

УДК 532.59:534.1

О.В. Мотыгин

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ ПРИ КОСОМ НАБЕГАНИИ ВОЛН НА ЧАСТИЧНО ПОГРУЖЕННЫЕ ТЕЛА

Рассматривается линейная задача о гармонических колебаниях идеальной несжимаемой тяжелой жидкости со свободной поверхностью в присутствии двух и более бесконечно длинных частично погруженных цилиндрических тел, имеющих произвольное поперечное сечение. Доказано, что для произвольной частоты колебаний и произвольного ненулевого угла между образующей цилиндров и направлением распространения поверхностных волн существуют конфигурации тел, доставляющие примеры неединственности краевой задачи. Для этих конфигураций однородная краевая задача имеет нетривиальные решения с конечным интегралом энергии, которые описывают локализованные моды колебаний жидкости.

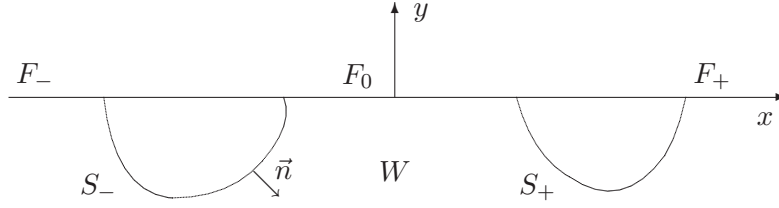
Существенное продвижение в исследованиях разрешимости линейных задач, описывающих взаимодействие тел с неограниченной идеальной жидкостью со свободной поверхностью (см. например обзор в [1]), связано с использованием обратной схемы построения примеров неединственности, впервые примененной [2] для плоской задачи о колебаниях жидкости в присутствии частично погруженных тел. Согласно этой схеме рассматривается некоторый потенциал, составленный из источников, расположенных на свободной поверхности жидкости и соответствующие ему линии тока. Те линии тока, которые начинаются и заканчиваются на свободной поверхности так, что одна из особенностей находится между конечными точками, могут быть выбраны в качестве контуров тел, для которых указанный потенциал является решением однородной краевой задачи.

Эта схема применялась для построения примеров неединственности плоской задачи о движении частично погруженных тел [3]. Она может применяться и для некоторых пространственных задач, например, были построены [4] примеры неединственности для осесимметрической задачи о колебаниях жидкости в присутствии частично погруженных тел.

Ниже исследуется существование локализованных мод колебаний жидкости в задаче о взаимодействии волн с частично погруженными бесконечно длинными цилиндрическими телами в случае произвольного угла θ между направлением распространения поверхностных волн и плоскостью, ортогональной оси ζ — образующей системы цилиндрических тел (случай $\theta = 0$ рассмотрен ранее [2]). Существование примеров неединственности для данной задачи было доказано [1] лишь для достаточно малых значений угла θ . Ниже это ограничение снимается. Предлагается другое семейство потенциалов и развивается техника, позволяющая доказывать существование примеров неединственности для всех направлений распространения волн, кроме случая распространения вдоль образующей цилиндров, когда $\theta = \pm\pi/2$.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о колебаниях идеальной несжимаемой тяжелой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью в присутствии двух и более параллельных бесконечно длинных частично погруженных цилиндрических тел. Образующая системы тел ζ составляет произвольный ненулевой угол с направлением распространения поверхностных волн. Предполагается, что движение жидкости — безвихревое, гармоническое по времени с частотой ω и периодическое по переменной ζ . Тогда существует потенциал скоростей

$$\operatorname{Re}\{u(x, y) e^{\pm ik\zeta} e^{-i\omega t}\}$$



Фиг. 1.

где $k = K \sin \theta$ — проекция волнового вектора на ось ζ , $K = \omega^2/g$ — волновое число, g — ускорение силы тяжести.

