1)}$ уходят в бесконечность, а контуры $\gamma_0^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, n-1$) являются ограниченными.

Очевидно, все линии отрицательного уровня, начинающиеся в интервале F_i , находятся внутри контура $\gamma_0^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n+1$) и гомотопны ему. Последнее справедливо в силу леммы 1., гарантирующей отсутствие двух линий одинакового уровня, начинающихся в интервале F_i . Линии ненулевого уровня, начинающиеся в интервалах F_1 , F_{n+1} не могут уходить в бесконечно удаленную точку (см. замечание п. 3) и заканчиваются на свободной поверхности. Заметим также, что поскольку $\xi_1 > -\pi n$ и $\xi_{2n} < \pi n$, то существуют контуры, охватывающие источники.

Рассмотрим контур $Re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq 0$ при $R \rightarrow \infty$. Воспользуемся формулой (2.1) и асимптотическим представлением функции $Ei(z)$ при $Re(z) > 0$ и $|z| \rightarrow \infty$:

$$Ei(z) = i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(z)) + e^z \left\{ \sum_{k=1}^N (k-1)! z^{-k} + O(|z|^{-N-1}) \right\}$$

(последнюю формулу несложно получить используя 5.1.7 и 5.1.51 в [7]). Отсюда следует, что $v_n(x, y) = -2\pi n (\sin(\theta)/R + R^{-2} \cos 2\theta + O(R^{-3}))$, и линия $\gamma_0^{(1)}$ ($\gamma_0^{(n+1)}$) при $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) неограниченно приближается к линии $y = -1$.

Рассмотрим линии положительного уровня. Из (4.1) и (4.2) получим оценку

$$v_n(\xi_i, y) = e^y \int_y^0 V_n(\xi_i, t) e^{-t} dt \leq \pi e^y (e^{-y} - 1) < \pi, \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

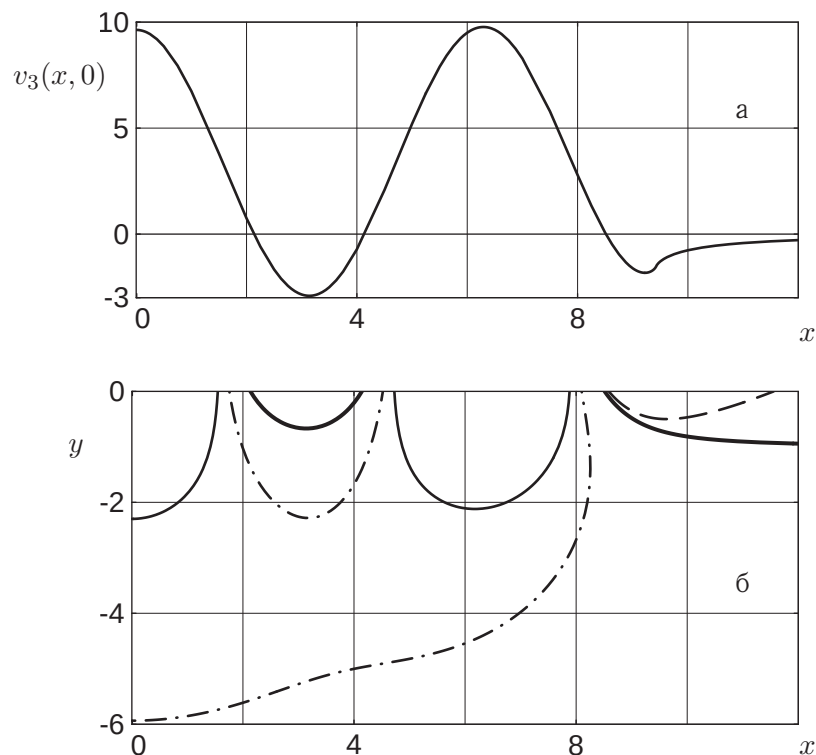
В то же время, из (5.1) следует, что $v_n(\chi_{2j}, 0) > 3\pi$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, линии начинающиеся на свободной поверхности при значениях x , принадлежащих одному из интервалов, составляющих множество $\{x : v_n(x, 0) > \pi\}$, должны заканчиваться на свободной поверхности в том же самом интервале, поскольку не могут пересекать лучи $x = \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) и не могут уходить в бесконечно удаленную точку. Вследствие леммы 1. невозможно существование двух линий одного уровня, начинающихся в одном из указанных интервалов.