Для определения потенциала u используется линейное приближение теории поверхностных волн, при этом амплитуды волн и $|\nabla u|$ считаются малыми, и граничные условия можно снести на невозмущенную свободную поверхность $y = 0$. Обозначения для случая двух тел введены на фиг. 1, где представлено сечение плоскостью, ортогональной образующей цилиндров ζ ; W — сечение области занятой жидкостью, S_+ и S_- — смоченная поверхность левого и правого тела соответственно, F_- , F_0 и F_+ — три части невозмущенной свободной поверхности. Потенциал u удовлетворяет следующей краевой задаче

$$(\nabla^2 - k^2)u = 0 \quad \text{в } W \quad (1.1)$$

$$Ku - u_y = 0 \quad \text{на } F = F_- \cup F_0 \cup F_+ \quad (1.2)$$

$$\partial u / \partial n = f \quad \text{на } S = S_- \cup S_+ \quad (1.3)$$

$$\nabla u \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

Ниже изучается вопрос о существовании примеров неединственности для задачи (1.1)–(1.4), т.е. конфигураций тел $S_{\pm}$ и потенциалов, доставляющих нетривиальные решения задачи с однородным условием (1.3) на контурах $S_{\pm}$. Поэтому далее будем полагать $f = 0$.

Задачу (1.1)–(1.4) можно рассматривать как задачу о нахождении спектра, где K (или k) — собственное число, а u — собственная функция. Если для решения u задачи (1.1)–(1.4) функционал энергии

$$D[u] = \int_W |\nabla u|^2 dx dy + K \int_F |u|^2 dx$$

бесконечен, то говорят, что соответствующее значение K принадлежит непрерывному спектру задачи. Если

$$D[u] < \infty \quad (1.5)$$

то K принадлежит точечному спектру и функция u называется локализованной модой колебаний.

В общем случае, для описания процесса излучения или рассеяния волн, задача (1.1)–(1.4) должна быть дополнена условиями, определяющими вид волнового движения на бесконечности. Здесь эти условия могут быть опущены, поскольку будут рассматриваться только локализованные моды, а условие (1.5) влечет отсутствие волн на бесконечности.

Цель трех последующих разделов работы — доказательство утверждения

Теорема. Для любых значений волнового числа K и угла $\theta \neq \pm\pi/2$ существует пара тел $S_{\pm}$, для которой задача (1.1)–(1.5) имеет нетривиальное решение.

Далее в разд. 5 будет показано, что доказательство теоремы непосредственно переносится на случай количества тел большего двух.

2. Примеры неединственности. Для построения потенциалов, доставляющих примеры неединственности, понадобится функция Грина задачи — потенциал линии источников, расположенных на свободной поверхности $(x, y) = (\xi, 0)$. Эту функцию можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\{G(x, y, \xi) e^{\pm ik\xi} e^{-i\omega t}\}$$

где потенциал G — решение задачи

$$(\nabla_{x,y}^2 - k^2) G(x, y, \xi) = 0 \quad \text{при} \quad y < 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

$$KG - G_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x \neq \xi \quad (2.2)$$

$$G(x, y, \xi) \sim -\log \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \quad \text{при} \quad (x - \xi)^2 + y^2 \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla_{x,y} G(x, y, \xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow -\infty \quad (2.4)$$

Функция G , удовлетворяющая (2.1)–(2.4), построена и исследована ранее [5] и может быть записана в виде [1]

$$G(x, y, \xi) = 2 \int_C g(t) \exp \left\{ \ell y (t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2} \right\} \cos \ell(x - \xi)t \, dt \quad (2.5)$$

$$\ell = \sqrt{K^2 - k^2}, \quad g(t) = \frac{\sec \theta + (t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2}}{t^2 - 1}$$

где интегрирование проводится по нижнему берегу разреза $(0, +\infty)$. Выбор такого контура C , проходящего под точкой $t = 1$, соответствует уходящим на бесконечность волнам в асимптотике функции G .

Для построения примеров неединственности воспользуемся потенциалом

$$\Phi(x, y) = -(2K)^{-1} [G_x(x, y, 0) - G_x(x, y, -2a)], \quad a(k) = \ell^{-1}\pi \quad (2.6)$$

составленным из горизонтальных диполей. Очевидно, потенциал (2.6) удовлетворяет (1.1), (1.2) и (1.4). Далее, было получено [5] асимптотическое представление

$$G_x(x, y, \xi) \sim -2\pi K e^{Ky} e^{i\ell|x-\xi|} \operatorname{sign}(x - \xi)$$

остаточный член которого экспоненциально убывает при $|x - \xi| \rightarrow \infty$. Поэтому следствием выбора расстояния между диполями, равного $2a$, является отсутствие волновых составляющих в асимптотике Φ на бесконечности.

Рассмотрим линии тока потенциала Φ — кривые, касательные к которым указывают направление вектора скорости (Φ_x, Φ_y) в точке касания. Эти кривые являются траекториями $(x(s), y(s))$ системы автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \Phi_x(x(s), y(s)), \quad \dot{y} = \Phi_y(x(s), y(s)) \quad (2.7)$$

где точкой обозначено дифференцирование по параметру s .

Если траектория системы (2.7) начинается и заканчивается на свободной поверхности и охватывает точку, в которой расположен диполь (т.е. конечные точки расположены на свободной поверхности по разные стороны от диполя), то такая линия может быть выбрана в качестве одного из контуров $S_{\pm}$ (фиг. 1). При этом в силу (2.7) потенциал Φ удовлетворяет однородному условию (1.3) на таком контуре. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству существования решений системы (2.7), охватывающих сингулярные точки. Преимущество потенциала (2.6) по сравнению с потенциалами, составленными из источников, которые использовались ранее [1], состоит в том, что охватывающие сингулярную точку решения (2.7) имеются в сколь угодно малой окрестности этой точки. Последнее делает возможным использование асимптотических методов при доказательстве существования локализованных мод. Необходимые для доказательства локальные асимптотики потенциала Φ и его производных будут получены в разд. 3, поэтому доказательство теоремы откладывается до разд. 4.

Вследствие четности потенциала $\Phi(x - a, y)$ по переменной x картина линий тока, определяемых уравнениями (2.7), симметрична относительно линии $\{x = -a\}$. Поэтому далее ограничимся рассмотрением линий тока вблизи правого диполя, расположенного в начале координат.

3. Локальные асимптотики потенциала Φ и его производных. Изучим поведение потенциала Φ в окрестности начала координат. Удобно записать $\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) - \Phi_0(x + 2a, y)$, где

$$\Phi_0(x, y) = \int_0^{+\infty} g_0(t, y) e^{\ell y t} \sin \ell x t \, dt \quad (3.1)$$

$$g_0(t, y) = t \cos \theta \, g(t) \exp \left\{ \ell y \left((t^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{1/2} - t \right) \right\}$$

Поскольку подынтегральные выражения в представлениях функций $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_0(x + 2a, y)$ имеют одинаковую особенность (простой полюс) при $t = 1$, а потенциал Φ является разностью этих функций, то способ регуляризации интеграла в (3.1) несуществен. Будем полагать, что этот интеграл вычисляется в смысле главного значения. Далее, определим функцию

$$g_1(t, y) = g_0(t, y) - \cos \theta - \frac{1}{t} h_0(y, \theta), \quad h_0(y, \theta) = 1 + \frac{1}{2} K y \sin^2 \theta \quad (3.2)$$

так что $g_1(t, y) = \mathcal{O}(t^{-2})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по y при $-\infty < c \leq y \leq 0$. Тогда представление (3.1) функции Φ_0 можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y) = & \int_2^{+\infty} g_1(t, y) e^{\ell y t} \sin \ell x t \, dt + \cos \theta \int_2^{+\infty} e^{\ell y t} \sin \ell x t \, dt + \\ & + h_0(y, \theta) \int_2^{+\infty} \frac{e^{\ell y t} \sin \ell x t}{t} \, dt + \alpha(x, y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\alpha(x, y) = \int_0^2 \left[g_0(t, y) e^{\ell y t} \sin \ell x t - \frac{e^{K y} \sin \ell x}{t - 1} \right] dt \quad (3.4)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой аналитическую на промежутке интегрирования функцию параметра t . Очевидна также аналитичность данного выражения по паре переменных $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ при $t \neq 1$. Ввиду указанных свойств лемма Гартогса (см. например, [6] с.216) гарантирует аналитичность подынтегрального выражения в (3.4) по совокупности переменных $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2]$. Отсюда следует аналитичность функции $\alpha(x, y)$ по совокупности параметров $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Приведенная выше оценка $g_1(x, y)$ при $t \rightarrow +\infty$ гарантирует равномерную сходимость первого интеграла в (3.3) в любом компактном подмножестве нижней полуплоскости $\mathbb{R}_-^2 = \{y \leq 0\}$. Таким образом, первое слагаемое в правой части (3.3) представляет собой непрерывную в $\mathbb{R}_-^2$ функцию параметров (x, y) .