Тем самым, показано, что максимальное число полупогруженных тел, для которых данная функция тока v_n доставляет пример неединственности задачи (1.1)–(1.5), (1.7), равно $2n + 1$ и совпадает с количеством локальных экстремумов функции $v_n(x, 0)$.

Укажем дополнительно некоторые особенности линий тока. Рассмотрим один из контуров $\gamma_0^{(m)}$ и достаточно близкий, охватывающий его контур γ' , $\gamma_0^{(m)} \cap \gamma' = \emptyset$. Из (4.1) следует, что $v_n(x, y) > 0$, когда $(x, y) \in \gamma'$. Отсюда и из аналитических свойств $v_n(x, y)$ вытекает существование контуров $\gamma_\delta^{(m)} = \{(x, y) : v_n(x, y) = \delta > 0\}$ при достаточно малом $\delta > 0$. При этом величина $\operatorname{dist}\{\gamma_0^{(m)}, \gamma_\delta^{(m)}\}$ мала. Обозначим через $\xi_i(\delta)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) корни уравнения $v_n(x, 0) = \delta$, перенумерованные слева направо. Точки $(\xi_{2m}(\delta), 0)$ и $(\xi_{2m+1}(\delta), 0)$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$) являются конечными для контуров $\gamma_\delta^{(m)}$, каждый из которых охватывает соответствующий контур нулевого уровня $\gamma_0^{(m)}$. Линии тока, начинающиеся в точках $(\xi_1(\delta), 0)$ и $(\xi_n(\delta), 0)$ не могут уходить в бесконечно удаленную точку и поэтому образуют единый контур (фиг. 2). Указанное строение линий тока возможно лишь в случае существования $n-1$ седловой точки функции $v_n(x, y)$, в которых линии уровня пересекаются.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов. На фиг. 2,а показана функция $v_3(x, 0)$, на фиг. 2,б — линии уровня $v_3(x, y) = c$, где сплошные, штриховые и штрих-пунктирные линии отвечают значениям $c = 3, 5; -1/3$ и $2, 2$ соответственно. Линии увеличенной толщины соответствуют уровню $c = 0$. Поскольку графики симметричны относительно оси ординат, представлены только их части, соответствующие положительным значениям x .

Автор благодарит Н.Г.Кузнецова за привлечение внимания к данной теме и за обсуждение работы.



Фиг. 2:

Литература

1. Кочин Н.Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел // Тр. конф. по теории волнового сопротивления. М.: ЦАГИ, 1937. С. 65–134. Собр. соч. Т. 2. М.:Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 105–182.
2. Вайнберг Б.Р., Мазья В.Г. К плоской задаче о движении погруженного в жидкость тела // Тр. Моск. мат. о-ва. 1973. Т. 28. С. 35–56.
3. Ursell F. Mathematical notes on the two-dimensional Kelvin–Neumann problem // Proc. 13th Symp. Naval Hydrodyn., Tokyo: Shipbuilding Res. Assoc., 1981. P. 245–251.
4. Кузнецов Н.Г., Мазья В.Г. Об однозначной разрешимости плоской задачи Неймана–Кельвина // Мат. сб. 1988. Т. 135. № 4. С. 440–462.
5. Kuznetsov N. On uniqueness and solvability in the linearized two-dimensional problem of a supercritical stream about a surface-piercing body // Proc. Roy. Soc. London. ser. A. 1995. **450**. N 1939. P. 233–253.
6. McIver M. An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem // J.Fluid Mech. 1996. V. 315. P. 257–266.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.