Введем комплексные координаты $z = x + iy$. Воспользуемся формулой

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{-ilzt}}{t} dt = E_1(2ilz), \quad \text{Im } z < 0 \quad (3.5)$$

где E_1 — функция интегральная экспонента ([7], 5.1.1). Известно, что выражение $E_1(z) + \log z$ представляет собой регулярную в $\mathbb{C}$ функцию параметра z ([7], 5.1.11). Тем самым, из (3.3) и (3.5) получим

$$\Phi_0(x, y) = \frac{x}{K(x^2 + y^2)} + \arg K(x + iy) + \phi(x, y) \quad (3.6)$$

где $\phi(x, y)$ — функция, непрерывная в точке $(0, 0)$. Из полученных ранее результатов [5] следует, что потенциал $\Phi_0(x, y)$ может быть аналитически продолжен в верхнюю полуплоскость с разрезом по положительной части оси y , на которой он имеет разрыв. Поэтому для функции Φ имеет место представление, подобное (3.6), где вклад от второго диполя включен в непрерывное слагаемое.

Рассмотрим комплексный потенциал

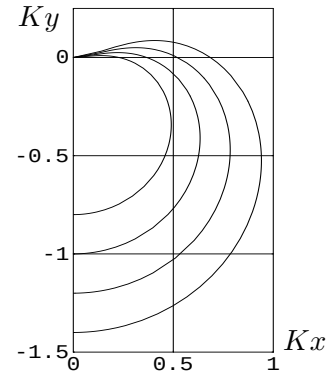
$$w(Kz) = 1/Kz - i \log Kz$$

Линии тока потенциала w , определяемые уравнениями $\text{Im}\{w(Kz)\} = \text{const}$, симметричны относительно оси y и соединяют две части свободной поверхности (см. фиг. 2, где линии тока представлены для $x > 0$). В то же время выражение $\text{Re}\{w(Kz)\}$ совпадает с суммой первых двух членов представления (3.6). Поэтому можно ожидать, что траектории, задаваемые уравнением (2.7), в каком-то смысле близки к линиям тока потенциала w и также образуют контуры, содержащие особенность внутри. Остальная часть работы посвящена обоснованию этого предположения.

Понадобятся асимптотические представления функций Φ_x , Φ_y , Φ_{xx} , Φ_{yy} и Φ_{xy} при $z \rightarrow 0$. Для этого цели воспользуемся схемой, с помощью которой получено представление (3.6). Рассмотрим для определенности Φ_x . Из (3.1) следует, что

$$\Phi_x(x, y) = \ell \int_2^{+\infty} t g_0(t, y) e^{\ell y t} \cos \ell x t dt + \sigma(x, y) \quad (3.7)$$

$$\sigma(x, y) = \alpha_x(x, y) + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(x + 2a, y)$$



Фиг. 2.

где функция $\sigma(x, y)$ — аналитическая в $\mathbb{R}^2$ с разрезом $\{x = -2a, y > 0\}$. Далее, пусть

$$\begin{aligned} g_2(t, y) &= t g_0(t, y) - t \cos \theta - h_0(y, \theta) - \frac{1}{t} \cos \theta h_1(y, \theta) \\ h_1(y, \theta) &= 1 + \frac{1}{2}(1 + Ky) \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{1}{8} \ell^2 y^2 \operatorname{tg}^4 \theta \end{aligned}$$

При этом $g_2(t, y) = \mathcal{O}(t^{-2})$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по y , $-\infty < c \leq y \leq 0$. Тогда формула (3.7) может быть записана следующим образом

$$\begin{aligned} \ell^{-1} \Phi_x(x, y) &= \int_2^{+\infty} g_2(t, y) e^{\ell y t} \cos \ell x t \, dt + \frac{\sigma(x, y)}{\ell} + \cos \theta \int_2^{+\infty} t e^{\ell y t} \cos \ell x t \, dt + \\ &+ h_0(y, \theta) \int_2^{+\infty} e^{\ell y t} \cos \ell x t \, dt + \cos \theta h_1(y, \theta) \int_2^{+\infty} \frac{e^{\ell y t} \cos \ell x t}{t} \, dt \end{aligned}$$

Определение g_2 обеспечивает равномерную сходимость первого интеграла в правой части последней формулы и, как следствие, непрерывность указанного слагаемого в $\overline{\mathbb{R}^2_-}$. Далее, после преобразований приходим к представлению при $r = |x + iy| \rightarrow 0$

$$\Phi_x = \frac{y^2 - x^2}{K(x^2 + y^2)^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} K (1 + \cos^2 \theta) \log K |x + iy| + \mathcal{O}(1) \quad (3.8)$$

Аналогично можно показать, что при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Phi_y &= -\frac{2xy}{K(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathcal{O}(1), \quad \Phi_{xy} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{K(x^2 + y^2)^3} + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \Phi_{xx} &= \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{K(x^2 + y^2)^3} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \mathcal{O}(r^{-2}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

4. Доказательство существования примеров неединственности. Здесь будет удобно изменить параметризацию кривых, задаваемых системой (2.7), переписав ее следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x(s), y(s)), \quad \dot{y} = Y(x(s), y(s)) \\ X(x, y) &= K(x^2 + y^2)^{3/2} \Phi_x(x, y), \quad Y(x, y) = K(x^2 + y^2)^{3/2} \Phi_y(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Рассмотрим также модельную систему, правые части которой содержат главные члены асимптотик функций X и Y при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= X_0(x_0(s), y_0(s)), \quad \dot{y}_0 = Y_0(x_0(s), y_0(s)) \\ X_0(x, y) &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^{-1/2}, \quad Y_0(x, y) = -2xy(x^2 + y^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Траектории системы (4.2) в $\mathbb{R}^2_-$ — окружности, которые запишем следующим образом:

$$x_0(s) = \rho \sin \tau(s), \quad y_0(s) = -\rho(1 + \cos \tau(s)) \quad (4.3)$$

При этом точке $(0, 0)$ соответствуют значения $\tau = \pm\pi$.

Изучим свойства параметризации $\tau(s)$. Подставим (4.3) в (4.2). Получим дифференциальное уравнение

$$\tau'(s) = 2 \sin \frac{\pi - \tau(s)}{2} \quad (4.4)$$

Пусть также $\tau(0) = 0$, т.е. значение параметра $s = 0$ соответствует нижней точке окружности,

Далее, очевидно, $\sin t < t$ при $t > 0$ и для произвольной величины $0 < c < 1$ в достаточно малой окрестности нуля $0 < t < \delta$ имеем неравенство $ct < \sin t$. Применяя теорему сравнения ([8], Т. 3.3.2), получаем для достаточно близких к π решений уравнения (4.4) оценку

$$\pi - c^{-1} e^{-cs} \leq \tau(s) \leq \pi - e^{-s}$$

Отсюда следует, что $\tau(s) \rightarrow \pm\pi$ при $s \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, верхней точке траектории системы $z = 0$ соответствуют значения параметра $s = \pm\infty$, но при этом $\tau(s) = \pm\pi + \mathcal{O}(e^{\mp s})$ при $s \rightarrow \pm\infty$.

Рассмотрим решения систем (4.1) и (4.2) — траектории $(x^\rho(s), y^\rho(s))$ и $(x_0^\rho(s), y_0^\rho(s))$ соответственно, проходящие через точку $(0, -\rho)$, которой отвечает значение параметра $s = 0$. Используя формулы (4.1), (4.2) и (3.8)–(3.9), можно показать, что максимальное значение величин $\dot{x}^\rho(s)$, $\dot{y}^\rho(s)$, $\dot{x}_0^\rho(s)$ и $\dot{y}_0^\rho(s)$ на частях траекторий, находящихся в полукруге $B_{d\rho} = \{(x, y) : |x + iy| \leq d\rho, y \leq 0\}$ имеет порядок $\mathcal{O}(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$. Отсюда следует, что для любого значения параметра $s_* < \infty$ можно найти $d(c) \geq 1$, такое, что при $|s| \leq s_*$ и $0 < \rho \leq c$ траектории $(x^\rho(s), y^\rho(s))$ и $(x_0^\rho(s), y_0^\rho(s))$ содержатся в $B_{d\rho}$. Заметим далее, что функции $|\nabla X|$, $|\nabla Y|$, $|\nabla X_0|$ и $|\nabla Y_0|$ ограничены в окрестности начала координат. Определим

$$M(\rho) = \max_{z \in B_{d\rho}} \{|\nabla X_0(z)|, |\nabla Y_0(z)|\}$$

$$\varepsilon(\rho) = \max_{z \in B_{d\rho}} \{|X(z) - X_0(z)|, |Y(z) - Y_0(z)|\}$$

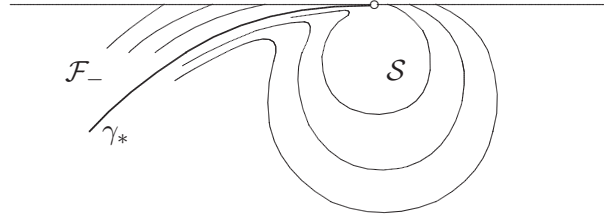
Тогда теорема сравнения ([8], Т.3.3.1) и оценка $\varepsilon(\rho) = \mathcal{O}(\rho^2)$ при $\rho \rightarrow 0$ гарантируют, что

$$\max \{ \|\tilde{x}^\rho(s) - \tilde{x}_0^\rho(s)\| : |s| \leq s_* \} \leq \frac{\varepsilon(\rho)}{M(\rho)} \left(e^{M(\rho)s_*} - 1 \right) = \mathcal{O}(\rho^2) \quad (4.5)$$

Рассмотрим некоторую окрестность начала координат $V \subset \overline{\mathbb{R}^2}$, включающую части свободной поверхности справа и слева от диполя. Пусть окрестность V достаточно мала, так что в ней отсутствуют особые точки системы (4.1) $X = Y = 0$, отличные от $(0, 0)$ (существование такой окрестности следует из (3.8), (3.9)). Рассмотрим область $\mathcal{S} \subset V$, которую составляют решения (4.1), проходящие через отрицательную часть оси y . Обозначим через $\mathcal{F}_\pm$ подмножества $V \setminus \mathcal{S}$, включающие части свободной поверхности при $\pm x > 0$ соответственно. Предположение, что $\mathcal{S}$ не имеет общих точек со свободной поверхностью слева от диполя (фиг. 3), т.е. траектория (4.1) γ_* , разделяющая множества $\mathcal{F}_-$ и $\mathcal{S}$, примыкает к началу координат, приводит к противоречию.

Действительно, заметим, что точки $(x_0^\rho(s_*), y_0^\rho(s_*))$ находятся на прямой, приходящей в начало координат под некоторым углом, который может быть сделан сколь угодно малым за счет увеличения величины s_* . Поэтому ввиду (4.5) кривая γ_* касается свободной поверхности в точке $(0, 0)$. Обозначим $y_*(x)$ функцию, задающую γ_* в окрестности начала координат. Поскольку $y_*(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, то из (4.1), (3.8) и (3.9) следует, что $y'_*(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y'_*(x) = -Kx + 2x^{-1}y_*(x) + \lambda(x), \quad \lambda(x) = o(x)$$



Фиг. 3.

Запишем $y_*(x) = -Kx^2 \log K|x| + \varphi(x)$. Тогда φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'(x) - 2x^{-1}\varphi(x) = \lambda(x)$$

решение которого может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = x^2 \left(\text{const} - \int_x^1 \xi^{-2} \lambda(\xi) d\xi \right) \quad (4.6)$$

Далее, принимая во внимание оценку $\lambda = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \xi^{-2} \lambda(\xi) d\xi \bigg/ \int_x^1 \xi^{-1} d\xi = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} \lambda(x) = 0$$

Из последней формулы и равенства (4.6) следует оценка $\varphi(x) = o(x^2 \log x)$ и, таким образом, установлено, что

$$y_*(x) = -Kx^2 \log K|x| + o(x^2 \log x) \quad \text{при } x \rightarrow 0$$

Последнее противоречит предположению о том, что $\mathcal{S}$ не имеет общих точек со свободной поверхностью слева от диполя, поскольку запрещает линии γ_* уходить из точки $(0, 0)$ в нижнюю полуплоскость.

Поэтому множество $\mathcal{S}$ включает некоторую часть свободной поверхности и диполь находится внутри данного интервала. Таким образом, можно найти семейство траекторий $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$, конечные точки которых расположены на свободной поверхности по разные стороны от точки, в которой расположен диполь, и это справедливо при любой величине угла $\theta \neq \pm\pi/2$. Поскольку часть свободной поверхности, принадлежащая V , не является характеристической линией (4.1), то траектории семейства $\mathcal{S}_0$ примыкают к ней под ненулевым углом и образуют контуры, обладающие свойствами необходимыми для фиксации их в качестве контуров тел $S_{\pm}$, для которых Φ — решение задачи (1.1)–(1.5). Тем самым, теорема доказана.

5. Другие примеры неединственности. Рассмотрим семейство потенциалов

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(\pm)}(x, y) &= \Phi_0(x - a_n^{(\pm)}, y) \mp \Phi_0(x + a_n^{(\pm)}, y) \\ a_n^{(\pm)} &= \ell^{-1} (n - 1/4 \pm 1/4) \pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При этом $\Phi(x - a_1^{(+)}, y) = \Psi_1^{(+)}(x, y)$ и $\Psi_n^{(+)} (\Psi_n^{(-)})$ — четные (нечетные) функции переменной x . Потенциалы $\Psi_n^{(\pm)}$ — безволновые и также доставляют примеры неединственности задачи (1.1)–(1.5). Приведенное выше доказательство существования линий

тока, охватывающих особенности, остается справедливым ввиду его локального характера.

Также результаты работы непосредственно переносятся на случай, когда количество тел N , для которых ставится спектральная задача (1.1)–(1.5), больше двух. Обозначим через m целую часть числа $N/2$. Тогда, например, потенциал

$$2(N - 2m)[\Phi_0(x, y) + \Phi_0(x + a_1^{(+)}, y)] + \sum_{n=1}^m \Psi_n^{(+)}(x, y)$$

является безволновым и имеет N особенностей на свободной поверхности.

Автор благодарит Н. Г. Кузнецова, Р. Портера, Д. В. Эванса и М. Дж. Саймона за возможность ознакомиться с рукописью работы [1] до опубликования и за обсуждения.

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Интеграция” (проекты №№ 147, 589).

Литература

1. *Kuznetsov N., Porter R., Evans D.V., Simon M.J.* Uniqueness and trapped modes for surface-piercing cylinders in oblique waves // *J.Fluid Mech.* 1998. V. **365**. P. 351–368.
2. *McIver M.* An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem // *J.Fluid Mech.* 1996. V. **315**. P. 257–266.
3. *Мотыгин О.В.* Примеры неединственности для линейной задачи потенциального обтекания полупогруженных тел // *ПММ.* 1997. Т. **61**. Вып. 6. С. 983–990.
4. *Kuznetsov N., McIver P.* On uniqueness and trapped modes in the water-wave problem for a surface-piercing axisymmetric body // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 1997. V. **50**. Pt 4. P. 565–580.
5. *Ursell F.* The expansion of water-wave potentials at great distances // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1968. V. **64**. Pt 3. P. 811–826.
6. *Чирка Е.М.* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985. 272 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. *Hille E.* Lectures on ordinary differential equations. Reading: Addison-Wesley, 1969. 723 p.